Francisco Magalhães Gomes
IMECC – UNICAMP

Matemática básica

Volume 1
Operações, equações, funções e sequências

2017

Sumário

Capítulo 3 Funções 255

Capítulo 4 Funções polinomiais 363

Prefácio

Os cursos de engenharia e de ciências exatas das universidades brasileiras incluem, em seus primeiros semestres, disciplinas de cálculo, equações diferenciais, geometria analítica e álgebra linear. Além disso, os currículos de muitos cursos superiores de ciências humanas e biológicas possuem alguma disciplina básica de matemática, com tópicos selecionados de cálculo e álgebra.

Ao contrário do que acontece em outras áreas do conhecimento, para obter um bom desempenho nas disciplinas iniciais de matemática dos cursos universitários, os estudantes precisam ter uma base sólida em tópicos que vão das operações aritméticas básicas às funções, e da geometria à trigonometria. Esse livro é fruto de cinco anos do esforço para criar um texto adequado a essa preparação.

Além dos jovens que ingressam em cursos universitários, o público-alvo do livro inclui pessoas que queiram empregar a matemática para analisar os dados, tabelas e gráficos com os quais somos bombardeados todos os dias, ou que desejem criar seus próprios modelos matemáticos. A intenção foi criar um texto com um caráter prático, combinando aplicações com um grande número de exemplos de fixação das técnicas de manipulação de expressões, equações e funções matemáticas.

O livro é composto por seis capítulos, que tratam de operações, equações, funções e sequências. Cada capítulo é dividido em seções numeradas, as quais incluem um bom número de exercícios, quase todos com resposta. Os capítulos estão encadeados, de modo que o conteúdo do primeiro é essencial para a compreensão de todos os demais. Portanto, recomenda-se que o leitor só deixe de ler uma seção se tiver certeza de que domina seu conteúdo.

Em geral, os assuntos são abordados à medida que são necessários. Assim, por exemplo, as funções inversas são introduzidas no capítulo sobre funções exponenciais e logarítmicas, em lugar de fazerem parte do capítulo sobre funções em geral. Além disso, embora as demonstrações formais tenham sido evitadas para que o livro fosse acessível a um público mais amplo, os principais resultados matemáticos apresentados são acompanhados de breves explicações e exemplos, com o propósito de permitir que o leitor compreenda como foram obtidos.

Para auxiliar a leitura, foram incluídos comentários, explicações, referências, curiosidades e figuras à margem do texto. Observações e explicações breves são apresentadas em azul. Comentários e dicas mais relevantes aparecem em caixas verdes. Já as advertências são mostradas em caixas vermelhas. Os quadros com fundo amarelo que aparecem ao longo do texto dão destaque a definições, propriedades e roteiros de resolução de problemas, que servem de referência e podem sem consultados com frequência pelo leitor.

Esse livro não cobre todos os tópicos de um curso de matemática básica. Um segundo volume abordará geometria plana e espacial, trigonometria, matrizes, sistemas lineares e geometria analítica, temas igualmente importantes na preparação para as disciplinas de matemática dos cursos superiores.

Como mensagem final ao leitor, lembro que o nosso progresso pessoal e profissional se baseia no conhecimento, um ingrediente fundamental para que nos tornemos verdadeiramente independentes. Isso é particularmente relevante quando se trata de matemática, pois é nela que se fundamenta grande parte da ciência e das decisões que

nos afetam cotidianamente. Entretanto, “conhecer” não é sinônimo de “decorar”. Em lugar de decorar como resolver um problema específico, deve-se tentar compreender completamente seu enunciado e a lógica envolvida em sua resolução. E não basta acompanhar a resolução impressa no livro. Para dominar um tópico é preciso pôr em prática o que se lê, pois é só com a experiência que se aprende como lidar com as sutilezas dos problemas e que se adquire intuição matemática. E se um caminho não der frutos, deve-se tentar outros, uma vez que não há satisfação maior do que aquela decorrente da percepção de que se é capaz de superar as dificuldades, ainda que estas pareçam pequenas.

Boa leitura!

Francisco A. M. Gomes

1 Números reais

Antes de ler o capítulo

Sugerimos ao leitor que revise

- as quatro operações aritméticas elementares: soma, subtração, multiplicação e divisão;
- os números negativos;
- a representação decimal dos números.

Nesse capítulo, revisamos alguns conceitos fundamentais da aritmética e álgebra, com o propósito preparar o leitor para os capítulos que estão por vir. Os tópicos aqui abordados são aqueles indispensáveis para que se possa compreender a matemática cotidiana, ou seja, aquela que usamos quando vamos ao supermercado ou ao banco, ou quando lemos um jornal, por exemplo.

A aritmética elementar é o ramo da matemática que trata dos números e de suas operações. Por ser a base sobre a qual são erguidos os demais ramos, seu conhecimento é imprescindível para a compreensão da maioria dos tópicos da matemática. Já na álgebra elementar, uma parte dos números é representada por outros símbolos, geralmente letras do alfabeto romano ou grego.

É provável que você já domine grande parte dos conceitos aritméticos e algébricos aqui apresentados. Ainda que seja esse o caso, não deixe de fazer uma leitura rápida das seções, para refrescar sua memória. Ao final da revisão, você deve estar preparado para trabalhar com números reais, frações, potências e raízes.

1.1 Conjuntos de números

Deixamos para o próximo capítulo a apresentação dos principais conceitos associados a conjuntos. Por hora, é suficiente conhecer os principais conjuntos numéricos.

Os números usados rotineiramente em nossas vidas são chamados **números reais**. Esses números são divididos em diversos conjuntos, cada qual com uma origem e um emprego específico.

Ao *homo sapiens* de épocas remotas, por exemplo, os números serviam apenas para contar aquilo que era caçado, ou coletado como alimento. Assim, para esse homem rudimentar, bastavam os **números naturais**:

$$1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5; \quad \ldots$$

Os números naturais também estão associados ao conceito de número ordinal, que é aquele que denota ordem ou posição (primeiro, segundo, terceiro, quarto, ...).

Você sabia?

Em algumas culturas antigas, só os números 1, 2 e 3 possuíam nomes específicos. Qualquer quantidade acima de três era tratada genericamente como "muitos". Por outro lado, os egípcios, há milhares de anos, já possuíam hieroglifos particulares para representar números entre 1 e 9.999.999 na forma decimal.

O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$.

Um membro de um conjunto de números é chamado **elemento** do conjunto. Dizemos, portanto, que o número 27 é um elemento do conjunto de números naturais, ou simplesmente que $27 \in \mathbb{N}$. A Tabela 1.1 fornece a notação usada para indicar a relação de pertinência entre um número a qualquer e um conjunto numérico S.

Alguns autores consideram o zero um número natural, enquanto outros preferem não incluí-lo nesse conjunto. Esse livro segue a segunda vertente, considerando que o zero não é natural, ou seja, que $0 \notin \mathbb{N}$.

Quando aplicadas a números naturais, algumas operações geram outros números naturais. Assim, por exemplo, quando somamos ou multiplicamos dois números naturais, sempre obtemos um número natural. Entretanto, o mesmo não ocorre quando

Tabela 1.1: Notação de pertinência a conjunto.

Notação	Significado	Exemplos
$a \in S$	a é um elemento de S. a pertence a S.	$132 \in \mathbb{N}$ $9756431210874 \in \mathbb{N}$
$a \notin S$	a não é um elemento de S. a não pertence a S.	$12{,}5 \notin \mathbb{N}$ $-1 \notin \mathbb{N}$

calculamos $50 - 100$. Ou seja, para que a subtração sempre possa ser feita, precisamos dos números negativos e do zero.

Na prática, o zero costuma ser usado como um valor de referência, e os números negativos representam valores inferiores a essa referência. Quando usamos, por exemplo, a escala Celsius para indicar a temperatura, o zero representa a temperatura de congelamento da água, e os números negativos correspondem a temperaturas ainda mais frias.

Considerando todos os números que podem ser gerados pela subtração de números naturais, obtemos o conjunto dos **números inteiros**

$$\ldots;\quad -5;\quad -4;\quad -3;\quad -2;\quad -1;\quad 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad 5;\quad \ldots$$

O conjunto dos números inteiros é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$.

Note que todo número natural é também um número inteiro, mas o contrário não é verdade.

Apesar de serem suficientes para que efetuemos a subtração de números naturais, os números inteiros ainda não permitem que definamos outras operações, como a divisão. Para que mais essa operação seja feita com quaisquer números inteiros, definimos outro conjunto, composto pelos **números racionais**.

O termo "racional" deriva da palavra "razão" que, em matemática, denota o quociente entre dois números. Assim, todo número racional pode ser representado pela divisão de dois números inteiros, ou seja, por uma fração na qual o numerador e o denominador são inteiros. Alguns números racionais são dados a seguir.

Observe que todo número inteiro é também racional, pois pode ser escrito como uma fração na qual o denominador é igual a 1.
Se você não está familiarizado com a manipulação de frações, não se preocupe, pois retornaremos ao assunto ainda nesse capítulo.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad -\frac{3}{10} = -0{,}3 \qquad \frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots \qquad -\frac{3}{8} = -0{,}375 \qquad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$$

Os exemplos acima ilustram outra característica dos números racionais: a possibilidade de representá-los na forma decimal, que pode ser finita – como observamos para $\frac{1}{5}$, $-\frac{3}{10}$, $\frac{6}{1}$ e $-\frac{3}{8}$ – ou periódica – como exibido para $\frac{4}{3}$ e $\frac{1}{7}$. O termo *periódico* indica que, apesar de haver um número infinito de algarismos depois da vírgula, estes aparecem em grupos que se repetem, como o 3 em 1,333..., ou 142857 em 0,142857142857...

O conjunto dos números racionais é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$.

Atenção
Lembre-se de que a divisão de um número por zero não está definida, de modo que não podemos escrever $\frac{5}{0}$, por exemplo.

Infelizmente, os números racionais ainda não são suficientes para representar alguns números com os quais trabalhamos com frequência, como $\sqrt{2}$ ou π. Números como esses são chamados **irracionais**, pois não podem ser escritos como a razão de dois números inteiros.

A forma decimal dos irracionais é infinita e não é periódica, ou seja, ela inclui um número infinito de algarismos, mas esses não formam grupos que se repetem. Assim, não é possível representar exatamente um número irracional na forma decimal, embora seja possível apresentar valores aproximados, que são indicados nesse livro pelo símbolo "≈". Assim, são válidas as expressões

$$\pi \approx 3{,}1416 \qquad \text{e} \qquad \pi \approx 3{,}1415926536.$$

Números irracionais populares, acompanhados de algumas de suas aproximações decimais, são apresentados abaixo.

Trataremos com maior detalhe as raízes – como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ – na Seção 1.9.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142136 \qquad \sqrt{3} \approx 1{,}7320508$$
$$\log_2(3) \approx 1{,}5849625 \qquad e \approx 2{,}7182818$$

Exemplo 1. O número π

Quando dividimos o comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro, obtemos um número constante (ou seja, um valor que não depende da circunferência em questão), representado pela letra grega π (lê-se "pi").

$$\pi = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}}.$$

No computador

O Wolfram Alpha (disponível em `www.wolframalpha.com`) é um mecanismo gratuito que facilita a resolução de problemas matemáticos.
Usando o Alpha, podemos determinar uma aproximação para π com qualquer precisão (finita). Por exemplo, a aproximação com 100 algarismos é 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211 7068.

Figura 1.1: Uma circunferência e seu diâmetro.

Exemplo 2. Diagonal de um quadrado de lado inteiro

Suponha que um quadrado tenha lados com 1 m de comprimento. Nesse caso, sua diagonal mede $\sqrt{2}$ m, um número irracional. Além disso, como veremos no segundo volume dessa obra, todo quadrado com lado inteiro tem diagonal de medida irracional (a medida da diagonal será sempre o produto do lado por $\sqrt{2}$).

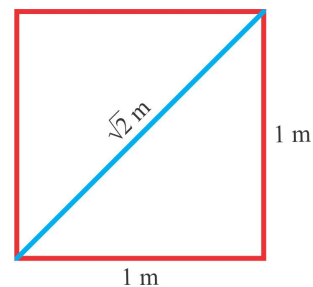



Figura 1.2: Um quadrado cujo lado mede 1 m.

Unindo o conjunto dos números racionais ao conjunto dos números irracionais, obtemos o conjunto dos números reais.

O conjunto dos números reais é representado pelo símbolo $\mathbb{R}$.

Reais
Racionais | Irracionais
Inteiros | Frações não inteiras
Naturais | Negativos e zero

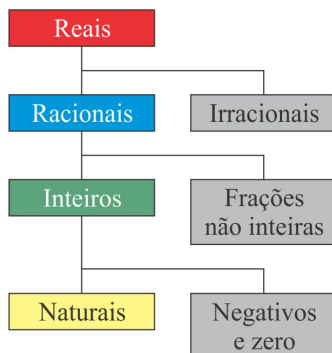



Figura 1.3: O conjunto dos números reais e seus subconjuntos.

A Figura 1.3 mostra os números reais e os conjuntos que o formam (que são chamados *subconjuntos* de $\mathbb{R}$).

É possível realizar qualquer operação de adição, subtração e multiplicação entre números reais. Também é possível realizar a divisão de qualquer número real por outro número diferente do zero. A seguir, revisaremos as propriedades dessas operações.

Exercícios 1.1

1. Indique quais frases abaixo são verdadeiras.

a) Todo número real é racional.
b) Todo número natural é real.
c) Todo número inteiro é natural.
d) Todo número racional pode ser escrito como uma fração na qual o numerador e o denominador são naturais.
e) Todo número irracional é real.
f) Todo número natural é racional.

2. Forneça dois exemplos de

a) números naturais;
b) números inteiros;
c) números racionais negativos;
d) números irracionais;
e) números reais que não são naturais.

3. Dentre os números reais

$$5{,}3 \qquad -2 \qquad 10000000 \qquad \sqrt{5} \qquad \frac{632}{75}$$

$$0 \qquad \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad -8{,}75 \qquad \sqrt{4} \qquad 125{,}666\ldots$$

indique quais são

a) naturais;
b) inteiros;
c) racionais;
d) irracionais.

4. Usando uma calculadora, reescreva os números racionais abaixo na forma decimal.

a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{1}{16}$
c) $-\frac{13}{6}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $-\frac{42}{5}$
f) $\frac{5}{11}$
g) $-\frac{19}{8}$
h) $\frac{2}{9}$
i) $\frac{32}{99}$
j) $\frac{432}{999}$

Respostas dos Exercícios 1.1

1. a) F b) V c) F d) F e) V f) V

2.
a) Por exemplo, 123 e 13489.
b) Por exemplo, -3 e 250.
c) Por exemplo, $-4/3$ e $-0{,}255$.
d) Por exemplo, $3\sqrt{2}$ e 4π.
e) Por exemplo, -1 e $0{,}5$.

3.
a) Naturais: 10000000 e $\sqrt{4}$.
b) Inteiros: -2, 10000000, 0 e $\sqrt{4}$.
c) Racionais: 5,3, -2, 10000000, $\frac{632}{75}$, 0, $-8{,}75$, $\sqrt{4}$ e 125,666...
d) Irracionais: $\sqrt{5}$ e $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4.
a) 3,5
b) 0,0625
c) $-2{,}1666666\ldots$
d) $1{,}333333\ldots$
e) $-8{,}4$
f) $0{,}454545\ldots$
g) $-2{,}375$
h) $0{,}222222\ldots$
i) $0{,}323232\ldots$
j) $0{,}432432\ldots$

1.2 Soma, subtração e multiplicação de números reais

Uma das características mais importantes dos serem humanos é a capacidade de abstração. Exercitamos essa capacidade o tempo inteiro, sem nos darmos conta disso. Quando alguém diz “flor”, imediatamente reconhecemos do que se trata. Compreendemos o significado desse termo porque já vimos muitas flores, e somos capazes de associar palavras aos objetos que conhecemos, sem dar importância, por exemplo, à espécie da planta (begônia, rosa, antúrio, calanchoe, orquídea, cravo, hortênsia, gerânio, margarida, violeta etc). Se não empregássemos essa generalização, escolhendo uma única palavra para representar a estrutura reprodutora de várias plantas, seríamos incapazes de dizer frases como “darei flores no dia das mães”.

Na matemática, e na linguagem matemática, a abstração ocorre em vários níveis, e em várias situações. O uso de números naturais para contar objetos diferentes é a forma mais simples e antiga de abstração. Outra abstração corriqueira consiste no uso de letras, como a, b, x e y para representar números. Nesse caso, a letra serve apenas para indicar que aquilo a que ela se refere pode ser qualquer número. Assim, ao escrevermos

$$a + b$$

para representar uma soma, indicamos que essa operação é válida para dois números a e b quaisquer, que suporemos reais. Além disso, a própria escolha das letras a e b é arbitrária, de modo que, a mesma soma genérica poderia ter sido escrita na forma $w + v$.

O leitor deve ter sempre em mente que, ao trabalhar com letras, está trabalhando com os números que elas representam, mesmo que, no momento, esses números não tenham sido especificados. Vejamos um exemplo no qual definimos a área e o perímetro de um retângulo mesmo sem conhecer seus lados.

Exemplo 1. Perímetro e área de um retângulo

Suponha que um retângulo tenha arestas (lados) de comprimento b e h. Nesse caso, definimos o *perímetro*, P, do retângulo como a soma dos comprimentos das arestas, ou seja

$$P = b + b + h + h = 2b + 2h.$$

Observe que usamos o sinal = para definir o termo P que aparece à sua esquerda.

Definimos também a *área*, A, do retângulo como o produto

$$A = b \cdot h.$$

Dadas essas fórmulas para o perímetro e a área, podemos usá-las para qualquer retângulo, quer ele represente um terreno cercado, como o da Figura 1.4, quer um quadro pendurado na parede. No caso do terreno, o perímetro corresponde ao comprimento da cerca, enquanto o perímetro do quadro fornece o comprimento da moldura.

Embora não tenhamos dito explicitamente, fica subentendido que as medidas b e h devem ser números reais maiores que zero.

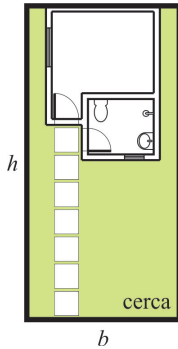



Figura 1.4: Um terreno retangular.

■ A precedência das operações e o uso de parênteses

Para calcular uma expressão aritmética envolvendo as quatro operações elementares, é preciso seguir algumas regras básicas. Em primeiro lugar, deve-se efetuar as multiplicações e divisões, da esquerda para a direita. Em seguida, são efetuadas as somas e subtrações, também da esquerda para a direita.

Como exemplo, vamos calcular a expressão $25 - 8 \times 2 + 15 \div 5$.

$$25 - \underbrace{8 \times 2} + 15 \div 5$$

$$25 - 16 + \underbrace{15 \div 3}$$

$$\underbrace{25 - 16} + 5$$

$$\underbrace{9 + 5}$$

$$14$$

Quando desejamos efetuar as operações em outra ordem, somos obrigados a usar parênteses. Nesse caso, a expressão que está entre parênteses é calculada em primeiro lugar, como mostra o exemplo a seguir.

$$5 \times \underbrace{(10 - 3)}_{7} = 5 \times 7 = 35.$$

Se não tivéssemos usado os parênteses nesse exemplo, teríamos que efetuar a multiplicação antes da soma, de modo que o resultado seria bastante diferente:

$$\underbrace{5 \times 10}_{50} - 3 = 50 - 3 = 47.$$

Atenção

Não se esqueça de incluir um par de parênteses (ou colchetes, ou chaves) quando quiser indicar que uma operação deve ser efetuada antes de outra que, normalmente, lhe precederia.

Um exemplo mais capcioso é dado abaixo. Como se vê, na expressão da esquerda, os parênteses indicam que a multiplicação deve ser efetuada antes da divisão. Já na

expressão da direita, que não contém parênteses, a divisão é calculada em primeiro lugar.

$$\underbrace{100 \div \underbrace{(2 \times 5)}_{10}}_{10} \qquad \underbrace{\underbrace{100 \div 2}_{50} \times 5}_{250}$$

Por outro lado, é permitido usar parênteses em situações nas quais eles não seriam necessários. Como exemplo, a expressão

$$100 - (75 \div 5) + (12 \times 6)$$

é equivalente a

$$100 - 75 \div 5 + 12 \times 6.$$

Na calculadora
As calculadoras científicas modernas permitem o uso de parênteses. Efetue a conta ao lado em sua calculadora, substituindo as chaves e os colchetes por parênteses, e verifique se você obtém o mesmo resultado.

Podemos escrever expressões mais complicadas colocando os parênteses dentro de colchetes, e estes dentro de chaves, como no exemplo abaixo.

$$\begin{aligned} 5 \times \{3 \times [(20-4) \div (9-7) + 2] + 6\} &= 5 \times \{3 \times [16 \div 2 + 2] + 6\} \\ &= 5 \times \{3 \times 10 + 6\} \\ &= 5 \times 36 \\ &= 180. \end{aligned}$$

■ Propriedades da soma e multiplicação

Foge ao objetivo desse livro definir as operações aritméticas elementares, que supomos conhecidas pelo leitor. Entretanto, nos deteremos nas propriedades dessas operações, nem sempre bem exploradas no ensino fundamental.

Comecemos, então, analisando as propriedades mais importantes da soma e da multiplicação.

Propriedades da soma e da multiplicação

Suponha que a, b e c sejam números reais.

	Propriedade	Exemplo
1.	Comutatividade da soma $a + b = b + a$	$2 + 3 = 3 + 2$
2.	Associatividade da soma $(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
3.	Comutatividade da multiplicação $a \cdot b = b \cdot a$	$15 \cdot 9 = 9 \cdot 15$
4.	Associatividade da multiplicação $(ab)c = a(bc)$	$(4 \cdot 3) \cdot 6 = 4 \cdot (3 \cdot 6)$
5.	Distributividade $a(b + c) = ab + ac$	$5(12 + 8) = 5 \cdot 12 + 5 \cdot 8$

A propriedade comutativa da multiplicação pode ser facilmente compreendida se considerarmos, por exemplo, duas possibilidades de dispor as carteiras de uma sala de aula. Como ilustrado na Figura 1.5, não importa se formamos 4 fileiras com 7 carteiras ou 7 fileiras de 4 carteiras, o número total de carteiras será sempre 28, ou seja

$$4 \cdot 7 \ = \ 7 \cdot 4 \ = \ 28.$$

(a) 4 fileiras de 7 carteiras. (b) 7 fileiras de 4 carteiras.

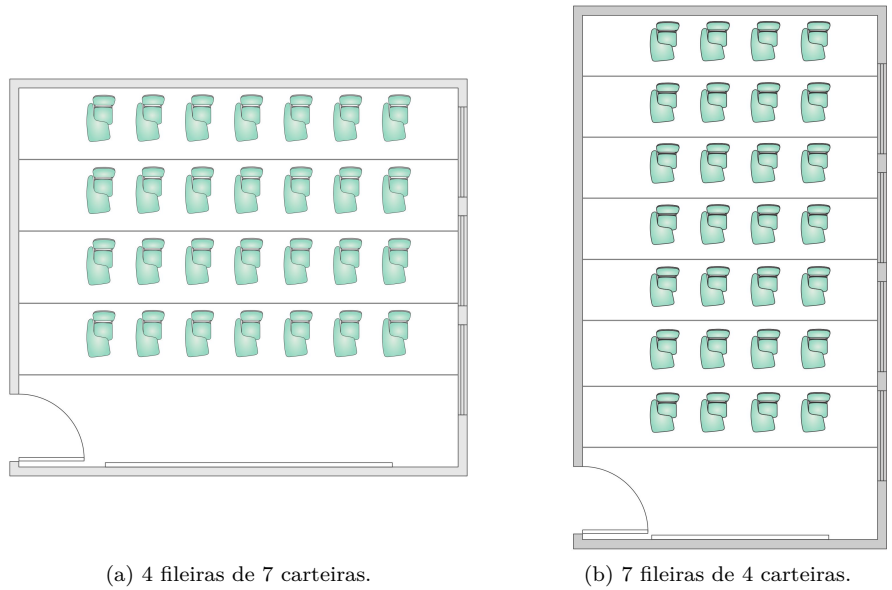



Figura 1.5: Duas formas de organizar 28 carteiras em uma sala de aula.

A Propriedade 5, formalmente conhecida como *propriedade distributiva*, é popularmente chamada de *regra do chuveirinho*, porque costuma ser apresentada na forma

$$\overset{\frown}{a \cdot (b + c)} = a \cdot b + a \cdot c.$$

O problema abaixo, que também envolve assentos, mostra uma aplicação dessa propriedade.

Problema 2. Contagem das poltronas de um auditório

Um pequeno auditório é formado por dois conjuntos de poltronas, separados por um corredor, como mostra a Figura 1.6. Determine o número de poltronas da sala.

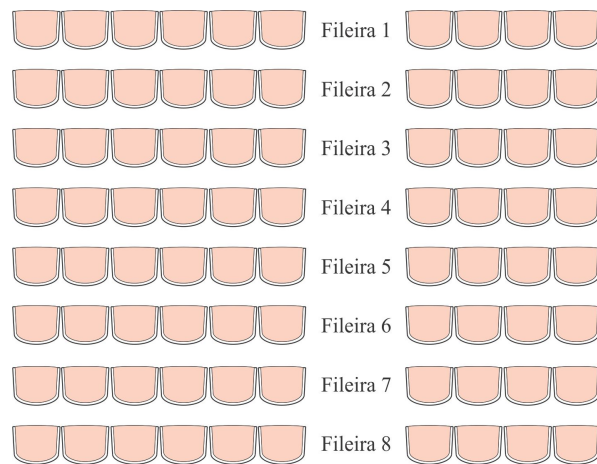



Figura 1.6: Poltronas de um auditório.

Solução.

Podemos contar as poltronas de duas formas diferentes. A primeira delas consiste

em contar as poltronas de cada grupo, e depois somá-las. Nesse caso, temos

$$\underbrace{8 \times 6}_{\text{esquerda}} + \underbrace{8 \times 4}_{\text{direita}} = 48 + 32 = 80.$$

A segunda maneira consiste em multiplicar o número de fileiras pelo número de poltronas de cada fileira, ou seja,

$$8 \times (6 + 4) = 8 \times 10 = 80.$$

Como o número de poltronas é o mesmo, não importando o método usado para contá-las, concluímos que

$$8 \times (6 + 4) = 8 \times 6 + 8 \times 4,$$

que é exatamente aquilo que diz a propriedade distributiva.

Apesar de simples, a propriedade distributiva costuma gerar algumas dúvidas, particularmente pela má interpretação do significado dos parênteses. Alguns erros comuns são apresentados na Tabela 1.2.

Tabela 1.2: Aplicações incorretas da propriedade distributiva.

Expressão	**Errado**	**Correto**
$2 \cdot (5 \cdot x)$	$2 \cdot 5 + 2 \cdot x = 10 + 2x$	$2 \cdot 5 \cdot x = 10x$
$4 + (15 + 5)$	$4 + 15 + 4 + 5 = 28$	$4 + 15 + 5 = 24$
$9 + (10 \cdot 8)$	$9 \cdot 10 + 9 \cdot 8 = 162$	$9 + 80 = 89$
$5 \cdot (3 + 2 \cdot x)$	$5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x = 15 + 50x$	$5 \cdot 3 + 5 \cdot 2x = 15 + 10x$
$3 \cdot 4 + 6$	$3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 30$	$12 + 6 = 18$

Observe que, no primeiro exemplo, há um sinal de multiplicação dentro dos parênteses, de modo que a propriedade distributiva não pode ser aplicada. De forma análoga, não podemos aplicar a propriedade distributiva no segundo e no terceiro exemplos, pois há um sinal de soma fora dos parênteses. No quarto exemplo, deve-se perceber que o produto de 5 por $2 \cdot x$ fornece, simplesmente, $5 \cdot 2 \cdot x = 10x$. Finalmente, a expressão do último exemplo não contém parênteses, de modo que a multiplicação deve ser efetuada antes da soma, como vimos à página 5, não cabendo o uso da propriedade distributiva.

Voltaremos a essas dificuldades quando tratarmos das expressões algébricas. Vejamos, agora, alguns exercícios um pouco mais complicados sobre a Propriedade 5.

Problema 3. Propriedade distributiva

Quando possível, aplique a propriedade distributiva às expressões abaixo.

a) $2(x + 8)$

b) $4(9 \cdot x)$

c) $7 + (11 + x)$

d) $6(3 + 5x - 8y)$.

e) $5[4 + 2(x + 3)]$.

Solução.

a)

$$\begin{aligned} 2(x + 8) &= 2 \cdot x + 2 \cdot 8 \\ &= 2x + 16. \end{aligned}$$

b) Nesse caso, não é possível aplicar a propriedade distributiva, já que há apenas um produto dentro dos parênteses. De fato, os parênteses podem ser suprimidos, de modo que
$$4(9 \cdot x) = 4 \cdot 9 \cdot x = 36x.$$

c) Nesse problema, também não é possível aplicar a propriedade distributiva, já que há uma soma fora dos parênteses. Mais uma vez, os parênteses podem ser suprimidos, ou seja,
$$7 + (11 + x) = 7 + 11 + x = 18 + x.$$

No problema (d), há uma soma de três termos dentro dos parênteses. Nesse caso, o valor 6 é multiplicado por todos os termos.
Já no problema (e), a propriedade distributiva é aplicada duas vezes, uma considerando os termos entre colchetes, e outra incluindo os termos entre parênteses.

d)
$$\begin{aligned} 6(3 + 5x + 8y) &= 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5x + 6 \cdot 8y \\ &= 18 + 30x + 48y. \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 5[4 + 2(x + 3)] &= 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2(x + 3) \\ &= 20 + 10(x + 3) \\ &= 20 + 10x + 30 \\ &= 50 + 10x. \end{aligned}$$

A propriedade distributiva também é muito usada na direção contrária àquela apresentada nos Problemas 2 e 3, ou seja,

> Se a, b e c forem números reais, podemos substituir $ab + ac$ por $a(b + c)$.

Quando essa substituição é feita, dizemos que o termo a é **posto em evidência**. Esquematicamente, temos

Voltaremos a por termos em evidência ao tratarmos da fatoração de expressões algébricas, na Seção 2.9.

$$a \cdot c + a \cdot b = a \cdot (b + c).$$

Exemplo 4. Pondo números em evidência

Não se esqueça de que, nesse exemplo, as letras x, y, z, s e t representam números reais.

a) $10x + 10y = 10(x + y)$

b) $3x + 3 = 3(x + 1)$

c) $5x + xy = x(5 + y)$

Observe que $15 = 5 \times 3$ e $25 = 5 \times 5$.

d) $15x + 25 = 5(3x + 5)$

Observe que $8 = 2 \times 4$.

e) $8s - 2t = 2(4s - t)$

f) $7xy - 7yz = 7y(x - z)$

Agora, tente o Exercício 4.

O número **0** (zero) é chamado **elemento neutro da soma**, pois, se a é um número real, então

Em uma soma, podemos eliminar as parcelas iguais a 0.

> $a + 0 = a$. Exemplo: $37 + 0 = 37$.

De forma análoga, o número **1** (um) é chamado **elemento neutro da multiplicação**, pois, se a é um número real, então

Em um produto, podemos eliminar os fatores iguais a 1, **mas não aqueles iguais a 0**.

$a \cdot 1 = a.$ Exemplo: $128 \cdot 1 = 128$.

Pode parecer inútil definir esses elementos neutros mas, como veremos nesse e nos próximos capítulos, eles são muito empregados na simplificação de expressões e equações.

Números negativos

Todo número real a possui um número oposto, ou simétrico, $-a$, tal que $a + (-a) = 0$. Assim,

O número -3 é o simétrico de 3, pois $3 + (-3) = 0$.
O número 3 é o simétrico de -3, pois $(-3) + 3 = 0$.

Observe que a operação de subtração equivale à soma de um número pelo simétrico do outro, ou seja,

$$a - b = a + (-b).$$

Usando essa equivalência, pode-se mostrar que a propriedade distributiva se aplica à subtração:

$$a(b - c) = ab - ac.$$

As principais propriedades dos números negativos estão resumidas no quadro a seguir.

Propriedades de números negativos

Suponha que a e b sejam números reais.

	Propriedade	Exemplo
1.	$(-1)a = -a$	$(-1)32 = -32$
2.	$-(-a) = a$	$-(-27) = 27$
3.	$(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-3)4 = 3(-4) = -(3 \cdot 4) = -12$
4.	$(-a)(-b) = ab$	$(-5)(-14) = 5 \cdot 14 = 70$
5.	$-(a + b) = -a - b$	$-(7 + 9) = -7 - 9 = -16$
6.	$-(a - b) = -a + b = b - a$	$-(10 - 3) = -10 + 3 = 3 - 10 = -7$

A primeira propriedade nos diz que, para obter o simétrico de um número, basta trocar o seu sinal, o que corresponde a multiplicá-lo por -1. A segunda propriedade indica que o simétrico do simétrico de um número a é o próprio a. Usando essas duas propriedades, bem como as propriedades da soma e da multiplicação apresentadas na subseção anterior, podemos provar facilmente as demais.

Para provar a primeira parte da propriedade 3, escrevemos

$$\begin{aligned}
(-a)b &= [(-1) \cdot a] \cdot b && \text{Propriedade 1.} \\
&= [a \cdot (-1)] \cdot b && \text{Propriedade comutativa da multiplicação.} \\
&= a \cdot [(-1) \cdot b] && \text{Propriedade associativa da multiplicação.} \\
&= a \cdot (-b) && \text{Propriedade 1.}
\end{aligned}$$

Já a propriedade 6 pode ser deduzida por meio do seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned}
-(a-b) &= (-1)\cdot(a-b) && \text{Propriedade 1.}\\
&= (-1)a-(-1)b && \text{Propriedade distributiva da multiplicação.}\\
&= (-a)-(-b) && \text{Propriedade 1.}\\
&= -a+b && \text{Propriedade 2.}\\
&= b+(-a) && \text{Propriedade comutativa da soma.}\\
&= b-a && \text{Subtração como a soma do simétrico.}
\end{aligned}$$

Exemplo 5. Trabalhando com números negativos

a) $(-1)12+30=-12+30=30-12=18$

b) $52-(-10{,}5)=52+10{,}5=62{,}5$

c) $70+(-5)6=70-30=40$

d) $70-(-5)6=70-(-30)=70+30=100$

e) $70+(-5)(-6)=70+30=100$

f) $70-(-5)(-6)=70-30=40$

g) $25+(-2{,}75)x=25-2{,}75x$

h) $56-(-3)y=56+3y$

i) $144{,}2-(-4{,}2)(-w)=144{,}2-4{,}2w$

j) $(-x)(-8)(-11)=-88x$

k) $(-3)(-2y)(7)=42y$

l) $(-5z)(3x)(4y)=-60xyz$

m) $-(18+x)=-18-x$

n) $x-(18-3x)=x-18+3x=4x-18$

Agora, tente o Exercício 2.

Tabela 1.3: Expressões incorretas com números negativos.

Errado	Correto
$3+-2$	$3+(-2)$
$10--4$	$10-(-4)$
$6\cdot-5$	$6\cdot(-5)$

Observe que, frequentemente, é necessário usar parênteses e colchetes em expressões que envolvem números negativos. A Tabela 1.3 mostra expressões nas quais, por preguiça de incluir os parênteses, um operador (+, − ou ×) foi erroneamente sucedido pelo sinal negativo, o que não é adequado na notação matemática.

Problema 6. A escola de Atenas

Sócrates, que morreu em 399 a.C., foi retratado por Rafael Sanzio em seu famoso afresco “A escola de Atenas”, concluído em 1510 d.C. Quanto tempo após a morte de Sócrates a pintura foi concluída?

Figura 1.7: *A escola de Atenas*, afresco do Museu do Vaticano.

Solução.

O ano 399 *a.C.*, quando ocorreu a morte de Sócrates, é equivalente ao ano −398 da era comum (pois o ano 1 a.C. foi sucedido pelo ano 1 d.C., sem que tenha havido o ano 0 d.C.). Como o afresco foi concluído em 1510, os visitantes do Vaticano puderam ver essa magnífica obra decorridos

$$1510 - (-398) = 1510 + 398 = 1908 \text{ anos}$$

da morte do famoso filósofo ateniense.

Agora, tente o Exercício 8.

Problema 7. Propriedade distributiva com números negativos

Aplique a propriedade distributiva às expressões abaixo.

a) $7(6 - 5w - 2t)$.

b) $-3[(4 - 2x) - 2(3x - 1)]$.

Solução.

a)

$$\begin{aligned} 7(6 - 5w - 2t) &= 7 \cdot 6 - 7 \cdot 5w - 7 \cdot 2t \\ &= 42 - 35w - 14t. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -3[(4 - 2x) - 2(3x - 1)] &= -3 \cdot (4 - 2x) + (-3) \cdot (-2)(3x - 1) \\ &= -3(4 - 2x) + 6(3x - 1) \\ &= -3 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2x) + 6 \cdot 3x - 6 \cdot 1 \\ &= -12 + 6x + 18x - 6 \\ &= 24x - 18. \end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 3.

Exercícios 1.2

1. Calcule os pares de expressões abaixo, observando o papel dos parênteses.

a) $10+5-12+3-7+23-6$ e $10+5-(12+3)-(7+23)-6$
b) $10+6\times12-8\div2$ e $(10+6)\times(12-8)\div2$
c) $38-6\times4-28\div2$ e $[(38-6)\times4-28]\div2$
d) $2+10\times2+10\times2+10\times2+10$ e $2+10\times\{2+10\times[2+10\times(2+10)]\}$

2. Calcule as expressões abaixo.

a) $-(-3{,}5)$
b) $-(+4)$
c) $2+(-5{,}4)$
d) $2-(-5{,}4)$
e) $(-32{,}5)+(-9{,}5)$
f) $-32{,}5-9{,}5$
g) $(-15{,}2)+(+5{,}6)$
h) $(-15{,}2)+5{,}6$
i) $4\cdot(-25)\cdot13$
j) $13\cdot(-25)\cdot4$
k) $-10\cdot(-18)\cdot(-5)$
l) $(-7x)\cdot(-4y)\cdot(3)$
m) $(-12)\cdot(-6)$
n) $-(12\cdot6)$
o) $-[12\cdot(-6)]$
p) $-15\cdot(-6)+15\cdot(-6)$
q) $-15\cdot(-6)-(-10)\cdot(-3)$
r) $3-(5+x)$
s) $24-(8-2y)$
t) $2x-(6+x)$
u) $y-(8-2y)$

3. Aplique a propriedade distributiva e simplifique as expressões sempre que possível.

a) $5\cdot(6+x)$.
b) $7\cdot(5-x)$.
c) $-3(x+8)$.
d) $-4(10-2x)$.
e) $(3x-4)\cdot2$.
f) $-2(3x-4)$.
g) $15(2+5x-6y)$.
h) $-6(x-2y+7z-9)$.
i) $3(x-6)+2(4x-1)$.
j) $4(6-5x)-2(2x-12)$.
k) $(3-5x)\cdot(2-4y)$.
l) $2[x-2-4(5-2x)]$.
m) $-5[4-2(2-3x)]$.
n) $-4[(2-3x)+3(x+1)]$.

4. Aplicando a propriedade distributiva, ponha algum termo em evidência.

a) $5x+5w$
b) $12x+12$
c) $3x-3y+3z$
d) $xy-yz$
e) $2xw-2xv$
f) $xy+2sx-5xv$
g) $2+2x$
h) $30+5x$
i) $35-7x$
j) $-10-2x$

5. Calcule as expressões abaixo.

a) $2+(x+3)$
b) $6-(5+x)$
c) $3\cdot(8\cdot y)$
d) $7\cdot(-2\cdot x)$
e) $4+(3\cdot x)$
f) $8-(y\cdot5)$
g) $9\cdot x\cdot(3\cdot y)$
h) $(3x)\cdot(-6y)$
i) $(-2x)\cdot(8y)$
j) $(-5x)\cdot(-2y)$

6. Você possui R$ 300,00 em sua conta bancária, que dispõe do sistema de cheque especial. Se der um cheque no valor de R$ 460,00, qual será seu saldo bancário?

7. Um termômetro marca 8°C. Se a temperatura baixar 12°C, quanto o termômetro irá marcar?

8. A câmara funerária de Tutancâmon foi aberta em 1923 d.C. Sabendo que o famoso rei egípcio morreu em 1324 a.C., quanto tempo sua múmia permaneceu preservada?

9. Após decolar de uma cidade na qual a temperatura era de 20,5°C, um avião passou a viajar a 20.000 pés de altura, a uma temperatura de −32,2°C. Qual foi a variação de temperatura nesse caso? Forneça um número positivo, se tiver havido um aumento, ou um número negativo, se tiver havido uma redução da temperatura.

10. Antes de sua última partida, na qual perdeu por 7 a 0, o Chopotó Futebol Clube tinha um saldo de 2 gols no campeonato da terceira divisão. Qual é o saldo atual do glorioso time?

Respostas dos Exercícios 1.2

1. a) 16 e −36. b) 78 e 32. c) 0 e 50. d) 72 e 12222.

2. a) 3,5. b) −4. c) −3,4. d) 7,4. e) −42. f) −42. g) −9,6. h) −9,6. i) −1300. j) −1300. k) −900. l) $84xy$. m) 72. n) −72. o) 72. p) 0. q) 60. r) $-2-x$. s) $16+2y$. t) $x-6$. u) $3y-8$.

3. a) $30+5x$. b) $35-7x$. c) $-3x-24$. d) $8x-40$. e) $6x-8$. f) $8-6x$. g) $30+75x-90y$. h) $-6x+12y-42z+54$. i) $11x-20$. j) $48-24x$. k) $20xy-10x-12y+6$. l) $18x-44$. m) $-30x$. n) −20.

4. a) $5(x+w)$ b) $12(x+1)$ c) $3(x-y+z)$ d) $y(x-z)$ e) $2x(w-v)$ f) $x(y+2s-5v)$ g) $2(1+x)$ h) $5(6+x)$ i) $7(5-x)$ j) $-2(5+x)$

5. a) $5+x$ b) $1-x$ c) $24y$ d) $-14x$ e) $4+3x$ f) $8-5y$ g) $27xy$ h) $-18xy$ i) $-16xy$ j) $10xy$

6. −160 reais.

7. −4°C.

8. 3246 anos. Note que 1324 a.C. corresponde ao ano −1323 da era comum, em virtude do fato de o ano 1 a.C. ter sido sucedido por 1.d.C.).

9. −52,7°C.

10. −5 gols.

1.3 Divisão e frações

A divisão é a operação aritmética inversa da multiplicação. Ela representa a repartição de uma certa quantidade em porções iguais.

Exemplo 1. Times de basquete

Em uma aula de educação física, o professor precisar dividir uma turma que tem 30 alunos em times de basquete, cada qual com 5 alunos. O número de equipes a serem formadas será igual a

$$30 \div 5 = 6.$$

Observe que, multiplicando o número de jogadores em cada time pelo número de equipes obtemos $5 \times 6 = 30$, que é o número de alunos da turma.

Exemplo 2. Água para todos

Durante um período de seca, o prefeito de uma pequena cidade contratou um caminhão pipa para distribuir água potável aos 1.250 munícipes. Se o caminhão pipa comporta 16.000 litros e todos os habitantes receberão o mesmo volume, caberá a cada habitante

$$16.000 \div 1.250 = 12{,}8 \text{ litros.}$$

Supondo que a e b sejam números inteiros, com $b \neq 0$, podemos representar a divisão de a em b partes iguais através da **fração** $\frac{a}{b}$, às vezes escrita como a/b. São exemplos de frações:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{15}{7}, \quad \frac{1}{1000}, \quad -\frac{2}{4}, \quad \frac{36}{36}.$$

Na fração $\frac{a}{b}$, o termo a, que está acima do traço, é chamado **numerador**, enquanto o termo b, abaixo do traço, é chamado **denominador**.

Para efetuar divisões ou trabalhar com frações que envolvem números negativos, usamos propriedades similares àquelas apresentadas para a multiplicação.

Divisão envolvendo números negativos

Suponha que a e b sejam números reais, e que $b \neq 0$.

	Propriedade	**Exemplo**
1.	$\frac{(-a)}{b} = \frac{a}{(-b)} = -\frac{a}{b}$	$\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{(-2)} = -\frac{7}{2}$
2.	$\frac{(-a)}{(-b)} = \frac{a}{b}$	$\frac{(-3)}{(-16)} = \frac{3}{16}$

■ A divisão como um produto

Se dividirmos o número 1 em n parcelas iguais, cada parcela valerá $1/n$ do total, de modo que

$$1 = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{n \text{ parcelas}}.$$

Dessa forma,

$$1 = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n}.$$

Você se lembra que, ao dividirmos um número por ele mesmo, obtemos sempre o valor 1?

Embora a soma acima sugira que n deva ser um número natural, esse resultado vale para qualquer n real, desde que $n \neq 0$. O número $1/n$ é chamado **inverso** de n.

Se dividirmos o número 1 em n parcelas iguais e pegarmos a dessas parcelas, teremos a fração a/n, ou seja,

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{a \text{ parcelas}} = a\cdot\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}.$$

Observe que, ao efetuarmos o produto de a por $1/n$, apenas o numerador da fração é multiplicado por a.

Assim, a divisão de um número a por outro n corresponde à multiplicação de a pelo inverso de n. Novamente, a e n podem ser quaisquer números reais, desde que $n \neq 0$.

Exemplo 3. Partes de um terreno

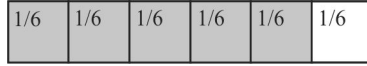
Um terreno retangular muito comprido foi dividido em 6 partes iguais, como mostra a Figura 1.8. Tomando cinco dessas partes, obtemos

1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Figura 1.8: Cinco sextos de um terreno.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}.$$

Soma e subtração de frações com denominadores iguais

Um relógio de ponteiros marca exatamente meio-dia, como mostra a Figura 1.9a. A cada hora transcorrida, o ponteiro das horas gira exatamente 1/12 de volta, de modo que, após 12 horas (ou seja, à meia-noite), o ponteiro das horas volta a apontar o número 12.

Entre o meio-dia e as 4 horas da tarde, o ponteiro das horas do relógio gira 4/12 de volta, como mostra a Figura 1.9b. Transcorridas mais cinco horas, o ponteiro das horas do relógio percorre mais 5/12 de volta, atingindo a marca de 9 horas, que corresponde a 9/12 da volta completa, como mostra a Figura 1.9c.

(a) Meio-dia. (b) 4 horas. (c) 9 horas.

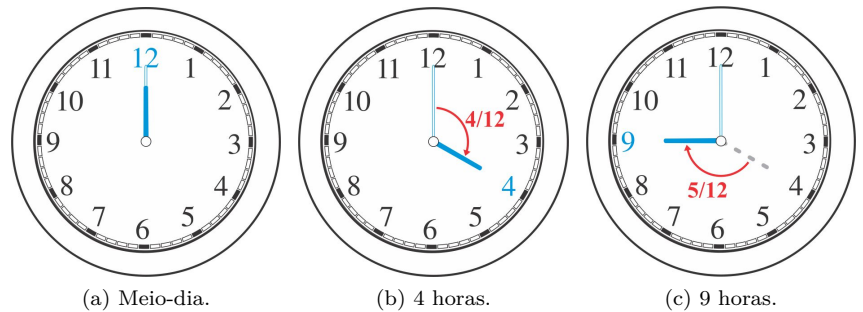



Figura 1.9: Um relógio marcando várias horas do dia.

Observe que

$$\frac{4}{12}+\frac{5}{12} = \frac{4+5}{12} = \frac{9}{12}.$$

Ou seja, para somar duas frações com denominador 12, mantemos o denominador e somamos os numeradores. Vamos mostrar, agora, que esse resultado vale para quaisquer frações com o mesmo denominador.

Também é possível usar a propriedade distributiva da multiplicação para mostrar que $a/n+b/n = (a+b)/n$. Observe:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n} = a\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+b\cdot\left(\frac{1}{n}\right) = (a+b)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a+b}{n}.$$

Somando a/n com b/n, obtemos

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{a \text{ parcelas}}+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{b \text{ parcelas}} = (a+b)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a+b}{n}.$$

O problema abaixo ilustra o que acontece quando precisamos calcular a diferença entre duas frações com um mesmo denominador.

Problema 4. Frações de um bolo

Uma confeitaria dividiu um bolo de chocolate em 8 fatias iguais. Em um determinado momento do dia, restavam 5/8 do bolo (ou seja, 5 fatias), como mostra a Figura 1.10a. Até o final do dia, foram servidos mais 3/8 do bolo (ou seja, outras três fatias), como ilustrado na Figura 1.10b. Que fração do bolo sobrou ao final do dia?

(a) Fração disponível. (b) Fração consumida. (c) Fração restante.

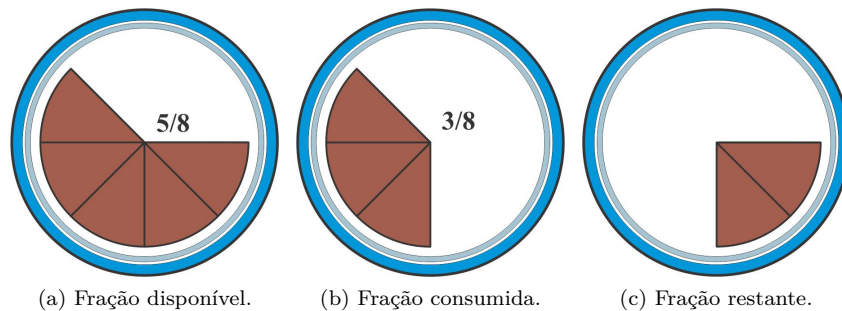



Figura 1.10: Frações de um bolo dividido em 8 pedaços iguais.

Solução.

Para obtermos a fração restante, devemos efetuar a subtração

$$\begin{aligned}\frac{5}{8} - \frac{3}{8} &= 5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \\ &= (5-3) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{2}{8}.\end{aligned}$$

Assim, sobraram 2/8 do bolo, como apresentado na Figura 1.10c.

Como observamos, a estratégia usada para o cálculo da diferença entre duas frações é similar àquela empregada na soma.

Soma e diferença de frações com o mesmo denominador

Sejam a, b e n números reais tais que $n \neq 0$. Nessa caso,

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

Exemplo 5. Soma e subtração de frações com denominadores comuns

a) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{5}{9} + \frac{13}{9} = \frac{18}{9} = 2$

c) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

d) $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{8}{15} = \frac{14}{15}$

e) $\frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

f) $\frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$

g) $\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{0}{5} = 0$

h) $\frac{12}{17} - \frac{46}{17} = -\frac{34}{17} = -2$

■ Multiplicação de frações

Passemos, agora, ao cálculo de produtos que envolvem frações. Comecemos com um problema simples.

Problema 6. Cobras peçonhentas

Em um grupo de 108 cobras, $\frac{3}{4}$ são peçonhentas. Quantas cobras venenosas há no grupo?

Solução.

O número de cobras peçonhentas – ou venenosas – é dado pelo produto

$$108 \cdot \frac{3}{4},$$

que pode ser calculado em duas etapas. Inicialmente, dividimos 108 em quatro grupos, cada qual contendo $\frac{108}{4} = 27$ cobras. Em seguida, tomamos 3 desses grupos, o que corresponde a $27 \cdot 3 = 81$. Assim, há 81 cobras venenosas.

Também podemos efetuar as operações em ordem inversa, calculando primeiramente o produto $108 \cdot 3 = 324$, e depois a divisão $324/4 = 81$.

Agora, tente o Exercício 2.

Agora, vamos usar a definição de produto para multiplicar a fração 3/26 por 5.

$$5 \cdot \left(\frac{3}{26}\right) = \frac{3}{26} + \frac{3}{26} + \frac{3}{26} + \frac{3}{26} + \frac{3}{26} = \frac{3+3+3+3+3}{26} = \frac{3 \cdot 5}{26} = \frac{15}{26}.$$

Essa ideia pode ser generalizada para qualquer fração a/b e qualquer número c natural:

$$c \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b} + \frac{a}{b}}_{c \text{ parcelas}} = \frac{\overbrace{a + a + a + \cdots + a + a}^{c \text{ parcelas}}}{b} = \frac{c \cdot a}{b}.$$

Lembrete

Não se esqueça de que, se c é um número natural, então

$$c \cdot d = \underbrace{d + d + d + \cdots + d + d}_{c \text{ parcelas}}.$$

De fato, a regra acima pode ser aplicada mesmo quando c é um número real, de modo que, para calcular o produto de a/b por c, usamos a fórmula

$$c \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c \cdot a}{b}.$$

Problema 7. Exploradores e exploradoras

Um grupo de pesquisadores partiu em uma excursão exploratória. Sabe-se que os pesquisadores homens, que são 27, formam 3/7 do grupo. Quantos exploradores partiram na excursão e qual é a fração do grupo composta por mulheres?

Solução.

(a) Os 27 homens.

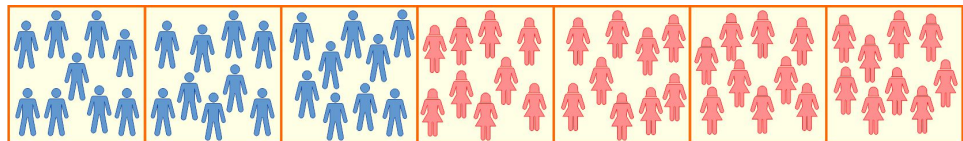
(b) Divisão do grupo em sete parcelas, cada qual com 9 pessoas.

(c) O grupo de 63 exploradores, dos quais 3/7 são homens e 4/7 são mulheres.

Figura 1.11: Figuras do Problema 7.

A Figura 1.11a ilustra os 27 homens que formam o grupo de pesquisadores. Como sabemos que os homens correspondem a 3/7 do grupo, podemos dividi-los em 3 grupos, cada qual com

$$27/3 = 9 \text{ pessoas.}$$

Assim, cada grupo de 9 pessoas corresponde a 1/7 do número total de exploradores, como mostrado na Figura 1.11b. Portanto, o grupo como um todo possui

$$9 \times 7 = 63 \text{ pessoas.}$$

Para descobrir a que fração do grupo as mulheres correspondem, devemos lembrar que grupo completo equivale a 1, ou à fração 7/7, de modo que as mulheres são

$$1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

dos pesquisadores.

Agora, tente o Exercício 5.

Investiguemos, agora, como calcular o produto de duas frações com numerador igual a 1.

Problema 8. Bolinhas de gude

Minha coleção de bolinhas de gude é composta por 120 bolinhas, das quais 1/3 são verdes. Se 1/5 das bolinhas verdes têm cor clara, quantas bolinhas verde-claras eu possuo? Que fração da minha coleção é verde-clara?

Solução.

O número de bolinhas verdes da minha coleção é dado por

$$120 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{120}{3} = 40.$$

Das 40 bolinhas verdes, as claras correspondem a

$$40 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{40 \cdot 1}{5} = \frac{40}{5} = 8 \text{ bolinhas.}$$

Observe que obtivemos o valor 8 calculando a seguinte expressão:

$$\underbrace{\underbrace{120 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}_{\text{bol. verdes}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)}_{\text{bolinhas verde-claras}}$$

Assim, do total de bolinhas, $(1/3) \cdot (1/5)$ são verde-claras. Para descobrir quanto vele esse produto, vamos analisar a Figura 1.12.

(a) 1/3 das bolinhas são verdes.

(b) 1/5 das bolinhas verdes são claras.

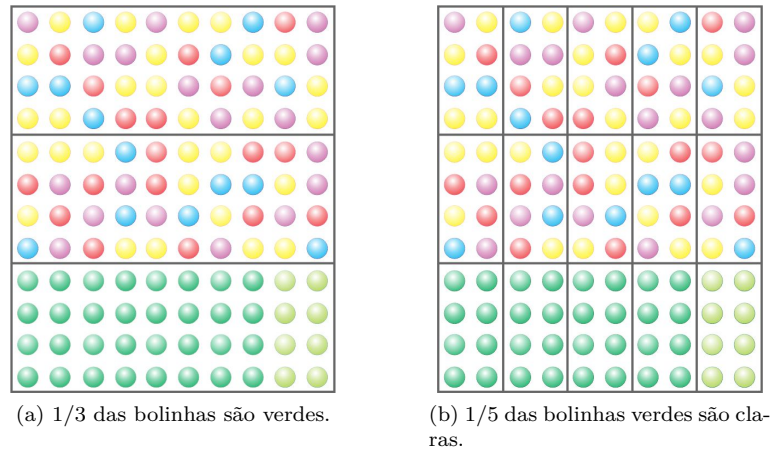



Figura 1.12: Minha coleção de bolinhas de gude.

Na Figura 1.12a, dividimos o conjunto de bolinhas em três partes, das quais uma era composta apenas por bolas verdes. Já na Figura 1.12b, cada terça parte do conjunto foi dividida em 5 grupos. Como se observa, o conjunto total das bolinhas foi dividido em 15 grupos, dos quais apenas um corresponde às bolinhas verde-claras. Logo, as 8 bolinhas correspondem a 1/15 do total.

No problema acima, para obter a fração correspondente às bolinhas verde-claras, dividimos a coleção por $3 \cdot 5$, e ou seja,

$$\frac{1}{15} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3 \cdot 5}.$$

De uma forma geral, podemos dizer que, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}.$$

A partir desse resultado, é fácil estabelecer uma regra para o cálculo do produto de duas frações.

Produto de frações

Dadas as frações a/b e c/d, em que $b \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

A demonstração desse resultado é trivial:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)\cdot c\cdot\left(\frac{1}{d}\right) && \text{Frações na forma de produto.}\\
&= (a\cdot c)\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right) && \text{Propriedade comutativa da multiplicação.}\\
&= (a\cdot c)\cdot\left(\frac{1}{b\cdot d}\right) && \text{Produto de frações com numerador 1.}\\
&= \frac{a\cdot c}{b\cdot d}. && \text{Volta à forma fracionária.}
\end{aligned}$$

Exemplo 9. Produto de frações

a) $\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{9\cdot7}=\frac{10}{63}$

b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot5}{4\cdot4}=\frac{15}{16}$

c) $\frac{11}{(-8)}\cdot\frac{21}{5}=\frac{11\cdot21}{(-8)\cdot5}=\frac{231}{-40}=-\frac{231}{40}$

d) $\frac{(-2x)}{7}\cdot\frac{4}{(-3)}=\frac{(-2x)\cdot4}{7\cdot(-3)}=\frac{-8x}{-21}=\frac{8x}{21}$

Agora, tente o Exercício 12.

Divisão de frações

Problema 10. Divisão de uma garrafa de refrigerante

Uma determinada garrafa PET contém 2 litros de refrigerante. Se um copo comporta $\frac{1}{5}$ de litro, quantos copos podemos encher com o refrigerante da garrafa?

Solução.

Para descobrir quantos copos de refrigerante a garrafa contém, devemos dividir o conteúdo da garrafa pelo conteúdo do copo, ou seja, calcular

$$\frac{2}{\frac{1}{5}}.$$

Como não sabemos como efetuar essa conta diretamente, vamos converter a expressão em uma fração equivalente, multiplicando-a por $\frac{5}{5}$ (ou seja, multiplicando-a por 1):

$$\frac{2}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{\frac{1}{5}}\cdot\frac{5}{5}=\frac{2\cdot5}{\frac{1}{5}\cdot5}=\frac{10}{\frac{5}{5}}=\frac{10}{1}=10.$$

Assim, a garrafa de 2 litros rende 10 copos.

Observe que a escolha do número 5 não foi casual. Como 5 é o inverso de $\frac{1}{5}$, ao multiplicarmos $\frac{1}{5}$ por 5, o denominador é convertido no número 1, de modo que podemos desprezá-lo.

Resolvendo o problema de outra forma, podemos considerar que, como cada copo comporta $\frac{1}{5}$ litros, cada litro corresponde a 5 copos. Portanto, 2 litros correspondem a $2\cdot5=10$ copos.

Problema 11. Divisão das ações de uma companhia

Um dos sócios de uma indústria possuía $\frac{2}{3}$ das ações da companhia. Após sua morte, as ações foram distribuídas igualmente por seus 4 filhos. Que fração das ações da empresa coube a cada filho?

Solução.

A fração herdada por cada um dos filhos do empresário é dada por

$$\frac{\frac{2}{3}}{4}.$$

Para efetuar a divisão, eliminamos o denominador multiplicando a fração por $\frac{1/4}{1/4}$:

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{4} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}}{\frac{4\cdot 1}{4}} = \frac{\frac{2}{12}}{1} = \frac{2}{12}.$$

Logo, cada filho recebeu 2/12 das ações. Observe que, mais uma vez, a eliminação do denominador foi obtida multiplicando-o pelo seu inverso.

Problema 12. Divisão de frações

Na cidade de Quiproquó dos Guaianases, $\frac{8}{9}$ da população adulta está empregada. Além disso, $\frac{2}{5}$ de toda a população adulta trabalha na indústria. Que fração da população empregada trabalha na indústria?

Solução.

Para resolver o problema, devemos dividir a população que trabalha na indústria pela população total empregada, ou seja, devemos calcular

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{9}}.$$

Também nesse problema, eliminamos o termo $\frac{8}{9}$ multiplicando o numerador e o denominador pelo inverso dessa fração.

Mais uma vez, para efetuar a divisão, devemos eliminar o denominador. Para tanto, multiplicamos a fração por $\frac{9/8}{9/8}$:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{9}} \cdot \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{2\cdot 9}{5\cdot 8}}{\frac{8\cdot 9}{9\cdot 8}} = \frac{\frac{18}{40}}{\frac{1}{1}} = \frac{18}{40}.$$

Logo, $\frac{18}{40}$ da população adulta empregada trabalha na indústria.

Dos problemas resolvidos nessa subseção, podemos concluir que a melhor forma de dividir frações consiste em multiplicar o numerador e o denominador pelo inverso do denominador, como mostrado abaixo.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} = \frac{\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}{\frac{c\cdot d}{d\cdot c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{\frac{1}{1}} = \frac{ad}{bc}.$$

Em outras palavras, o quociente de uma fração por outra fração é igual ao produto da fração do numerador pelo inverso da fração do denominador.

Divisão de frações

Se a, b, c e d são números inteiros, com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, então

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Exemplo 13. Quocientes com frações

a) $\frac{3}{\frac{5}{7}} = 3 \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5}.$

b) $-\frac{6}{\frac{11}{5}} = -6 \cdot \frac{5}{11} = -\frac{6 \cdot 5}{11} = -\frac{30}{11}.$

Note que $4 = \frac{4}{1}$, de modo que seu inverso é $\frac{1}{4}$.

c) $\dfrac{\frac{7}{9}}{4} = \dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{9 \cdot 4} = \dfrac{7}{36}.$

Note que o inverso de 5 (ou $\frac{5}{1}$) é $\frac{1}{5}$.

d) $-\dfrac{\frac{4}{3}}{5} = -\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{5} = -\dfrac{4}{3 \cdot 5} = -\dfrac{4}{15}.$

e) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{1} = \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2}.$

f) $\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{11}{7}} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{7}{11} = \dfrac{5 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \dfrac{35}{22}.$

g) $-\dfrac{\frac{10}{7}}{\frac{16}{3}} = -\dfrac{10}{7} \cdot \dfrac{3}{16} = -\dfrac{10 \cdot 3}{7 \cdot 16} = -\dfrac{30}{112}.$

Agora, tente o Exercício 14.

■ Frações equivalentes

Duas frações são ditas **equivalentes** se representam o mesmo número real. As frações 2/5 e 4/10, por exemplo, representam o mesmo número, que é escrito 0,4 na forma decimal. Para entender porque essas frações são equivalentes, basta lembrar que o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, de modo que $n \cdot 1 = n$. Observe:

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, obtemos uma fração equivalente, como mostram os exemplos abaixo:

Note que $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 100}{2 \cdot 2 \cdot 100} = \frac{800}{2000}$.

$$\frac{2}{5} \overset{\times 2}{=} \frac{4}{10} \overset{\times 2}{=} \frac{8}{20} \overset{\times 100}{=} \frac{800}{2000}$$

$$-\frac{3}{5} \overset{\times 3}{=} -\frac{9}{15} \overset{\times 2}{=} -\frac{18}{30} \overset{\times 25}{=} -\frac{450}{750}$$

Exemplo 14. Divisão de uma pizza

(a) 1/2 da pizza. (b) 2/4 da pizza. (c) 3/6 da pizza.

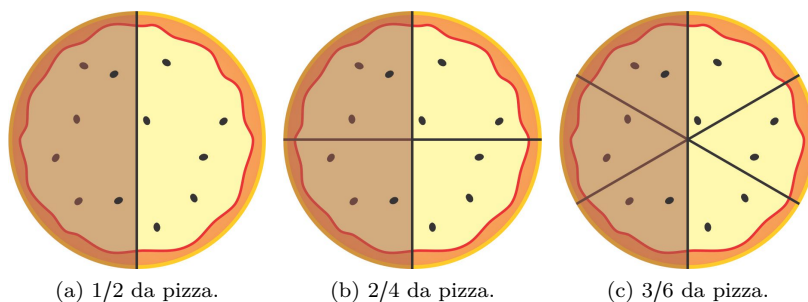



Figura 1.13: Frações equivalentes de uma pizza.

Se você tiver dividido uma pizza em dois pedaços e comido um deles, ou se a tiver dividido em quatro partes iguais e comido duas dessas partes, ou ainda se a tiver repartido em 6 fatias iguais e comido três fatias, não importa: você terá comido meia pizza, como mostra a Figura 1.13. Assim, temos a seguinte equivalência entre frações:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}.$$

Agora, tente o Exercício 8.

■ Soma e subtração de frações com denominadores diferentes

Suponha que uma fazenda retangular tenha parte de sua área usada na agricultura, e que outra parte seja reservada à preservação ambiental, como mostra a Figura 1.14. Qual será a fração da área total destinada a essas duas finalidades? E qual será a fração não ocupada da fazenda?

Figura 1.14: Divisão de uma fazenda retangular.

Para responder a essas perguntas, precisamos, em primeiro lugar, determinar as frações do terreno destinadas a cada tipo de uso.

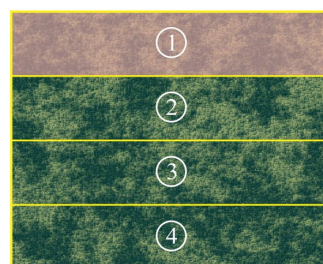
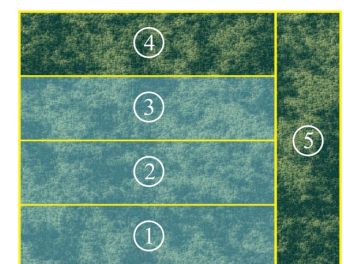
Dividindo a fazenda em 4 partes iguais, observamos que a reserva ambiental ocupa 1/4 da área total. Por outro lado, dividindo a fazenda em 5 retângulos de mesmas dimensões, percebemos que a agricultura consome 3/5 da área. A Figura 1.15 ilustra essas frações do terreno.

(a) Fração destinada à preservação ambiental.

(b) Fração destinada à agricultura.

Figura 1.15: Frações da fazenda com alguma destinação.

Assim, para determinar a fração ocupada da área da fazenda, precisamos calcular a soma

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5},$$

que envolve frações com denominadores diferentes.

A dificuldade em efetuar essa soma está relacionada ao fato de trabalharmos com porções diferentes de terra: para definir a região destinada à preservação ambiental, a fazenda foi dividida em quatro pedaços, enquanto a área cultivada foi obtida dividindo-se a terra em cinco partes.

O cálculo da fração ocupada do terreno seria enormemente facilitado se as duas regiões de interesse fossem divididas em módulos que possuíssem a mesma área, pois, nesse caso, as regiões seriam descritas por frações que têm o mesmo denominador.

Observando a Figura 1.16, notamos que isso pode ser obtido dividindo-se cada parcela correspondente a 1/4 do terreno em 5 partes iguais ou, de forma equivalente, dividindo-se cada fração correspondente a 1/5 do terreno em 4 partes de mesma área.

A reserva ambiental ocupa 5 dos 20 quadradinhos nos quais a fazenda da Figura 1.16 foi dividida. Assim, a fração reservada à proteção ambiental corresponde a 5/20 da área total. Por sua vez, a agricultura ocupa 12 dos 20 quadradinhos, ou 12/20 da área total.

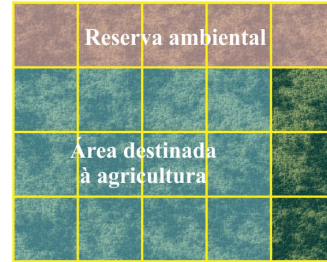



Figura 1.16: A fazenda dividida em porções correspondentes a 1/20 da área total.

Nesse caso, a fazenda é dividida em $4 \times 5 = 20$ partes iguais, das quais 5 correspondem à reserva ambiental, e 12 são usadas para cultivo. Repare que o valor obtido, 20, é o produto dos denominadores das frações que queremos somar.

Agora que sabemos que a reserva ambiental corresponde a 5/20 e a área cultivável a 12/20 da área total da fazenda, podemos efetuar a soma

$$\frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}.$$

Desse modo, a porção ocupada da fazenda corresponde a 17/20 da área total. De forma semelhante, calculamos a porção não ocupada subtraindo de 20/20 (que corresponde à área total da fazenda) a fração já ocupada:

$$\frac{20}{20} - \frac{17}{20} = \frac{20-17}{20} = \frac{3}{20}.$$

Ou seja, apenas 3/20 da fazenda não foram ocupados. Esse exemplo ilustra a ideia de que

> A soma ou a diferença de duas frações com denominadores diferentes a e b pode ser facilmente efetuada convertendo-as em frações equivalentes com o denominador comum $a \cdot b$.

E como converter, na prática, 3/5 em uma fração equivalente na qual o denominador é 20? Nada mais simples! Lembrando que 20 é o produto do denominador 5 pelo número 4, podemos fazer

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 1$$ O número 1 é o elemento neutro da multiplicação. Logo, $a \cdot 1 = a$.

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{4}$$ Como o denominador da outra fração é 4, substituímos 1 por 4/4.

$$= \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4}$$ Cálculo do produto das frações.

$$= \frac{12}{20}$$ Fração equivalente, com denominador igual a 20.

Um procedimento análogo pode ser usado para converter 1/4 em uma fração cujo denominador é 20:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}.$$

Assim, resumimos a estratégia usada na obtenção da área ocupada da fazenda escrevendo

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5} \;=\; \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{4} \;=\; \frac{5}{20}+\frac{12}{20} \;=\; \frac{17}{20}.$$

Não é difícil perceber que essa ideia pode ser estendida para a soma de quaisquer frações, pois

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}\\ &= \frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}\\ &= \frac{ad+cb}{bd}.\end{aligned}$$

O quadro abaixo fornece um roteiro para a soma e a subtração de frações.

Soma e diferença de frações com denominadores diferentes

Sejam a, b, c e d números tais que $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Nessa caso,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}.$$

Exemplo 15. Soma e subtração de frações com denominadores diferentes

a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{7}=\frac{4\cdot7+3\cdot5}{5\cdot7}=\frac{43}{35}.$

b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{9}=\frac{3\cdot9+5\cdot2}{2\cdot9}=\frac{37}{18}.$

c) $\frac{4}{5}-\frac{3}{7}=\frac{4\cdot7-3\cdot5}{5\cdot7}=\frac{13}{35}.$

d) $\frac{3}{2}-\frac{5}{9}=\frac{3\cdot9-5\cdot2}{2\cdot9}=\frac{17}{18}.$

Agora, tente o Exercício 11.

■ Resumo

O quadro abaixo resume as principais propriedades das frações.

Propriedades das frações

Suponha que a, b, c e d sejam números reais, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

	Propriedade	Exemplo
1.	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$
2.	$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$	$\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$
3.	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$	$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{2\cdot7+5\cdot3}{3\cdot7}=\frac{29}{21}$
4.	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}$	$\frac{5}{4}-\frac{3}{8}=\frac{5\cdot8-3\cdot4}{4\cdot8}=\frac{28}{32}$
5.	$\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$	$\frac{7\cdot4}{8\cdot4}=\frac{7}{8}$

> **Propriedades das frações (cont.)**
>
> **6.** $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ $\qquad \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{15}$
>
> **7.** $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc} \quad (c \neq 0)$ $\qquad \dfrac{3}{5} \div \dfrac{8}{11} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{11}{8} = \dfrac{33}{40}$

Exercícios 1.3

1. Escreva por extenso as frações abaixo.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{7}{20}$ d) $\frac{9}{13}$ e) $\frac{5}{100}$ f) $\frac{125}{1000}$ g) $\frac{1000}{1001}$

2. Calcule

a) $\frac{1}{8}$ de 92. b) $\frac{4}{5}$ de 65. c) $\frac{9}{7}$ de 63.

3. Um colecionador possui 320 selos, dos quais 4/5 são brasileiros. Quantos selos brasileiros há em sua coleção?

4. Um aquário possui 12 peixes, dos quais 8 são amarelos e 4 são azuis. Indique que fração do total o número de peixes azuis representa. Faça o mesmo com o grupo de peixes amarelos.

5. Dos alunos de um curso, 104 são destros. Se 1/9 dos alunos são canhotos, quantos estudantes tem o curso?

6. Se 5/6 de um número equivalem a 350, a que valor correspondem 4/7 desse número?

7. Converta os números abaixo em frações.

a) 3 e $\frac{4}{7}$ b) 5 e $\frac{3}{4}$ c) 2 e $\frac{9}{12}$

8. Escreva duas frações equivalentes a cada fração abaixo.

a) 1/3. b) 2/5. c) −5/4.

9. Escreva os números do Exercício 8 na forma decimal.

10. Complete as tabelas abaixo, escrevendo $1/x$ na forma decimal. Em cada caso, diga o que acontece com $1/x$ à medida que x cresce.

x	1	2	100	1000
1/x				

x	1	0,5	0,1	0,01
1/x				

11. Calcule as expressões abaixo.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ b) $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{4}+1$ d) $2-\frac{2}{3}$ e) $\frac{7}{3}-\frac{5}{7}$ f) $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}$ g) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ h) $\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$ i) $-\frac{1}{6}+\frac{3}{5}$ j) $-\frac{5}{7}-\frac{5}{2}$ k) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ l) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

12. Efetue os produtos.

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$ b) $\frac{7}{4}\cdot\frac{5}{6}$ c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$ d) $4\cdot\frac{7}{19}$ e) $\frac{8}{7}\cdot 5$ f) $\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$ g) $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{9}{5}$ h) $\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)$ i) $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$

13. Calcule as expressões. Dica: não use a propriedade distributiva.

a) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(3+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)$ d) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

14. Calcule as expressões abaixo.

a) $\frac{\frac{2}{3}}{5}$ b) $\frac{\frac{9}{4}}{4}$ c) $\frac{3}{\frac{2}{7}}$ d) $\frac{8}{\frac{3}{4}}$ e) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{6}}$ f) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}$ g) $\frac{\frac{7}{8}}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$ h) $\frac{\left(-\frac{5}{9}\right)}{\frac{11}{2}}$ i) $\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{1}{6}\right)}$ j) $-\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{8}}$ k) $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{9}}$ l) $\frac{2}{\frac{2}{3}}-\frac{\frac{2}{3}}{2}$ m) $\frac{1-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}$

15. Aplique a propriedade distributiva às expressões.

a) $\frac{3}{4}\left(x+\frac{5}{2}\right)$ b) $-\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{3}\right)$ c) $\frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}-2x\right)$ d) $\left(\frac{8x}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{2}$ e) $\frac{x}{3}\left(2y+\frac{1}{6}\right)$ f) $\frac{4}{5}\left(3x+y+\frac{2}{3}\right)$

16. Reescreva as expressões abaixo colocando algum termo em evidência.

a) $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{3x}{2}-3$ c) $\frac{8}{5}-\frac{2x}{5}$

17. Você fez 3/4 dos exercícios de MA091 em 42 minutos. Mantendo esse ritmo, quanto tempo gastará para fazer os exercícios que faltam? Ao terminar o trabalho, quanto tempo você terá consumido para fazer toda a lista?

18. Dos eleitores de Piraporinha, 1/3 deve votar em João Valente para prefeito e 3/5 devem votar em Luís Cardoso. Que fração dos eleitores não votará em um desses dois candidatos?

19. O ginásio esportivo de Curimbatá comporta 4.500 pessoas, o que corresponde a 3/52 da população da cidade. Quantos habitantes tem Curimbatá?

20. Roberto e Marina juntaram dinheiro para comprar um videogame. Roberto pagou por 5/8 do preço e Marina contribuiu com R$ 45,00. Quanto custou o videogame?

21. Um cidadão precavido foi fazer uma retirada de dinheiro em um banco. Para tanto, levou sua mala executiva, cujo interior tem 39 cm de comprimento, 56 cm de largura e 10 cm de altura. O cidadão só pretende carregar notas de R$ 50,00. Cada nota tem 14 cm de comprimento, 6,5 cm de largura e 0,02 cm de espessura. Qual é a quantia máxima, em reais, que o cidadão poderá colocar na mala?

22. Em uma roleta com 36 casas foram dispostos todos os números inteiros de 0 a 35. O número 0 foi atribuído a uma casa qualquer, como mostra a figura. Em seguida, o número 1 foi designado à 19ª casa seguinte àquela que continha o número 0, percorrendo-se as casas no sentido horário. Por sua vez, o número 2 foi atribuído à 19ª casa seguinte à do número 1, adotando-se novamente o sentido horário. Os demais números foram preenchidos de forma análoga, percorrendo-se 19/36 de volta, no sentido horário. A que casa após o zero foi atribuído o número 23?

23. Para trocar os pneus de um carro, é preciso ficar atento ao código de três números que eles têm gravado na lateral. O primeiro desses números fornece a largura (L) do pneu, em milímetros. O segundo corresponde à razão entre a altura (H) e a largura (L) do pneu, multiplicada por 100. Já o terceiro indica o diâmetro interno (A) do pneu, em polegadas. A figura abaixo mostra um corte vertical de uma roda, para que seja possível a identificação de suas dimensões principais.

Suponha que os pneus de um carro tenham o código 195/60R15. Sabendo que uma polegada corresponde a 25,4 mm, determine o diâmetro externo (D) desses pneus.

Respostas dos Exercícios 1.3

1. a) Um quinto. b) Três oitavos. c) Sete vinte avos. d) Nove treze avos. e) Cinco centésimos. f) Cento e vinte e cinco milésimos. g) Mil mil e um avos.

2. a) $\frac{23}{2}$ b) 52 c) 81

3. 256.

4. Azuis: 1/3. Amarelos: 2/3.

5. 117

6. 240

7. a) 25/7 b) 23/4 c) 33/12

8. a) Por exemplo, 2/6 e 3/9. b) Por exemplo, 4/10 e 8/20. c) Por exemplo, −125/100 e −25/20.

9. a) 0,33... b) 0,4 c) 1,25

10. Para x positivo, $1/x$ decresce à medida que x cresce.

11. a) 2 b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{34}{21}$ f) $\frac{41}{20}$ g) $\frac{1}{6}$ h) $-\frac{7}{20}$ i) $\frac{13}{30}$ j) $-\frac{45}{14}$ k) $\frac{31}{30}$ l) $\frac{13}{60}$

12. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{35}{24}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{28}{19}$ e) $\frac{40}{7}$ f) $-\frac{55}{6}$ g) $-\frac{27}{10}$ h) $\frac{7}{18}$ i) $\frac{8}{90}$

13. a) $\frac{11}{30}$ b) $\frac{35}{24}$ c) $\frac{13}{20}$ d) $\frac{5}{36}$

14. a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{21}{2}$ d) $\frac{32}{3}$ e) $\frac{12}{25}$ f) $\frac{5}{4}$ g) $-\frac{21}{16}$ h) $-\frac{10}{99}$ i) $\frac{12}{5}$ j) $-\frac{24}{35}$ k) 6 l) $\frac{32}{12} = \frac{8}{3}$ m) $\frac{2}{5}$

15. a) $\frac{3x}{4} + \frac{15}{8}$ b) $-\frac{6}{20} + \frac{2x}{15}$ c) $\frac{2}{21} - \frac{2x}{7}$ d) $\frac{40x}{6} - \frac{5}{4}$ e) $\frac{2xy}{3} + \frac{x}{18}$ f) $\frac{12x}{5} + \frac{4y}{5} + \frac{8}{15}$

16. a) $\frac{1}{3}(x+2)$ b) $3(\frac{x}{2} - 1)$ c) $\frac{2}{5}(4-x)$

17. A lista toda terá consumido 56 minutos, dos quais 14 minutos terão sido gastos para fazer os exercícios que faltam.

18. 1/15

19. 78.000 habitantes

20. R$ 120,00

21. R$ 600.000,00

22. A quinta casa

23. 615 mm

1.4 Simplificação de frações

Suponha que a fração a/b tenha numerador a e denominador b naturais. O processo de divisão de a e b por um número natural para a obtenção de uma fração equivalente, mas com um denominador menor, é chamado **simplificação** da fração.

Exemplo 1. Simplificação de uma fração por divisões sucessivas

A fração $\frac{63}{42}$ pode ser simplificada dividindo seus dois termos por 3:

$$\frac{63}{42} = \frac{63/3}{42/3} = \frac{21}{14}.$$

Para entender porque essas frações são equivalentes, vamos usar mais uma vez o fato de o número 1 ser o elemento neutro da multiplicação:

$$\frac{63}{42} = \frac{63}{42} \cdot 1 = \frac{63}{42} \cdot \frac{1/3}{1/3} = \frac{63/3}{42/3} = \frac{21}{14}.$$

Observando, agora, que $21 = 7 \times 3$ e $14 = 7 \times 2$, podemos obter uma fração ainda mais simples dividindo o numerador e o denominador por 7:

$$\frac{21}{14} = \frac{21/7}{14/7} = \frac{3}{2}.$$

Como não é possível obter uma nova fração dividindo 3 e 2 por um mesmo número natural diferente de 1, a representação mais simples de $\frac{63}{42}$ é $\frac{3}{2}$.

Agora, tente os Exercícios 2 e 3.

Geralmente, simplificamos uma fração dividindo o numerador e o denominador, recursivamente, por números pequenos. Para simplificar, por exemplo, a fração $\frac{840}{1560}$, podemos dividir o numerador e o denominador, sucessivamente, por 10, 2, 2 e 3, como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{840}{1560} &= \frac{84}{156} && \text{Dividindo por 10.} \\ &= \frac{42}{78} && \text{Dividindo por 2.} \\ &= \frac{21}{39} && \text{Dividindo por 2.} \\ &= \frac{7}{13}. && \text{Dividindo por 3.} \end{aligned}$$

Embora a estratégia acima seja bastante prática, também é possível simplificar uma fração em um único passo. Entretanto, isso exige o cálculo do máximo divisor comum entre o numerador e o denominador, como mostraremos abaixo, logo após uma revisão sobre divisores, múltiplos e números primos.

■ Divisores, múltiplos e números primos

Divisor

Um número natural c é **divisor** de um número natural a se o resto da divisão de a por c é zero (ou seja, se a é divisível por c).

Assim, por exemplo,

Experimente dividir 12 por 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 12, para constatar que a divisão realmente fornece 0 como resto.

- os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12;
- os divisores de 70 são 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 e 70.

Imagine que alguém lhe diga que "Lúcia é filha de Joana". Essa afirmação simples torna implícita uma segunda informação: "Joana é mãe de Lúcia". De forma análoga, o fato de 14 ser um divisor de 70 implica em 70 ser um múltiplo de 14, conforme a definição abaixo.

Múltiplo

Um número natural c é **múltiplo** de outro número natural a se existe um número natural b tal que

$$c = a \times b.$$

Lembrete

Um número natural divisível por 2 é chamado **par**. Os números pares são aqueles terminados em 0, 2, 4, 6 e 8. Existem regras simples para determinar se um número é múltiplo de 3 ou de 5. Essas regras são dadas nos Exercícios 4 e 5.

Dito de outra forma, um número natural c é múltiplo de outro número natural a se a é divisor de c. Assim, 15 é múltiplo de 5, pois $5 \times 3 = 15$ ou, de forma equivalente, $15/5 = 3$.

Para encontrar os múltiplos naturais de um número, basta multiplicá-lo pelos números naturais $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Logo,

- os múltiplos de 2 são $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots$
- os múltiplos de 5 são $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, \ldots$
- os múltiplos de 14 são $14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, \ldots$

Números naturais com apenas dois divisores são particularmente importantes na matemática, motivo pelo qual recebem uma denominação específica: *números primos*.

Número primo

Um número natural maior que 1 é dito **primo** se só tem como divisores naturais ele mesmo e o número 1.

Exemplo 2. Números primos menores que 10

Para descobrir se um número natural a é primo, basta calcular o resto da divisão de a pelos números primos menores que ele. Se alguma dessas divisões tiver resto zero, a não é primo. Caso contrário, o número é primo. Usando esse raciocínio, apresentamos na Tabela 1.4 os números primos menores que 10.

Observe que o número 1 não é considerado primo.

Tabela 1.4: Determinação dos números primos menores que 20.

Número	É primo?	Justificativa
2	Sim	Não há número primo menor que 2
3	Sim	Não é divisível por 2
4	Não	É divisível por 2
5	Sim	Não é divisível por 2 ou 3
6	Não	É divisível por 2
7	Sim	Não é divisível por 2, 3 ou 5
8	Não	É divisível por 2
9	Não	É divisível por 3

Em resumo, os números primos menores que 10 são: 2, 3, 5 e 7.

Exemplo 3. O crivo de Eratóstenes

Em seu trabalho *Introdução à aritmética*, Nicômaco atribui a Eratóstenes (276 AC – 195 AC) a elaboração de um algoritmo muito eficiente para a determinação de todos os números primos menores ou iguais a um número n predeterminado. Esse método, conhecido como o "crivo de Eratóstenes", é apresentado a seguir.

Você pode tornar esse método ainda mais eficiente trabalhando somente com números ímpares e usando $2p$ como incremento ao percorrer a lista. Essa é, inclusive, a forma com a qual Nicômaco apresenta o algoritmo.

1. Crie uma lista com todos os números naturais menores ou iguais a n.

2. Como 2 é o primeiro número primo, defina $p = 2$.

3. Começando em $p \times p$, percorra a lista de p em p números, riscando os números encontrados. Isso corresponde a eliminar da lista os múltiplos de p.

4. Atribua a p o próximo número não riscado na lista. Se nenhum número satisfizer essa condição, pare. Caso contrário, volte ao passo 3.

Agora, vamos usar o crivo de Eratóstenes para determinar os números primos menores ou iguais a 100.

- A Figura 1.17a mostra a lista de números de 2 a 100.

- Inicialmente, definimos $p = 2$.

- Começando em $p \times p = 2 \times 2 = 4$, percorremos os números da lista de 2 em 2, riscando todos os números encontrados (4, 6, 8, 10, 12, 14, ...), como mostra a Figura 1.17b.

- Como o próximo número desmarcado da lista é o 3, definimos $p = 3$.

- Começando em $p \times p = 3 \times 3 = 9$, percorremos os números da lista de 3 em 3, riscando todos os números encontrados (9, 12, 15, 18, 21, 24, ...), como mostra a Figura 1.17c, na qual os números marcados anteriormente aparecem sobre um fundo rosa e os múltiplos de 3 que ainda não haviam sido eliminados aparecem com um fundo vermelho (9, 15, 21, 27, ...).

- O próximo número desmarcado é o 5. Logo, tomamos $p = 5$.

- Começando em $p \times p = 5 \times 5 = 25$, percorremos os números da lista de 5 em 5, marcando os números 25, 30, 35, 40, 45, 50, ... A Figura 1.17d mostra os números riscados nesse passo.

- O próximo número desmarcado é o 7, de modo que escolhemos $p = 7$.

- Começando em $p \times p = 7 \times 7 = 49$, percorremos os números da lista de 7 em 7, riscando os números 49, 56, 63, 70, 77, 84, ... A Figura 1.17e mostra os três números novos marcados nesse passo (49, 77 e 91).

- O próximo número desmarcado é o 11, donde $p = 11$. Entretanto, como $p \times p = 121$, que é maior que 100, paramos o algoritmo.

A Figura 1.17f mostra os 25 números primos menores ou iguais a 100, que são

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 \text{ e } 97.$$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(a) Lista original.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(b) Riscando os múltiplos de 2.

	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(c) Riscando os múltiplos de 3.

	2	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(d) Riscando os múltiplos de 5.

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(e) Riscando os múltiplos de 7.

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

(f) Lista final de primos.

Figura 1.17: Encontrando primos menores ou iguais a 100 com o crivo de Eratóstenes.

■ Máximo divisor comum

Os números 25 e 60 são divisíveis por 5. Nesse caso, dizemos que 5 é um divisor comum a 25 e 60. Dentre os divisores comuns a dois números, o de maior valor tem grande aplicação na matemática, de modo que recebe um nome particular.

mdc

O **máximo divisor comum (mdc)** entre dois números naturais a e b é o maior número natural c que é divisor tanto de a quanto de b.

Quando o mdc entre dois números naturais é 1, dizemos que esses números são **primos entre si**.

Para encontrar o máximo divisor comum entre a e b deve-se fatorar esses números.

> A **fatoração** de um número natural é a **decomposição** desse número no produto de números primos, chamados **fatores**.

Você sabia?
O *Teorema fundamental da aritmética* garante que todo número natural maior que 1 ou é primo ou pode ser decomposto em um produto de fatores primos. Esse produto é único, a menos de uma possível troca da ordem dos fatores.

A fatoração de 12 fornece $2 \cdot 2 \cdot 3$, pois esse produto é igual a 12 e os números 2 e 3 são primos. As formas fatoradas de outros números naturais são dadas a seguir.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 441 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$
$$5083 = 13 \cdot 17 \cdot 23 \qquad 128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Para fatorar um número natural a, devemos dividi-lo, sucessivamente, pelos seus menores divisores primos. Se essa frase lhe pareceu complicada, acompanhe os exemplos abaixo.

Exemplo 4. Fatoração de 90

Vamos escrever o número 90 na forma fatorada.

90	2	2 é o menor divisor primo de 90. 90/2 = 45.
45	3	3 é o menor divisor primo de 45. 45/3 = 15.
15	3	3 é o menor divisor primo de 15. 15/3 = 5.
5	5	5 é o menor divisor primo de 5. 5/5 = 1.
1		Chegamos a 1. Não há como prosseguir.

Como vimos acima,

$$90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 15}_{45} = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{3 \cdot 5}_{15} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \underbrace{5 \cdot 1}_{5}.$$

Assim, desprezando o número 1 (elemento neutro da multiplicação), obtemos a forma fatorada de 90, que é $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Exemplo 5. Fatoração de 980

Vamos escrever o número 980 na forma fatorada.

980	2	2 é o menor divisor primo de 980. 980/2 = 490.
490	2	2 é o menor divisor primo de 490. 490/2 = 245.
245	5	5 é o menor divisor primo de 245. 245/5 = 49.
49	7	7 é o menor divisor primo de 49. 49/7 = 7.
7	7	7 é o menor divisor primo de 7. 7/7 = 1.
1		Chegamos a 1. Não há como prosseguir.

Logo, $980 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$.

Agora que já vimos como fatorar um número natural, podemos definir o máximo divisor comum de uma forma prática.

Definição prática do mdc

O **máximo divisor comum (mdc)** entre dois números naturais a e b é o produto dos fatores comuns de a e b.

Exemplo 6. mdc entre 12 e 30

Vamos achar o máximo divisor comum entre 12 e 30.

12	2		30	2
6	2		15	3
3	3		5	5
1			1	

Logo, $12 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{3}$ e $30 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 5$. O máximo divisor comum entre 12 e 30 é o produto dos fatores primos que são comuns a 12 e a 30 (que deixamos em negrito). Dessa forma,

$$mdc(12{,}30) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Observe que $12/6 = 2$ e $30/6 = 5$. Como 2 e 5 são primos entre si, não há um divisor comum maior que 6 para os números 12 e 30.

Exemplo 7. mdc entre 945 e 693

Vamos encontrar o máximo divisor comum entre 945 e 693.

$$\begin{array}{r|l} 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

Assim, $945 = \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \mathbf{7}$ e $693 = \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7} \cdot 11$, de modo que

$$mdc(945{,}693) = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63.$$

Nesse caso, temos $945/63 = 15$ e $693/63 = 11$. Como 15 e 11 são primos entre si, o maior divisor comum entre 945 e 693 é, de fato, 63.

Agora, tente o Exercício 9.

Também podemos determinar o mdc entre dois ou mais números decompondo-os simultaneamente. Nesse caso, a cada passo do processo de decomposição,

1. determinamos o menor número primo a que é divisor **de todos os** números;

2. dividimos os números por a.

O processo termina quando não existirem divisores comuns. O mdc é o produto dos fatores encontrados, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 8. Cálculo prático do mdc

Vamos usar o método prático para calcular o mdc entre 945 e 693.

945,	693	3	3 é o menor número primo que divide, ao mesmo tempo, 945 e 693.
315,	231	3	3 é o menor divisor de 315 e 231.
105,	77	7	7 é o menor divisor de 105 e 77.
15,	11		15 e 11 são primos entre si. Não há como prosseguir.

O mdc entre 945 e 693 é igual a $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$.

Agora, tente o Exercício 10.

■ Simplificação de frações usando o mdc

Vimos no Exemplo 1 que as frações $\frac{63}{42}$ e $\frac{3}{2}$ são equivalentes. Dessas duas formas, a segunda é mais simples, pois o numerador e o denominador são menores que os da primeira. De fato, a forma $\frac{3}{2}$ é a maneira mais simples de escrever o número 1,5 como uma fração, pois 2 e 3 são números primos entre si.

> Quando o numerador e o denominador de uma fração são primos entre si, dizemos que a fração está na forma **irredutível**, que é a forma mais simples de representar o valor desejado como uma razão entre números inteiros.

Podemos encontrar a forma irredutível de uma fração dividindo o numerador e o denominador pelo mdc dos dois números, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 9. Forma irredutível de uma fração

Vamos determinar a forma irredutível da fração $\frac{63}{42}$ calculando o mdc entre o numerador e o denominador.

$$\begin{array}{rr|l} 63, & 42 & 3 \\ 21, & 14 & 7 \\ 3, & 2 & \end{array}$$

Como o mdc entre 63 e 42 é igual a $3 \cdot 7 = 21$, temos

$$\frac{63}{42} = \frac{63/21}{42/21} = \frac{3}{2}.$$

Agora, tente o Exercício 6.

Exemplo 10. Forma irredutível de uma fração

Uma vez que, o mdc entre 945 e 693 é 63 (veja o Exemplo 7), podemos simplificar a fração $\frac{945}{693}$ fazendo simplesmente

$$\frac{945}{693} = \frac{945/63}{693/63} = \frac{15}{11}.$$

■ Simplificação de frações durante o cálculo do produto

Para obter a forma simplificada do produto de frações, podemos efetuar o produto e, em seguida, simplificar o resultado, como mostrado no exemplo abaixo.

Exemplo 11. Produto de frações

mdc(24,60) = 12

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{15} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 15} = \frac{24}{60} = \frac{24/12}{60/12} = \frac{2}{5}$

mdc(231,88) = 11

b) $\frac{11}{(-8)} \cdot \frac{21}{11} = \frac{11 \cdot 21}{(-8) \cdot 11} = \frac{231}{-88} = \frac{231/11}{-88/11} = -\frac{21}{8}$

mdc(12,14) = 2

c) $\frac{(-4x)}{7} \cdot \frac{3}{(-2)} = \frac{(-4x) \cdot 3}{7 \cdot (-2)} = \frac{-12x}{-14} = \frac{-12x/2}{-14/2} = \frac{6x}{7}$

Observando o Exemplo 11(b), ficamos com a nítida impressão de que tivemos o trabalho dobrado ao calcular dois produtos por 11 (um no numerador e outro no denominador) para, em seguida, efetuar duas divisões pelo mesmo número. Para reduzir as contas, poderíamos ter antecipado a simplificação, efetuando-a antes do cálculo dos produtos dos termos do numerador e do denominador, como mostrado abaixo.

$$\left(\frac{11}{-8}\right) \cdot \left(\frac{21}{11}\right) = \frac{11 \cdot 21}{(-8) \cdot 11}$$ Aplicando a regra do produto de frações.

$$= \frac{11}{11} \cdot \frac{21}{(-8)}$$ Isolando o termo $\frac{11}{11} = 1$.

$$= -\frac{21}{8}.$$ Eliminando o termo que vale 1.

Nesse exemplo, isolamos o termo $\frac{11}{11}$ em lugar de efetuarmos diretamente os produtos $11 \cdot 21$ e $(-8) \cdot 11$. Em seguida, usamos o fato de o número 1 ser o elemento neutro da multiplicação para simplificar a fração.

Vejamos como aplicar a simplificação precoce dos termos de uma fração em um outro exemplo simples.

Exemplo 12. Simplificação do produto de frações

$$\left(\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{8\cdot 5}{3\cdot 2} \quad \text{Aplicando a regra do produto.}$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 2} \quad \text{Decompondo } 8 = 2\cdot 4.$$

$$= \frac{2}{2}\cdot\frac{4\cdot 5}{3} \quad \text{Isolando o termo } \tfrac{2}{2}.$$

$$= \frac{20}{3}. \quad \text{Eliminando o termo que vale 1.}$$

Tente aplicar essa ideia ao Exemplo 11(c).

Você deve ter reparado que, nesse caso, usamos o fato de 8 ser um múltiplo de 2 para simplificar a fração antes que os produtos $8\cdot 5$ e $3\cdot 2$ fossem efetuados.

Para frações mais complicadas, a simplificação pode ser feita através de divisões sucessivas (vide o Exemplo 1), que são aplicadas ao longo da multiplicação. Esse procedimento pode ser resumido no seguinte roteiro:

1. Identifique um termo a, no numerador, e outro b, no denominador, que sejam divisíveis por um terceiro número c;
2. Substitua a por a/c e b por b/c;
3. Repita os passos 1 e 2 até que não seja possível simplificar a fração.

Vejamos como aplicar essa regra em um exemplo prático.

Exemplo 13. Mais uma simplificação do produto de frações

$$\left(\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{20}{9}\right) = \frac{6\cdot 20}{5\cdot 9} \quad \text{6 (do numerador) e 9 (do denominador) são divisíveis por 3.}$$

$$= \frac{(6/3)\cdot 20}{5\cdot(9/3)} \quad \text{6 é substituído por 6/3=2 e 9 é substituído por 9/3=3.}$$

$$= \frac{2\cdot 20}{5\cdot 3} \quad \text{20 (do numerador) e 5 (do denominador) são divisíveis por 5.}$$

$$= \frac{2\cdot(20/5)}{(5/5)\cdot 3} \quad \text{20 é substituído por 20/5=4 e 5 é substituído por 5/5=1.}$$

$$= \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} \quad \text{Não há mais como simplificar.}$$

$$= \frac{8}{3} \quad \text{Fração final.}$$

Como exercício, aplique a mesma estratégia ao Exemplo 11(a).

Apesar de não ser elegante, há quem faça a simplificação cortando diretamente os termos, como mostrado abaixo.

$$\frac{\not{6}^{\,2}}{\not{5}_{\,1}}\cdot\frac{\not{20}_{\,4}}{\not{9}^{\,3}} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} = \frac{8}{3}.$$

Observe que os múltiplos de 3 foram cortados e substituídos pelos valores que aparecem acima dos números originais. Já os múltiplos de 5 foram riscados em outra direção e foram substituídos pelos valores que aparecem abaixo dos números originais.

Agora, tente o Exercício 16.

Depois de adquirir alguma experiência, você conseguirá fazer várias simplificações em um único passo. Vejamos, agora, como efetuar simplificações durante o cálculo do quociente de frações.

Exemplo 14. Quocientes com frações

a) $\dfrac{8}{\frac{4}{7}} = 8 \cdot \dfrac{7}{4} = \dfrac{8 \cdot 7}{4} = \dfrac{8/4 \cdot 7}{4/4} = 2 \cdot 7 = 14.$

b) $-\dfrac{2}{\frac{2}{5}} = -2 \cdot \dfrac{5}{2} = -\dfrac{2 \cdot 5}{2} = -5.$

c) $\dfrac{3}{\frac{7}{3}} = 3 \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3 \cdot 3}{7} = \dfrac{9}{7}.$ (Observe que, nesse caso, não há simplificação.)

d) $-\dfrac{\frac{3}{11}}{3} = -\dfrac{3}{11} \cdot \dfrac{1}{3} = -\dfrac{3}{11 \cdot 3} = -\dfrac{1}{11}.$

e) $\dfrac{\frac{13}{6}}{6} = \dfrac{13}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{13}{6 \cdot 6} = \dfrac{13}{36}.$ (Nesse exemplo, também não há simplificação.)

f) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{1} = \dfrac{1 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \dfrac{6}{2} = 3.$

g) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{11}{8}} = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{8}{11} = \dfrac{5 \cdot 8}{8 \cdot 11} = \dfrac{5}{11}.$

h) $\dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{3}{25}} = \dfrac{12}{5} \cdot \dfrac{25}{3} = \dfrac{12 \cdot 25}{5 \cdot 3} = \dfrac{12 \cdot 25/5}{5/5 \cdot 3} = \dfrac{12 \cdot 5}{3} = \dfrac{12/3 \cdot 5}{3/3} = 4 \cdot 5 = 20.$

Agora, tente o Exercício 18.

Um erro que ocorre com frequência na simplificação de frações é o cancelamento dos termos quando há uma soma ou subtração, em lugar da multiplicação, como mostrado na Tabela 1.5.

Tabela 1.5: Erros relacionados à simplificação de frações.

Expressão	Errado	Correto
$\dfrac{2x-6}{2}$	$\dfrac{(2/2)x-6}{(2/2)} = x-6$	$\dfrac{2(x-3)}{2} = x-3$
$3x - \dfrac{x}{3}$	$(3/3)x - \dfrac{x}{(3/3)} = x - x = 0$	$\dfrac{9x-x}{3} = \dfrac{8x}{3}$
$\dfrac{5x+12}{10y-6}$	$\dfrac{(5/5)x+(12/6)}{(10/5)y-(6/6)} = \dfrac{x+2}{2y-1}$	$\dfrac{5x+12}{10y-6}$

Como foi dito no Exemplo 12, para simplificar frações, decompomos o numerador e o denominador de forma a identificar e eliminar um termo na forma $\frac{a}{a}$. Para simplificar uma fração na qual o numerador ou o denominador contém uma soma, é preciso, em primeiro lugar, encontrar um fator comum aos termos que serão somados, de modo a colocá-lo em evidência.

Observe que, no primeiro exemplo da Tabela 1.5, a tentativa incorreta de simplificação envolveu a divisão por 2 de apenas uma parcela do numerador, o que não é permitido. A estratégia correta é mostrada em detalhes abaixo.

$$\frac{2x-6}{2} = \frac{2\cdot x + 2\cdot 3}{2}$$ Decompondo $2x$ e 6, de modo identificar o fator 2.

$$= \frac{2\cdot(x-3)}{2}$$ Pondo o número 2 em evidência no numerador.

$$= \frac{2}{2}\cdot\frac{x-3}{1}$$ Isolando o termo $\frac{2}{2}$.

$$= x-3.$$ Eliminando o termo que vale 1.

Também é possível identificar o erro quebrando a fração em duas, antes de efetuar a simplificação. Veja como isso é feito:

$$\frac{2x-6}{2} = \frac{2x}{2} - \frac{6}{2}$$ Quebrando a fração em duas, pois $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$.

$$= \frac{2x}{2} - \frac{2\cdot 3}{2}$$ Decompondo o número 6 como $2\cdot 3$.

$$= \frac{2}{2}\cdot\frac{x}{1} - \frac{2}{2}\cdot\frac{3}{1}$$ Isolando o termo $\frac{2}{2}$ nas duas frações.

$$= x-3.$$ Eliminando os termos que valem 1.

No segundo exemplo da Tabela 1.5, a tentativa de simplificação mostrada em vermelho envolve a divisão por 3 do numerador de um termo e do denominador de outro termo, o que não é correto. Nesse caso, notamos que não há como simplificar a expressão, embora possamos efetuar facilmente a subtração.

Finalmente, o erro mostrado no terceiro exemplo da Tabela 1.5 é ainda mais grave, pois inclui duas tentativas de simplificação parcial, uma das quais envolvendo os termos $5x$ e $10y$, e a outra envolvendo 12 e 6. Nesse exemplo, não há como simplificar a fração.

Problema 15. Simplificação de expressões

Simplifique as expressões abaixo.

a) $\frac{10x+35}{15}$ b) $\frac{12x+16y+32}{8}$

Solução.

a) Como vimos, para simplificar uma expressão na qual o numerador (ou o denominador) inclui uma soma, é preciso, em primeiro lugar, separar um mesmo fator no numerador e no denominador. Adotando essa estratégia, obtemos

Observe que $\mathrm{mdc}(10,35,15) = 5$.

$$\frac{10x+35}{15} = \frac{5\cdot 2x + 5\cdot 7}{5\cdot 3}$$ Separando o fator 5 no denominador e em todos os termos do numerador.

$$= \frac{5\cdot(2x+7)}{5\cdot 3}$$ Pondo o fator 5 em evidência no numerador.

$$= \frac{5}{5}\cdot\frac{2x+7}{3}$$ Isolando o termo $\frac{5}{5}$.

$$= \frac{2x+7}{3}.$$ Eliminando o termo que vale 1.

Se você prefere cortar números, divida todos os termos do numerador e do denominador pelo mesmo fator. Nesse problema, por exemplo, todos os termos podem ser divididos por 5:

$$\frac{\cancel{10}^{2}x + \cancel{35}^{7}}{\cancel{15}^{3}} = \frac{2x+7}{3}.$$

b) Se o numerador (ou o denominador) envolver muitos termos, é preciso fatorar todos eles antes de simplificar, como mostrado abaixo.

Observe que mdc(12, 16, 32,8) = 4.

$$\frac{12x+16y+32}{8} = \frac{4\cdot 3x + 4\cdot 4y + 4\cdot 8}{4\cdot 2}$$

Separando o fator 4 no denominador e em todos os termos do numerador.

$$= \frac{4\cdot(3x+4y+8)}{4\cdot 2}$$

Pondo o fator 4 em evidência no numerador.

$$= \frac{4}{4}\cdot\frac{3x+4y+8}{2}$$

Isolando o termo $\frac{4}{4}$.

$$= \frac{3x+4y+8}{2}.$$

Eliminando o termo que vale 1.

Quem gosta de cortar números pode, nesse caso, dividir todos os termos do numerador e do denominador por 4:

$$\frac{\cancel{12}^{3}x+\cancel{16}^{4}y+\cancel{32}^{8}}{\cancel{8}^{2}} = \frac{3x+4y+8}{2}.$$

Agora, tente o Exercício 20.

■ Mínimo múltiplo comum

Em muitos casos, é possível simplificar o resultado da soma de frações com denominadores diferentes, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 16. Soma e subtração de frações com denominadores diferentes

a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{10} = \frac{4\cdot 10+3\cdot 5}{5\cdot 10} = \frac{55}{50} = \frac{11}{10}.$

b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6} = \frac{3\cdot 6+5\cdot 2}{2\cdot 6} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}.$

c) $\frac{4}{5}-\frac{3}{10} = \frac{4\cdot 10-3\cdot 5}{5\cdot 10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$

d) $\frac{3}{2}-\frac{5}{6} = \frac{3\cdot 6-5\cdot 2}{2\cdot 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$

No Exemplo 16, efetuamos as soma e as subtrações e, em seguida, simplificamos as frações obtidas. Entretanto, teria sido possível obter diretamente as frações simplificadas se tivéssemos usado o mínimo múltiplo comum, que definimos abaixo.

Exemplo 17. Múltiplos comuns a 6 e 8

Dizemos que um número c é **múltiplo comum** de a e b se c é múltiplo, ao mesmo tempo, de a e de b.

Vamos determinar os múltiplos comuns de 6 e de 8 enumerando, em separado, os múltiplos de cada número:

Como um número natural tem infinitos múltiplos, apresentamos apenas listas parciais, seguidas de reticências.

- Múltiplos de 6: $6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, \ldots$
- Múltiplos de 8: $8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, \ldots$

Os múltiplos comuns a 6 e 8 são aqueles que aparecem nas duas listas (indicados em vermelho). Note que todos os números destacados são múltiplos de 24. Assim, se quiséssemos expandir a lista de múltiplos comuns, bastaria incluir nela outros múltiplos de 24: $24, 48, 72, 96, 120, 144, \ldots$

Agora, tente o Exercício 12.

Observando o Exemplo 17, notamos que 24 é o menor número natural que é, ao mesmo tempo, múltiplo de 6 e de 8. Nesse caso, dizemos que 24 é o minimo múltiplo comum de 6 e 8.

mmc

O **mínimo múltiplo comum** entre dois números naturais a e b é o menor número natural c que é múltiplo tanto de a quanto de b.

O processo de enumeração dos múltiplos, ilustrado no Exemplo 17 para os números 6 e 8, não é a forma mais simples de se obter o mmc. Vejamos como efetuar o cálculo do mínimo múltiplo comum de um modo mais prático.

Problema 18. Cálculo do mmc usando o mdc

Determinar o mmc de 42 e 105.

Solução.

A fatoração de 42 e de 105 fornece

$$42 = 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}$$
$$105 = \mathbf{3} \cdot 5 \cdot \mathbf{7}.$$

e o mdc entre esses dois números é $3 \cdot 7 = 21$. Calculando o produto entre 42 e 105, obtemos

$$42 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 4410.$$

Naturalmente, 4410 é um múltiplo de 42 e de 105. Entretanto, esse não é o menor múltiplo possível, pois os fatores 3 e 7 aparecem duas vezes no produto acima. Se excluíssemos uma cópia de cada fator duplicado, obteríamos

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 210,$$

que ainda é múltiplo de 42 e de 105, já que $210/42 = 5$ e $210/105 = 2$.

Como o produto dos fatores repetidos corresponde exatamente ao mdc, que vale 21, podemos escrever

$$mmc(42, 105) = \frac{42 \cdot 105}{21} = \frac{4410}{21} = 210.$$

De uma forma geral, dados dois números naturais a e b, dizemos que

$$mmc(a, b) = \frac{a \cdot b}{mdc(a,b)}.$$

Observando o Problema 18, constatamos que o mmc entre dois números naturais pode ser definido como o produto dos fatores comuns e dos fatores não comuns de cada número. Vamos usar essa ideia para calcular diretamente o mmc.

Problema 19. Cálculo do mmc usando fatoração

Determinar o mmc de 120 e 700.

Solução.

Antes de mais nada, vamos fatorar os dois números.

$$
\begin{array}{r|l}
120 & 2 \\
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
700 & 2 \\
350 & 2 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

Logo, $120 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathbf{5}$ e $700 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{5} \cdot 5 \cdot 7$. Observe que o produto $2 \cdot 2 \cdot 5$ (isto é, o produto dos termos em negrito), fornece o mdc entre 120 e 700, ou seja, aparece na fatoração dos dois números. Por outro lado, o produto (sem negrito) $2 \cdot 3$ só aparece na fatoração de 120 e o produto (sem negrito) $5 \cdot 7$ só aparece na fatoração de 700.

Calculemos, agora, o produto dos fatores comuns e dos fatores não comuns de cada número:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 5}_{\text{fatores comuns}} \cdot \underbrace{2 \cdot 3}_{\text{fatores de 120}} \cdot \underbrace{5 \cdot 7}_{\text{fatores de 700}} = 4200.$$

Note que 4200 é, de fato, múltiplo de 120 e 700, pois $4200 = 120 \times 35$, bem como $4200 = 700 \times 6$.

Assim, o mmc entre 120 e 700 é 4200.

Já estudamos duas maneiras de determinar o mmc. Vejamos agora como obtê-lo de forma análoga ao cálculo prático do mdc, ou seja, decompondo simultaneamente os números envolvidos.

Para calcular o mmc entre dois ou mais números, a cada passo do processo de decomposição desses números, devemos

1. determinar o menor número primo a que é divisor de **ao menos um** dos números;

2. dividir por a os números que forem múltiplos desse valor.

Esse processo é encerrado quando todos os números forem reduzidos a 1. O mmc será igual ao produto dos fatores encontrados.

Exemplo 20. Cálculo prático do mmc

Vamos usar o método prático para calcular o mmc entre 120 e 700, bem como o mmc entre 330 e 315.

Números	Fator	Comentário
120, 700	2	120 e 700 são divisíveis por 2.
60, 350	2	60 e 350 são divisíveis por 2.
30, 175	2	30 ainda é divisível por 2. O valor 175 permanece inalterado.
15, 175	3	15 é divisível por 3. O valor 175 permanece inalterado.
5, 175	5	5 e 175 são divisíveis por 5.
1, 35	5	35 ainda é divisível por 5.
1, 7	7	7 é divisível por 7.
1, 1		Os números restantes são iguais a 1. Não há como prosseguir.

O mmc entre 120 e 700 é igual a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4200$.

Números	Fator	Comentário
330, 315	2	330 é divisível por 2. O valor 315 permanece inalterado.
165, 315	3	165 e 315 são divisíveis por 3.
55, 105	3	105 é divisível por 3. O valor 55 permanece inalterado.
55, 35	5	55 e 35 são divisíveis por 5.
11, 7	7	7 é divisível por 7. O valor 11 permanece inalterado.
11, 1	11	11 é divisível por 11.
1, 1		Os números restantes são iguais a 1. Não há como prosseguir.

O mmc entre 330 e 315 é igual a $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 6930$.

Agora, tente o Exercício 13.

■ O uso do mmc na soma e subtração de frações

A fórmula apresentada anteriormente para a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes não produz frações irredutíveis, exigindo, às vezes, que simplifiquemos a fração encontrada.

Para obter diretamente o resultado da soma ou subtração na forma mais simples possível, é preciso usar o mmc para converter as frações. Mostramos abaixo alguns exemplos que ilustram como isso é feito.

Problema 21. Soma e subtração de frações usando o mmc

Efetue as operações abaixo, fornecendo frações irredutíveis.

a) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{8}$.

b) $\dfrac{23}{30}-\dfrac{11}{84}$.

Solução.

a) Para converter $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{8}$ em frações equivalentes com o menor denominador possível, devemos encontrar o menor numero que seja múltiplo de 6 e de 8 ao mesmo tempo, para usá-lo como denominador das novas frações.

Fatorando 6 e 8, obtemos $6 = 2\cdot 3$ e $8 = 2\cdot 2\cdot 2$. Assim, temos um fator 2 que é comum aos dois denominadores, o número 3 que só é fator de 6, e o produto $2\cdot 2 = 4$ que só aparece na decomposição de 8. Deste modo,

$$mmc(6,8) = 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Logo, o denominador das frações equivalentes será 24.

Para converter a fração $\frac{5}{6}$ em outra com o novo denominador, devemos multiplicar o numerador e o denominador por 4, que é o produto dos fatores que só aparecem na decomposição de 8:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}.$$

Analogamente, para converter a fração $\frac{3}{8}$, devemos multiplicar o numerador e o denominador por 3, que é o número que só aparece na fatoração de 6:

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{9}{24}.$$

Agora que as frações têm o mesmo denominador, podemos somá-las:

$$\frac{20}{24}+\frac{9}{24}=\frac{29}{24}.$$

b) O cálculo da diferença entre duas frações segue o mesmo raciocínio adotado para a soma. Nesse caso, fatorando 30 e 84, obtemos

$$30 = 2\cdot 3\cdot 5 \quad e \quad 84 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7.$$

Logo, $mmc(30,84) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 7 = 420$.

Para converter a fração $\frac{23}{30}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $2\cdot 7 = 14$, que é o produto dos fatores que só aparecem na decomposição de 84:

$$\frac{23}{30}=\frac{23\cdot 14}{30\cdot 14}=\frac{322}{420}.$$

Por sua vez, a conversão de $\frac{11}{84}$ envolve a multiplicação do numerador e do denominador por 5, que é o único termo exclusivo da fatoração de 30:

$$\frac{11}{84}=\frac{11\cdot 5}{84\cdot 5}=\frac{55}{420}.$$

Finalmente, efetuamos a subtração:

$$\frac{322}{420} - \frac{55}{420} = \frac{267}{420}.$$

Agora, tente o Exercício 15.

O quadro abaixo resume o que foi feito na resolução do Problema 21.

> Se b e d são números naturais, então
>
> $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot (\text{fatores exclusivos de } d) + c \cdot (\text{fatores exclusivos de } b)}{mmc(b,d)}$$
>
> $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot (\text{fatores exclusivos de } d) - c \cdot (\text{fatores exclusivos de } b)}{mmc(b,d)}.$$

Para terminar a seção, resolvamos um exercício um pouco mais desafiador.

Problema 22. Simplificação envolvendo um número desconhecido

Supondo que $x \neq 0$, simplifique a expressão

$$\frac{3 - \frac{4}{5}}{\frac{1}{4x} + \frac{2}{3x}}.$$

Solução.

Efetuando a subtração que aparece no numerador, obtemos

$$3 - \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{15-4}{5} = \frac{11}{5}.$$

Trabalhando com o denominador, temos

Note que o mmc entre $4x$ e $3x$ é $12x$.

$$\frac{1}{4x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{4x} \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{3x} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3}{12x} + \frac{8}{12x} = \frac{3+8}{12x} = \frac{11}{12x}.$$

Juntando, finalmente, os dois termos, encontramos

$$\frac{\frac{11}{5}}{\frac{11}{12x}} = \frac{11}{5} \cdot \frac{12x}{11} = \frac{11}{11} \cdot \frac{12x}{5} = \frac{12x}{5}.$$

Logo, a expressão é equivalente a $12x/5$.

Agora, tente o Exercício 25.

Exercícios 1.4

1. Simplifique a fração 16/64 dividindo o numerador e o denominador por 2 sucessivas vezes.
2. Simplifique 36/54 dividindo o numerador e o denominador por 2 ou 3 sucessivas vezes.
3. Usando o método das divisões sucessivas, simplifique

   a) $\frac{18}{42}$ b) $\frac{24}{32}$ c) $\frac{4}{20}$

4. Para saber se um número é divisível por 3, basta verificar se a soma de seus algarismos é divisível por 3. Dessa forma, 81 é divisível por 3, pois $8 + 1 = 9$ e 9 é divisível por 3.

Para números grandes, podemos aplicar essa regra mais de uma vez. Assim, para saber se 587343687 é divisível por 3, calculamos $5+8+7+3+4+3+6+8+7=51$ e, em seguida, somamos novamente $5+1=6$. Como 6 é divisível por 3, o número 587343687 também é.

Verifique se os números abaixo são divisíveis por 3.

a) 342 b) 8304 c) 49318 d) 967908

5. Os números naturais divisíveis por 5 são aqueles terminados em 0 e 5. Verifique se os números abaixo são divisíveis por 5.

a) 145 b) 5329 c) 10340 d) 555553

6. Simplifique ao máximo as frações abaixo.

a) $\frac{6}{12}$ b) $\frac{15}{25}$ c) $\frac{4}{24}$ d) $\frac{35}{14}$
e) $\frac{45}{63}$ f) $\frac{75}{30}$ g) $\frac{42}{105}$ h) $\frac{0}{1250}$
i) $\frac{(-15)}{5}$ j) $\frac{15}{(-5)}$ k) $\frac{(-45)}{(-3)}$ l) $\frac{(-3)}{(-45)}$
m) $\frac{(-14)}{21}$ n) $\frac{512}{(-64)}$ o) $\frac{(-36)}{(-15)}$ p) $\frac{(-40)}{(-24)}$

7. Dentre os números 23, 31, 51, 53, 63, 67, 71, 77, 91 e 95, quais são primos?

8. Calcule todos os divisores de 24 e de 36. Determine os divisores comuns entre esses dois números.

9. Depois de fatorar os números, calcule o máximo divisor comum entre

a) 45 e 63. b) 30 e 75. c) 42 e 105.

10. Calcule o máximo divisor comum entre

a) 32 e 128. b) 18, 30 e 54. c) 24, 32 e 60.

11. Usando o mdc, simplifique as frações 42/105 e 36/90 e verifique se elas são equivalentes.

12. Enumere os múltiplos dos números abaixo e determine o mmc em cada caso.

a) 2 e 3. b) 3 e 6. c) 4 e 6. d) 2, 3 e 5.

13. Determine o mínimo múltiplo comum entre

a) 50 e 225. b) 30 e 56. c) 21, 30 e 70.

14. Reescreva as frações abaixo, deixando-as com o mesmo denominador.

a) 3/2 e 2/3. b) 1/3 e 4/6. c) 3/4 e 5/6. d) 1/2, 1/3 e 1/5.

15. Calcule as expressões abaixo, simplificando-as quando possível.

a) $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$ b) $\frac{4}{6}-\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{6}+\frac{4}{15}$
d) $\frac{5}{6}-\frac{9}{10}$ e) $-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ f) $-\frac{5}{12}-\frac{5}{8}$
g) $\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$ h) $\frac{5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ i) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

16. Efetue os produtos, simplificando as frações quando possível.

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}$ b) $3\cdot\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}$
d) $\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$ e) $\frac{12}{5}\cdot\frac{10}{3}$ f) $\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{14}{9}$
g) $\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{16}{11}\right)$ h) $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}$

17. Calcule as expressões. Dica: não use a propriedade distributiva.

a) $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{2}\right)$ b) $2\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{10}\right)$
c) $\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)$ d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{8}\right)$

18. Calcule as expressões abaixo e simplifique o resultado quando possível.

a) $\frac{\frac{6}{5}}{3}$ b) $\frac{\frac{7}{4}}{2}$ c) $\frac{2}{\frac{1}{8}}$ d) $\frac{5}{\frac{5}{3}}$
e) $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}}$ f) $\frac{\frac{12}{7}}{\frac{3}{14}}$ g) $\frac{\frac{6}{8}}{\frac{3}{8}}$ h) $\frac{\frac{22}{3}}{\frac{4}{15}}$
i) $\frac{\left(-\frac{2}{15}\right)}{\left(-\frac{1}{6}\right)}$ j) $-\frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{2}}$ k) $\frac{5/3-1/6}{2-(1/2)}$ l) $\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+3}$
m) $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$ n) $\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$ o) $\frac{\frac{3}{5}-\frac{1}{6}}{\frac{9}{15}-\frac{7}{12}}$

19. Aplique a propriedade distributiva e e simplifique as expressões sempre que possível.

a) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-x\right)$ b) $\frac{5}{2}(2x-4y)$ c) $-\frac{3}{2}\left(2-\frac{5x}{6}\right)$
d) $\left(\frac{2x}{7}-\frac{15}{2}\right)\cdot\frac{7}{10}$ e) $-\frac{8x}{3}\left(6y+\frac{1}{6}\right)$ f) $\frac{4}{9}\left(3x+y+\frac{15}{4}\right)$

20. Simplifique as expressões.

a) $\frac{9x+6}{3}$ b) $\frac{12x+28}{8}$ c) $\frac{9-24y}{15}$ d) $\frac{3x+18y+27}{3}$ e) $\frac{15x-40y-75}{10}$ f) $\frac{4-6x+8y}{16}$

21. Dois ônibus chegaram a um ponto no mesmo horário. Se o primeiro passa a cada 18 minutos, e o segundo a cada 30 minutos, depois de quanto tempo eles voltarão a chegar no ponto no mesmo instante?

22. O mdc entre dois números naturais a e b pode ser facilmente calculado através do **algoritmo de Euclides**. Faça uma pesquisa e descubra como funciona esse algoritmo.

23. Três quartos dos moradores de Chopotó da Serra bebem café regularmente. Desses, dois quintos preferem o café "Serrano". Que fração dos moradores da cidade prefere o café "Serrano"? Que fração dos moradores bebe regularmente café de alguma outra marca?

24. João gastou 1/3 do dinheiro que possuía com um ingresso de cinema. Do dinheiro que restou, João gastou 1/4 comprando pipoca. Que fração do dinheiro total que João possuía foi gasta com a pipoca? Que fração do dinheiro sobrou depois desses gastos?

25. Supondo que os denominadores sejam diferentes de zero, simplifique as expressões abaixo.

a) $\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{3}}{\frac{12-2x}{3}}$ b) $\frac{2+\frac{3}{4}}{\frac{3}{2y}-\frac{2}{5y}}$ c) $\left(\frac{4}{x}-\frac{5}{3x}\right)\frac{6xy}{\sqrt{3}}$

Respostas dos Exercícios 1.4

1. 16/64 = 8/32 = 4/16 = 2/8 = 1/4

2. 36/54 = 18/27 = 6/9 = 2/3

3. a) 3/7 b) 3/4 c) 1/5

4. a) V b) V c) F d) V

5. a) V b) F c) V d) F

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $\frac{5}{2}$ g) $\frac{2}{5}$ h) 0 i) -3 j) -3 k) 15 l) $\frac{1}{15}$ m) $-\frac{2}{3}$ n) -8 o) $\frac{12}{5}$ p) $\frac{5}{3}$

7. São primos: 23, 31, 53, 67, 71.

8. Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36.
Divisores comuns: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

9. a) 9 b) 15 c) 21

10. a) 32 b) 6 c) 4

11. São equivalentes.

12. a) 6 b) 6 c) 12 d) 30

13. a) 450 b) 840 c) 210

14. a) 9/6 e 4/6.
b) 2/6 e 4/6.
c) 9/12 e 10/12.
d) 15/30, 10/30 e 6/30.

15. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{43}{30}$ d) $-\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $-\frac{25}{24}$ g) $\frac{17}{30}$ h) 3 i) 0

16. a) 1 b) 4 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{22}{3}$ e) 8 f) $-\frac{2}{3}$ g) $\frac{8}{33}$ h) $\frac{1}{35}$

17. a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{11}{20}$ d) $\frac{7}{4}$

18. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) 16 d) 3 e) $\frac{20}{9}$ f) 8 g) 2 h) $\frac{55}{2}$ i) $\frac{4}{5}$ j) $-\frac{2}{5}$ k) 1 l) $\frac{1}{6}$ m) 4 n) $\frac{3}{2}$ o) 26

19. a) $\frac{1}{2} - \frac{2x}{3}$ b) $5x - 10y$ c) $\frac{5x}{4} - 3$ d) $\frac{x}{5} - \frac{21}{4}$ e) $-16xy - \frac{4x}{9}$ f) $\frac{4x}{3} + \frac{4y}{9} + \frac{5}{3}$

20. a) $3x + 2$ b) $\frac{3x+7}{2}$ c) $\frac{3-8y}{5}$ d) $x + 6y + 9$ e) $\frac{3x-8y-15}{2}$ f) $\frac{2-3x+4y}{8}$

21. Após 90 minutos.

22. ...

23. Dos moradores, 3/10 bebem café Serrano e 9/20 bebem café de outra marca.

24. João gastou 1/6 do dinheiro com a pipoca. O dinheiro que sobrou corresponde a metade do que ele possuía antes de comprar o ingresso.

25. a) $\frac{1}{2x}$ b) $\frac{5y}{2}$ c) $\frac{14y}{\sqrt{3}}$

1.5 A reta real

Os números naturais obedecem a nossa concepção intuitiva de ordem, ou seja, o número 1 é sucedido pelo número 2 que, por sua vez, é sucedido pelo 3, e assim por diante. Usando esse princípio, quando pegamos a senha de número 25 em um banco, sabemos que só seremos atendidos depois dos clientes com senhas de 1 a 24.

Os números reais também são ordenados, o que nos permite compararará-los, como fazemos com os números naturais. Assim, se a concentração de glicose (glicemia) no sangue de Joaquim é igual a 125 mg/dl, e a concentração no sangue de Mariana equivale a 97 mg/dl, dizemos que a glicemia de Joaquim *é maior* que a de Mariana.

De uma forma geral, dados os números $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que,

- a é **maior** que b, ou simplesmente $a > b$, se $(a - b)$ é um número positivo.
- a é **maior ou igual** a b, ou simplesmente $a \geq b$, se $(a - b)$ é positivo ou zero.
- a é **menor** que b, ou simplesmente $a < b$, se $(a - b)$ é um número negativo.
- a é **menor ou igual** a b, ou simplesmente $a \leq b$, se $(a - b)$ é negativo ou zero.

Escrevendo de maneira mais formal, dizemos que o conjunto dos reais é totalmente ordenado sob $\leq$ porque, dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

- se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
- se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;
- $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Naturalmente, é equivalente afirmar que $a < b$ ou que $b > a$, de modo que qualquer uma dessas duas desigualdades pode ser lida como "a é menor que b", ou como "b é maior que a".

O conceito de ordem dos números reais nos permite representá-los como pontos sobre uma reta orientada, chamada **reta real**. Nessa reta, o número 0 (zero) serve como referência, sendo denominado **origem**. Muitas vezes, a origem é indicada pela letra O.

Os números positivos são apresentados à direita da origem. Uma vez escolhida uma unidade de medida – digamos, centímetros –, o número 1 é mostrado a exatamente uma unidade da origem, o número 2 a duas unidades, e assim sucessivamente. Nesse caso, a distância entre a origem e o ponto que representa um número positivo x é exatamente igual a x unidades. Observe a Figura 1.18.

Os números negativos aparecem à esquerda da origem. O número -1 está uma unidade à esquerda da origem, o número -2 está a duas unidades à esquerda, e assim por diante.

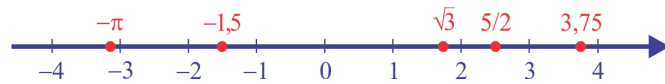



Figura 1.18: A reta real.

Dica
Se $a > b$, então a está à direita de b na reta real. De forma análoga, se $a < b$, então a está à esquerda de b na mesma reta.

Uma expressão que contenha um dos símbolos $<$, $\leq$, $\geq$ ou $>$ é chamada **desigualdade**. Apresentamos abaixo algumas desigualdades válidas:

$$3 > 2; \quad 1 < 3; \quad 5 \geq 5; \quad 10{,}73 \leq 12{,}1; \quad 23{,}7 > 0;$$
$$-8 < -5; \quad 1 > -1; \quad -7 \leq -7; \quad -6{,}2 \geq -7; \quad -312{,}5 \leq 0.$$

Na notação matemática, é permitido juntar duas inequações, como nos exemplos a seguir.

a) $8{,}2 > 7 > 6{,}5$.

b) $-3{,}2 \leq a < 1{,}5 \quad (a \in \mathbb{R})$.

Atenção
Não se pode escrever $2 \geq 1 < 6$, pois isso implicaria que $2 \geq 6$, o que não é correto. Da mesma forma, não é permitido escrever $-5 \leq a \geq 3$, pois não é verdade que $-5 \geq 3$. Assim, não agrupe duas inequações se uma contiver $<$ (ou $\leq$) e outra $>$ (ou $\geq$).

É importante notar que cada uma dessas expressões contém três afirmações:

- No item (a), afirmamos que $8{,}2 > 7$, que $7 > 6{,}5$ e que $8{,}2 > 6{,}5$.
- Do item (b), concluímos que a é um número real que satisfaz, ao mesmo tempo, as desigualdades $a \geq -3{,}2$ e $a < 1{,}5$. Além disso, a expressão também indica que $-3{,}2 < 1{,}5$.

A distância de um ponto x (sobre a reta real) à origem é denominada **valor absoluto** – ou **módulo** – do número x, e é representada por $|x|$. Assim, dizemos que

- o valor absoluto de -3 é 3, ou seja, $|-3| = 3$.
- o valor absoluto de 3 é 3, ou seja, $|3| = 3$.

Como vimos, $|-3| = |3|$, o que indica que esses valores estão à mesma distância da origem. Generalizando esse conceito, dizemos que $|-a| = |a|$ para todo número $a \in \mathbb{R}$. Outros exemplos de valor absoluto são apresentados a seguir:

$$|-10| = 10, \qquad |5{,}4| = 5{,}4, \qquad |-\pi| = \pi, \qquad |0| = 0.$$

Problema 1. Comparação entre números

Substitua o símbolo $\boxdot$ por um dos símbolos $<$ ou $>$, para que as desigualdades sejam válidas.

a) $3213{,}6 \boxdot 288{,}4$.

b) $-127{,}1 \boxdot 13{,}87$.

c) $-27 \boxdot -35$.

d) $-16{,}2 \boxdot -16{,}1$.

e) $42{,}01 \boxdot 42{,}001$.

f) $\frac{3}{11} \boxdot \frac{4}{11}$.

g) $-\frac{7}{15} \boxdot -\frac{8}{15}$.

h) $2 \boxdot \frac{4}{3}$.

i) $\frac{2}{3} \boxdot 0{,}5$.

j) $-1 \boxdot -\frac{3}{4}$.

k) $\frac{1}{6} \boxdot \frac{1}{5}$.

l) $-\frac{1}{6} \boxdot -\frac{1}{5}$.

Solução.

a) Como $3213{,}6 - 288{,}4$ é positivo, podemos escrever $3213{,}6 > 288{,}4$.

b) Todo número negativo é menor que um número positivo. Assim, $-127{,}1 < 13{,}87$.

c) Como $-27 - (-35) = 8$, que é um número positivo, temos $-27 > -35$.

d) Como $-16{,}2 - (-16{,}1) = -0{,}1$, que é negativo, temos $-16{,}2 < -16{,}1$.

e) $42{,}01 - 42{,}001 = 0{,}09 > 0$. Assim, $42{,}01 > 42{,}001$.

f) Como $\frac{3}{11} - \frac{4}{11} = -\frac{1}{11}$, que é negativo, concluímos que $\frac{3}{11} < \frac{4}{11}$.

g) Como $-\frac{7}{15} - \left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{1}{15} > 0$, podemos afirmar que $-\frac{7}{15} > -\frac{8}{15}$.

h) Antes de comparar um número inteiro com uma fração, devemos convertê-lo à forma fracionária. Para converter o número 2 a uma fração com denominador 3 (o mesmo denominador da fração $\frac{4}{3}$), escrevemos

$$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{3}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = \frac{6}{3}.$$

Agora que temos duas frações com o mesmo denominador, podemos calcular $\frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. Como esse valor é positivo, concluímos que $2 > \frac{4}{3}$.

i) Convertendo $\frac{2}{3}$ para a forma decimal, obtemos 0,666.... Como $0{,}666... - 0{,}5 > 0$, deduzimos que $\frac{2}{3} > 0{,}5$.

j) Observamos que $-1 = -\frac{4}{4}$. Como $\left(-\frac{4}{4}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$, que é um número negativo, concluímos que $-1 < -\frac{3}{4}$.

Para saber mais sobre o mmc, consulte a página 38.

k) Para comparar duas frações com denominadores diferentes, devemos reduzi-las ao mesmo denominador. Usando o mmc entre 5 e 6, que vale 30, escrevemos:

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{5}{30} \qquad e \qquad \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30}.$$

Uma vez que $\frac{5}{30} - \frac{6}{30} < 0$, concluímos que $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

Em todos esses exemplos, é possível trocar $<$ por $\leq$, bem como substituir $>$ por $\geq$.

l) Usando a mesma estratégia do exemplo anterior, obtemos $\frac{-1}{6} = -\frac{5}{30}$ e $\frac{-1}{5} = -\frac{6}{30}$. Assim, como $-\frac{5}{30} - \left(-\frac{6}{30}\right) = \frac{1}{30}$, que é um número positivo, escrevemos $-\frac{1}{6} > -\frac{1}{5}$.

Agora, tente o Exercício 6.

Exercícios 1.5

1. Escreva os números -2; 5; $-2{,}5$; 8; $-1{,}5$; π; 0; $\frac{4}{5}$ e $-\frac{3}{4}$ em ordem crescente.

2. Coloque as frações $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{10}$ em ordem crescente.

3. Quantos são os números inteiros negativos

a) maiores que -3;

b) menores que -3.

4. Sejam a, b e c números reais tais que $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$. Encontre o sinal de cada expressão.

a) $a - b$

b) $c - a$

c) $a + bc$

d) $ab + ac$

5. Verifique se as desigualdades são verdadeiras.

a) $\frac{10}{11} < \frac{12}{13}$

b) $\frac{1}{5} > \frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{3}$

d) $-\frac{5}{3} < -\frac{4}{3}$

6. Em cada expressão abaixo, substitua o símbolo $\boxdot$ por um dos sinais $<$, $=$ ou $>$, para que as desigualdades sejam válidas.

a) $-2 \boxdot -3$

b) $\frac{5}{7} \boxdot \frac{4}{7}$

c) $\frac{1}{3} \boxdot \frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{2} \boxdot \frac{4}{6}$

e) $\frac{2}{3} \boxdot \frac{3}{4}$

f) $\frac{3}{2} \boxdot \frac{4}{3}$

g) $\frac{2}{5} \boxdot \frac{3}{7}$

h) $\frac{9}{8} \boxdot \frac{8}{7}$

i) $\frac{8}{9} \boxdot \frac{7}{8}$

j) $\frac{15}{4} \boxdot 4$

k) $\frac{2}{3} \boxdot 0{,}67$

l) $-3{,}27 \boxdot -\frac{13}{4}$

Respostas dos Exercícios 1.5

1. $-2{,}5$; -2; $-1{,}5$; $-3/4$; 0; 4/5; π; 5; 8.

2. $\frac{4}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$.

3. a) Dois (-2 e -1). b) Infinitos.

4. a) Pos. b) Neg. c) Pos. d) Neg.

5. a) V b) F c) F d) V

6. a) $>$ b) $>$ c) $>$ d) $>$ e) $<$ f) $>$ g) $<$ h) $<$ i) $>$ j) $<$ k) $<$ l) $<$

1.6 Razões e taxas

Como vimos, o fato de os números reais serem ordenados nos permite usá-los em comparações. Assim, se tenho R$ 5.000,00 em uma caderneta de poupança e minha irmã tem apenas R$ 2.500,00 aplicados, é fácil perceber que tenho mais dinheiro guardado que ela, pois $5.000 > 2.500$.

Entretanto, em muitas situações, não queremos apenas constatar que um valor é maior que outro, mas avaliar **quão** maior ele é, em termos relativos. Considerando, por exemplo, os investimentos na poupança, se divido o valor que possuo pelo que a minha irmã tem aplicado, obtenho

$$\frac{\text{R\$ } 5.000}{\text{R\$ } 2.500} = 2,$$

o que indica que tenho o dobro do dinheiro investido por ela.

■ Razão

Na Seção 1.1, definimos **razão** como o quociente entre dois números. Agora, veremos como usar esse quociente para comparar valores.

Em nossa comparação, a primeira coisa que exigiremos é que as as grandezas tenham a mesma unidade de medida, de modo que a divisão de um valor pelo outro produza um quociente adimensional, ou seja, sem unidade.

Na comparação das aplicações na caderneta de poupança, por exemplo, os dois valores são expressos em reais, de modo que a razão 2 não tem unidade. Observe que a mesma razão teria sido obtida se os dois valores fossem expressos em centavos, dólares, pesos ou ienes. Em outras palavras, meu investimento na poupança corresponderá sempre ao dobro do que minha irmã possui, não importando a moeda usada na comparação.

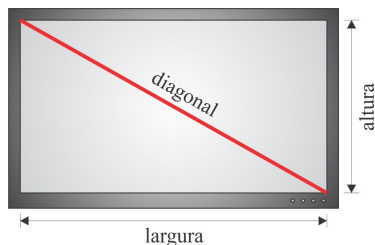



Figura 1.19: Dimensões de uma TV.

Cabe ressaltar que, devido ao arredondamento dos números, algumas dimensões apresentadas na Tabela 1.6 têm razão levemente diferente de 9:16. Poderíamos ter obtido valores mais próximos do esperado usando mais casas decimais.

Exemplo 1. TV de tela plana

Nas televisões modernas, a relação entre altura e largura da tela segue sempre a razão $9 : 16$ (ou $\frac{9}{16}$). É por esse motivo que os fabricantes e os comerciantes costumam anunciar apenas o comprimento da diagonal da tela, em polegadas. A Tabela 1.6 fornece as dimensões aproximadas de alguns modelos de TV, de acordo com o comprimento da diagonal.

Tabela 1.6: Dimensões das televisões.

Diagonal (polegadas)	**Altura (centímetros)**	**Largura (centímetros)**
32	39,8	70,8
40	49,8	88,6
46	57,3	101,8
55	68,5	121,8

Observe que também é possível expressar as dimensões de uma TV de 55” em metros (aproximadamente 0,685 m de altura por 1,218 m de largura), ou ainda em polegadas (aproximadamente 27,0” de altura por 47.9” de largura). Em todos os casos, a razão entre altura e largura é igual a $9 : 16$ (que é um valor adimensional).

Uma das informações mais importantes de um mapa é a escala usada. A escala nada mais é que uma razão que relaciona a distância entre dois pontos A e B do mapa

à distância real entre os pontos que A e B representam. O problema a seguir ilustra como usar a escala para determinar distâncias reais.

Problema 2. Escala de um mapa

A Figura 1.20 mostra um mapa do Acre, na escala 1:5.300.000. Nesse mapa, a capital do estado, Rio Branco, dista aproximadamente 6,5 cm de Feijó, e 111,7 mm de Cruzeiro do Sul. Calcule a distância real aproximada entre Rio Branco e essas duas cidades.

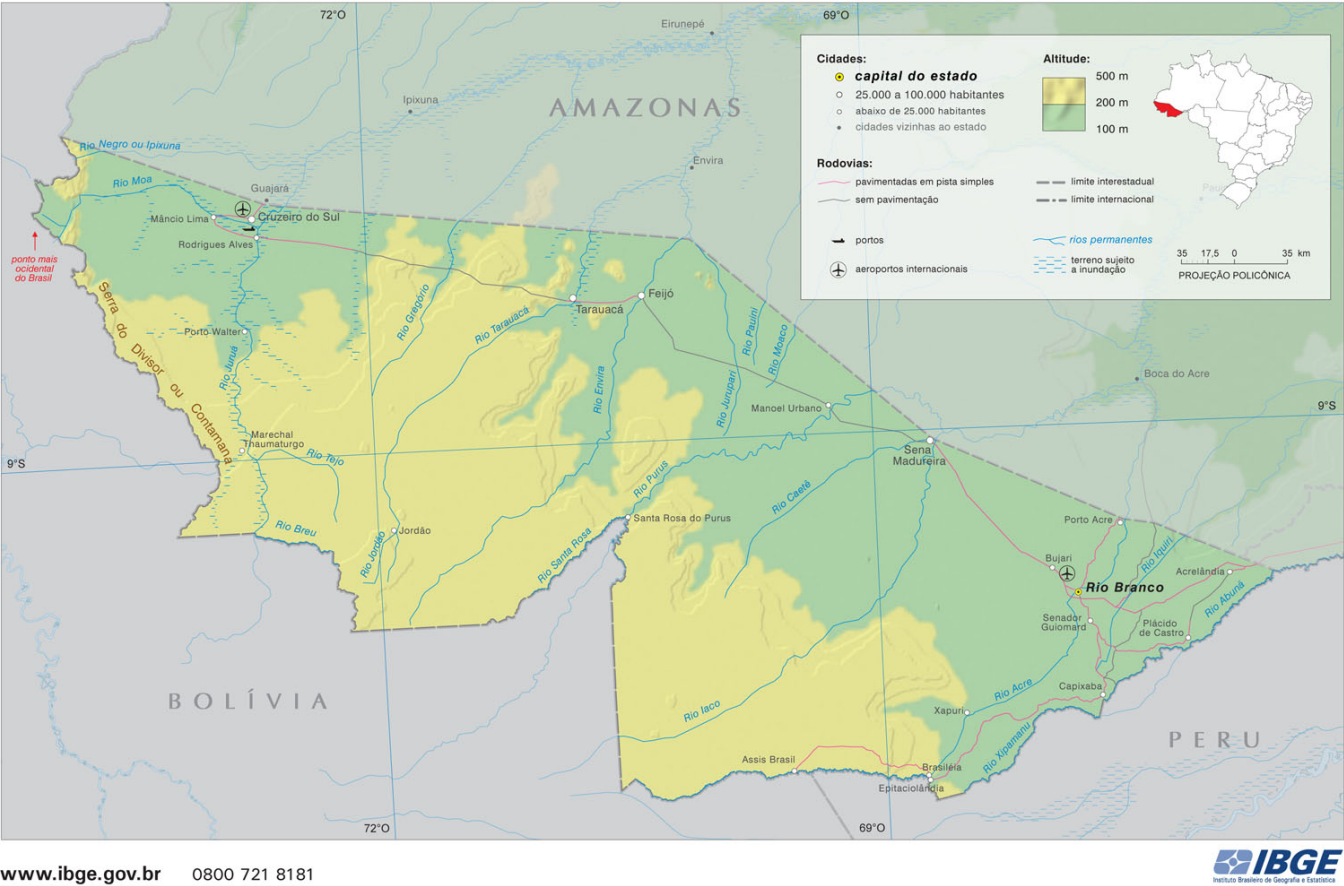



Figura 1.20: Mapa do Acre. Fonte: IBGE.

Solução.

A escala é a razão entre uma distância no mapa e a distância real correspondente. Como a escala é igual a 1:5.300.00, temos

$$\frac{\text{distância no mapa}}{\text{distância real}} = \frac{1}{5.300.000}.$$

Observe que usamos a mesma escala, não importando a unidade empregada para medir a distância no mapa. Naturalmente, quando convertemos uma distância em centímetros, o resultado também será dado em centímetros.

Se os pontos do mapa que representam Rio Branco e Feijó estão a 6,5 cm de distância, então podemos escrever uma fração equivalente àquela usada na escala fazendo

$$\frac{1}{5.300.000} = \frac{1}{5.300.000} \cdot \frac{6{,}5 \text{ cm}}{6{,}5 \text{ cm}} = \frac{6{,}5 \text{ cm}}{34.445.000 \text{ cm}}.$$

Assim, 6,5 cm no mapa correspondem a 34.445.000 cm na vida real, de modo que as cidades distam 344,45 km.

Por sua vez, a distância entre Rio Branco e Cruzeiro do Sul é de 111,7 mm no mapa, o que equivale a

$$5.300.000 \times 111{,}7 = 592.010.000 \text{ mm}$$

na vida real. Convertendo esse valor para quilômetros, descobrimos que as cidades estão a cerca de 592 km de distância.

Problema 3. Gasolina ou álcool?

Segundo as revistas especializadas, só é vantajoso abastecer com álcool o tanque de um carro "flex" quando a razão entre o preço do álcool e o preço da gasolina é menor que 0,7. Se um posto cobra R$ 2,659 por litro de gasolina e R$1,899 por litro de álcool, com que combustível devo encher o tanque de meu carro?

Solução.

A razão entre os preços é

$$\frac{\text{preço do litro do álcool}}{\text{preço do litro da gasolina}} = \frac{\text{R\$ }1{,}899}{\text{R\$ }2{,}659} \approx 0{,}714.$$

Como esse valor é maior que 0,7, é vantajoso abastecer o tanque com gasolina.

Problema 4. Como preparar um refresco

Uma garrafa de suco concentrado de abacaxi contém 500 ml de líquido. Segundo o fabricante, para preparar um refresco de abacaxi, é preciso misturar o concentrado com água, na razão 1:3. Nesse caso, quantos mililitros de água devemos adicionar a 200 ml do suco concentrado? Qual será o volume total de refresco produzido com essa quantidade de concentrado?

Solução.

A razão adequada entre suco concentrado e água é 1:3. Logo,

$$\frac{\text{partes de suco}}{\text{partes de água}} = \frac{1}{3}.$$

Como queremos usar 200 ml de suco para preparar um refresco, devemos encontrar uma fração equivalente a 1:3 que tenha 200 no numerador. Para tanto, escrevemos

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{200 \text{ ml}}{200 \text{ ml}} = \frac{200 \text{ ml}}{600 \text{ ml}}$$

Assim, devemos adicionar 600 ml de água. Nesse caso, o volume total de suco corresponderá a

$$\underbrace{200 \text{ ml}}_{\text{concentrado}} + \underbrace{600 \text{ ml}}_{\text{água}} = 800\text{ml}.$$

Problema 5. Mistura de soluções com concentrações diferentes

Duas embalagens de mesmo volume contêm misturas diferentes de hipoclorito de sódio e água. Na primeira, a razão entre o volume de hipoclorito e o volume de

água é 1:5, enquanto a razão da segunda é 1:9. Se misturarmos todo o conteúdo das embalagens, qual será a razão entre os volumes do hipoclorito de sódio e da água?

Solução.

Na primeira embalagem, o hipoclorito de sódio corresponde a $\frac{1}{1+5}$ do volume, enquanto a água corresponde a $\frac{5}{1+5}$ do volume.

Já na segunda embalagem, o volume de hipoclorito de sódio é $\frac{1}{1+9}$ do total, restando à água os outros $\frac{9}{1+9}$.

Quando efetuamos a mistura, o volume total de hipoclorito passa a ser

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15},$$

cabendo à água um volume de

$$\frac{5}{6}+\frac{9}{10}=\frac{104}{60}=\frac{26}{15}.$$

Observe que a soma dessas frações é 2, indicando que o volume total é o dobro do volume de uma única embalagem.

Finalmente, para calcular a razão resultante da mistura, basta fazer

$$\frac{4/15}{26/15}=\frac{4}{26}=\frac{2}{13}.$$

Assim, a nova mistura conterá 2 partes de hipoclorito de sódio para 13 partes de água.

■ Taxa

Assim como ocorre com a razão, o termo **taxa** também está relacionado a um quociente. O que distingue uma palavra da outra é o uso. Normalmente, empregamos o termo *razão* para indicar uma comparação entre grandezas que têm a mesma unidade, enquanto a palavra *taxa* é mais empregada para expressar um quociente entre medidas fornecidas em unidades diferentes.

Não se preocupe em decorar em que situação cada termo deve ser empregado. O importante é compreender como usar quocientes para expressar relações entre medidas.

Entretanto, essa distinção nem sempre é seguida. Os economistas, por exemplo, costumam usar o termo *taxa de juros* pra representar uma relação entre valores na mesma moeda. Por outro lado, em várias seções desse livro, você encontrará o termo *razão* para representar o quociente entre dois números reais, ainda que com unidades diferentes.

Apresentamos, a seguir, alguns exemplos envolvendo taxas.

Exemplo 6. Densidade demográfica

Dá-se o nome de *densidade demográfica* à taxa de habitantes por unidade de área. Dentre os municípios brasileiros, São João de Meriti, no estado do Rio de Janeiro, é um dos que têm maior densidade demográfica. Nesse município com apenas 35,2 km^2 de área, viviam, em 2010, 458.673 habitantes, o que correspondia a uma densidade demográfica de

$$\frac{458.673\,\text{hab}}{35{,}2\,\text{km}^2}\approx 13.030\ \text{hab/km}^2.$$

Já o município de Japurá, no Amazonas, tinha 7.326 habitantes em 2010, distribuídos por 55.791,9 km^2. Nesse caso, a densidade demográfica era de apenas

$$\frac{7.326\,\text{hab}}{55.791{,}9\,\text{km}^2}\approx 0{,}13\ \text{hab/km}^2.$$

Exemplo 7. Taxa de câmbio

Segundo o Banco Central Europeu, no dia 1 de março de 2013, um euro correspondia a 1,3 dólares americanos. Assim, nesse dia, a taxa de conversão entre moedas era dada por

$$\frac{\text{US\$}\,1{,}30}{€\,1{,}00} = 1{,}3\ \text{US\$}/€.$$

Exemplo 8. Velocidade média

A velocidade de um veículo é um tipo de taxa. Trata-se, mais especificamente, da taxa de variação da distância em relação ao tempo.

Se, em uma viagem, um carro percorreu 500 km em 6,5 horas, sua velocidade média foi de

$$\frac{500\,\text{Km}}{6{,}5\,\text{h}} \approx 76{,}9\ \text{km/h}.$$

Exemplo 9. Taxa de *download*

Quando contratamos um plano de acesso à *internet*, um dos itens aos quais devemos prestar mais atenção é a taxa de *download*, que indica a rapidez com a qual conseguimos transferir arquivos para o nosso computador.

Se "baixei" um arquivo de 250 megabits em 30 segundos, então a taxa efetiva de *download* desse arquivo foi de

$$\frac{250\,\text{Mb}}{30\,\text{s}} \approx 8{,}33\ \text{Mb/s}.$$

Exemplo 10. Vazão em um cano

A taxa de fluxo de um líquido em um cano é chamada *vazão*. Essa taxa fornece o volume de fluido que atravessa uma determinada seção do cano por unidade de tempo. No sistema internacional de unidades, a vazão é geralmente expressa em metros cúbicos por segundo (m^3/s).

Suponha que, quando seu registro é aberto, uma caixa d'água de 2 m^3 seja enchida em 50 minutos. Nesse caso, a vazão no cano que liga o registro à caixa é igual a

Lembre-se de que cada minuto corresponde a 60 segundos, de modo que 50 min equivalem a 50×60 s.

$$\frac{2\,\text{m}^3}{50 \times 60\,\text{s}} \approx 0{,}000667\ \text{m}^3/\text{s}.$$

Problema 11. Consumo de combustível

O rendimento médio de um carro costuma ser definido como o número médio de quilômetros percorridos com um litro de combustível. Esse rendimento varia com o tipo de combustível e com o trânsito que o carro enfrenta. Em uma cidade movimentada e cheia de semáforos, por exemplo, o rendimento é bem menor do que em uma estrada, na qual o veículo trafega a uma velocidade alta e constante.

Considere que, quando abastecido com 50 litros de gasolina, um determinado carro percorra 520 km na cidade e 660 km na estrada. Determine o rendimento médio do carro em cada tipo de tráfego.

Solução.

O rendimento na cidade é igual a

$$\frac{520\,\text{km}}{50\,\ell} = 10{,}4 \text{ km}/\ell.$$

Já na estrada, o rendimento equivale a

$$\frac{660\,\text{km}}{50\,\ell} = 13{,}2 \text{ km}/\ell.$$

Problema 12. Embalagem econômica

Quando vamos ao supermercado, é prudente comparar os preços dos produtos, sem dar muita atenção ao que dizem os cartazes das promoções.

Suponha que, em certo supermercado, uma garrafa de 1,5 litros de um refrigerante custe R$ 2,50, enquanto uma garrafa de 2 litros – em promoção – seja vendida por R$ 3,40. Qual dessas duas embalagens é a mais econômica?

Solução.

Para a garrafa menor, o refrigerante custa

$$\frac{\text{R\$}\,2{,}50}{1{,}5\,\ell} \approx \text{R\$}1{,}67 \text{ por litro.}$$

Por sua vez, o refrigerante na garrafa grande é vendido a

$$\frac{\text{R\$}\,3{,}40}{2\,\ell} = \text{R\$}1{,}70 \text{ por litro.}$$

Assim, apesar da promoção, a garrafa de 1,5 litros é mais econômica.

Exercícios 1.6

1. Pesquisas científicas mostram que a razão entre o comprimento do fêmur e a altura de uma pessoa adulta é de aproximadamente 0,2674. Qual é o comprimento do fêmur de uma pessoa com 1,8 m de altura?
2. A cada 10.000 parafusos produzidos em uma indústria metalúrgica, 1 contém algum defeito. Em um lote de 1.000.000 parafusos, quantos devem ser defeituosos?
3. Um grupo de 19 pessoas ganhou um prêmio de R$ 1.000.000,00 de uma loteria. Quanto dinheiro coube a cada pessoa?
4. No dia 7 de junho de 2013, um dólar americano estava cotado a R$ 2,13 para compra, no câmbio livre. Nessa data, quanto gastaria, em reais, uma pessoa que quisesse comprar US$ 500?
5. Um avião consumiu 98,2 toneladas de combustível em um voo de 13h30. Qual foi o consumo médio de combustível nesse voo, em kg/h?
6. Dirigindo em uma estrada, um motorista percorreu 130 km em 1,5 horas. Será que ele violou o limite de velocidade da estrada, que era de 80 km/h?
7. Usando um telefone celular com tecnologia 3G, José enviou um arquivo de 20 Mb em 15 segundos. Já quando usou um telefone 4G, José conseguiu mandar o mesmo arquivo em apenas 2 segundos.
   a) Qual foi a taxa de *upload* de cada modelo de telefone?
   b) Qual é a razão entre as taxas de *upload* dos modelos 4G e 3G?

8. Segundo o sítio `www.brasileconomico.ig.com.br`, o Brasil possuía, em janeiro de 2013, cerca de 245,2 milhões de linhas de telefone celular, para uma população de 193,4 milhões de habitantes (no dia 1 de julho de 2012, segundo estimativa do IBGE). Qual a taxa de celulares por habitante do país em janeiro de 2013?

9. Um supermercado vende a embalagem de 5 kg de um sabão em pó por R$ 23,00. Já a embalagem de 3 kg custa R$ 13,50. Qual é a embalagem mais econômica?

10. Uma lâmpada fluorescente compacta de 12 W é capaz de produzir um fluxo luminoso de 726 lúmens, ou 726 lm. Já uma lâmpada LED de 8 W produz um fluxo luminoso de 650 lm.

a) Determine a eficiência luminosa, em lm/W, de cada lâmpada.

b) Indique qual lâmpada é mais econômica, ou seja, qual tem a maior eficiência luminosa.

11. Com uma pilha da marca Ultracell, que custa R$ 5,60, um brinquedo funciona por 70 horas. Já uma pilha da marca Supercell mantém o mesmo brinquedo em funcionamento por 80 horas e custa R$ 6,60. Qual pilha devo comprar?

12. Considere três modelos de televisores de tela plana, cujas dimensões aproximadas são fornecidas na tabela abaixo, acompanhadas dos respectivos preços. Com base na tabela, pode-se afirmar que o preço por unidade de área da tela

Modelo	Largura (cm)	Altura (cm)	Preço (R$)
23”	50	30	750,00
32”	70	40	1400,00
40”	90	50	2250,00

a) aumenta à medida que as dimensões dos aparelhos aumentam.

b) permanece constante.

c) permanece constante do primeiro para o segundo modelo, e aumenta do segundo para o terceiro.

d) aumenta do primeiro para o segundo modelo, e permanece constante do segundo para o terceiro.

13. Uma empresa imprime cerca de 12.000 páginas de relatórios por mês, usando uma impressora jato de tinta colorida. Excluindo a amortização do valor da impressora, o custo de impressão depende do preço do papel e dos cartuchos de tinta. A resma de papel (500 folhas) custa R$ 10,00. Já o preço e o rendimento aproximado dos cartuchos de tinta da impressora são dados na tabela abaixo. Qual cartucho preto e qual cartucho colorido a empresa deveria usar para o custo por página ser o menor possível?

Cartucho (cor/modelo)	Preço (R$)	Rendimento (páginas)
Preto BR	90,00	810
Colorido BR	120,00	600
Preto AR	150,00	2400
Colorido AR	270,00	1200

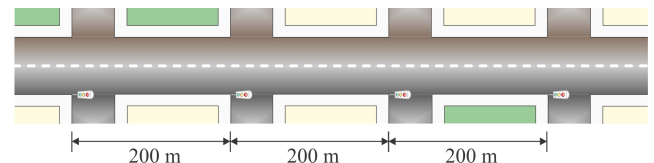
14. Uma empresa de transporte estuda a compra de barcos para a travessia de um trecho marítimo. Dois modelos estão em análise. O modelo *Turbo* transporta 27 pessoas e faz a travessia em 15 minutos. Já o modelo *Jumbo* comporta 34 pessoas, mas gasta 18 minutos no percurso. Considerando que os gastos com manutenção e combustível são equivalentes, qual modelo é mais eficiente?

15. No país Ideal, existem cartões magnéticos recarregáveis (com memória) que permitem a um usuário de transportes coletivos urbanos tomar quantas conduções necessitar, em um período de duas horas (a partir do momento em que ele entra no primeiro veículo), pagando apenas o valor de uma passagem. Cada cartão carregado custa Id$ 10,10, sendo Id$ 1,10 correspondente ao custo operacional e o restante equivalente ao custo de cinco passagens. Nesse caso,

a) Qual é o custo por viagem para uma pessoa que comprou um tal cartão, se ela tomar apenas uma condução a cada período de duas horas?

b) Se, no período de duas horas, um usuário tomasse 3 conduções, que economia (em Id$) ele faria usando esse sistema de cartões?

16. Uma empresa produz dois molhos de pimenta, o Ardidinho e o Pega-fogo, que são obtidos misturando quantidades diferentes dos extratos de pimenta Malagueta e Jalapeño. No molho Ardidinho, a razão entre Malagueta e Jalapeño é 1:3, enquanto no Pega-fogo essa razão é de 3:2. A empresa estuda lançar um novo molho, o Queima-Língua, que é uma mistura de quantidades iguais dos molhos Ardidinho e Pega-fogo. Nesse caso, qual será a razão entre as quantidades de extrato de Malagueta e Jalapeño do novo molho?

17. Uma rua tem um cruzamento a cada 200 m e em cada cruzamento há um semáforo. A figura abaixo mostra os primeiros quatro dos muitos cruzamentos da rua. Os semáforos estão sincronizados, de modo que cada um deles abre exatamente 14,4 segundos depois do anterior.

A que velocidade constante um carro deve trafegar para não ser obrigado a parar em um cruzamento da rua, sem depender do número de semáforos ou do instante no qual ele passa pelo primeiro semáforo?

Respostas dos Exercícios 1.6

1. Cerca de 48 cm.
2. 100 parafusos
3. R$ 52.631,58
4. R$ 1.065,00
5. 7.274 kg/h
6. O carro trafegou a 86,7 km/h, em média, ultrapassando o limite de velocidade.
7. a) 1,333 Mb/s para o modelo 3G e 10 Mb/s para o 4G.
b) 7,5.
8. Cerca de 1,27 aparelhos por habitante.
9. A de 3 kg é mais econômica.
10. a) Fluorescente: 60,5 lm/W. LED: 81,25 lm/W.
b) A lâmpada LED é mais econômica.
11. Devo comprar a Ultracell.
12. (b)
13. Preto AR e Colorido BR.
14. O modelo Jumbo.
15. a) Id$ 2,02 b) Id$ 3,38
16. A razão entre as quantidades dos extratos de Malagueta e Jalapeño será igual a 17:23.
17. 50 km/h

1.7 Porcentagem

A comparação entre frações que têm denominadores diferentes nem sempre é imediata. Para descobrir, por exemplo, qual é o maior valor dentre as frações $\frac{13}{18}$ e $\frac{20}{27}$ é preciso, em primeiro lugar, reescrevê-las como frações equivalentes que têm o mesmo denominador.

Outra alternativa para a comparação de números é a sua conversão para a forma decimal. Assim, tomando como exemplo as mesmas frações citadas acima e calculando

$$\frac{13}{18} = 0{,}7222222\ldots \quad \text{e} \quad \frac{20}{27} = 0{,}7407407\ldots,$$

constatamos que $\frac{13}{18} < \frac{20}{27}$.

Não há nada de errado em usar a forma decimal. Entretanto, a maioria das pessoas acha inconveniente manipular números menores que 1, o que ocorre toda vez que se trabalha com partes de um conjunto, como no exemplo abaixo.

Na calculadora
Quando se converte um número racional para a forma decimal, é costume usar um número limitado de casas decimais. Assim, o número $\frac{13}{18}$ pode ser aproximado por 0,7222, por exemplo. Faça essa conversão em sua calculadora e veja que número ela fornece.

Exemplo 1. Mulheres brasileiras

Segundo o IBGE, em 2010, a população brasileira era composta por 190.755.799 pessoas, das quais 97.348.809 eram mulheres. Logo, a fração da população correspondente às mulheres era de

$$\frac{97348809}{190755799}.$$

Como o numerador e o denominador dessa fração são primos entre si, não há como simplificá-la. Entretanto, podemos aproximá-la por um número decimal, tal como

$$0{,}5103321079.$$

Assim, podemos dizer que as mulheres correspondiam a cerca de 0,51 da população brasileira em 2010. Naturalmente, os 0,49 restantes eram homens, já que $1 - 0{,}51 = 0{,}49$.

Para evitar o uso de 0,51 e 0,49, que são números menores que 1, convertemos esses valores para centésimos, escrevendo

$$0{,}51 = \frac{51}{100} \quad \text{e} \quad 0{,}49 = \frac{49}{100}.$$

Dizemos, então, que cerca de 51 centésimos da população brasileira são mulheres. Razões desse tipo, chamadas *razões centesimais*, são tão frequentes que até temos um termo próprio para isso: porcentagem.

Porcentagem

Dá-se o nome de **porcentagem** a uma razão na forma $a/100$, em que a é um número real. Essa razão é comumente escrita na forma $a\%$. O símbolo "%" significa *por cento*.

A Tabela 1.7 fornece formas equivalentes de se representar alguns números reais. Observe que, para converter um número decimal à forma percentual, basta deslocar a vírgula duas casas para a direita e adicionar o símbolo %.

Tabela 1.7: Formas equivalentes de apresentação de números reais.

Fração	Número decimal	Razão centesimal	Porcentagem
$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{25}{100}$	25%
$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{50}{100}$	50%
$\frac{5}{8}$	0,625	$\frac{62{,}5}{100}$	62,5%
$\frac{713}{1000}$	0,713	$\frac{71{,}3}{100}$	71,3%
1	1,0	$\frac{100}{100}$	100%
$\frac{3}{2}$	1,5	$\frac{150}{100}$	150%

Problema 2. Conversão para a forma percentual

Converta as frações abaixo à forma percentual.

a) 1/20 b) 4/7 c) 1/500 d) 6/5

Depois que um número foi escrito na forma decimal, a conversão à forma percentual pode ser feita mudando a vírgula de lugar (e incluindo alguns zeros à direita, se necessário):

$$\frac{4}{7} \approx 0{,}5714 = 57{,}14\%$$

$$\frac{6}{5} = 1{,}20 = 120\%$$

Solução.

a) $\frac{1}{20} = 0{,}05 = 0{,}05 \cdot \frac{100}{100} = \frac{5}{100} = 5\%.$

b) $\frac{4}{7} \approx 0{,}5714 = \frac{57{,}14}{100} = 57{,}14\%.$

c) $\frac{1}{500} = 0{,}002 = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}2\%.$

d) $\frac{6}{5} = 1{,}2 = 1{,}2 \cdot \frac{100}{100} = \frac{120}{100} = 120\%.$

Agora, tente o Exercício 1.

A porcentagem é usualmente empregada para definir uma fração de uma grandeza, caso em que é suficiente multiplicar o percentual pelo valor medido. Vejamos como calcular percentuais dese tipo.

Problema 3. Domicílios com máquina de lavar

Segundo o IBGE, em 2009, dos 58,578 milhões de domicílios brasileiros, 44,33% tinham máquina de lavar roupas. Calcule aproximadamente em quantos domicílios havia e em quantos não havia máquina de lavar naquele ano.

Solução.

Para calcular o número de domicílios com máquina de lavar roupas, basta multiplicar o percentual pelo número total de domicílios:

$$\frac{44{,}33}{100} \times 58{,}578 \text{ milhões} = 0{,}4433 \times 58{,}578 \text{ milhões} \approx 25{,}968 \text{ milhões}.$$

Por sua vez, o número de domicílios sem máquina pode ser obtido de duas maneiras. A mais simples delas consiste em cacular a diferença entre o número total de domicílios e o número de domicílios com máquina:

$$58{,}578 - 25{,}968 = 32{,}610 \text{ milhões}.$$

Opcionalmente, poderíamos determinar o percentual de domicílios sem máquina, que é $100 - 44{,}33 = 55{,}67\%$, e multiplicá-lo pelo número total de domicílios:

$$\frac{55{,}67}{100} \times 58{,}578 \text{ milhões} = 0{,}5567 \times 58{,}578 \text{ milhões} \approx 32{,}610 \text{ milhões}.$$

Problema 4. Nova matriz energética

A Figura 1.21 mostra a previsão da estrutura da oferta de energia no Brasil em 2030, segundo o plano nacional de energia. Segundo esse plano, a oferta total de energia do país irá atingir 557 milhões de tep (toneladas equivalentes de petróleo) em 2030. Qual será a oferta de energia (em milhões de tep) oriunda de fontes renováveis, em 2030?

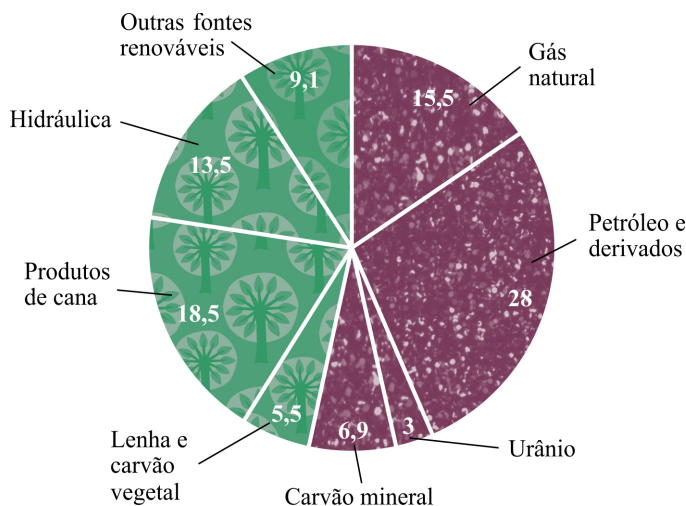



Figura 1.21: Matriz energética brasileira em 2030.

Solução.

Em 2030, as fontes renováveis corresponderão a

$$5{,}5 + 18{,}5 + 13{,}5 + 9{,}1 = 46{,}6\%$$

do total da energia produzida. Assim, a oferta de energia renovável será igual a

$$\frac{46{,}6}{100} \times 557 \approx 259{,}6 \text{ milhões de tep.}$$

Exemplo 5. Rendimento de aplicação financeira

Uma aplicação financeira promete um rendimento de 8% ao ano. Nesse caso, quem depositar R$ 500,00 nessa aplicação, receberá, após um ano,

$$\frac{8}{100} \times 500 = 0{,}08 \times 500 = \text{R\$}\,40{,}00.$$

Vejamos, agora, alguns exemplos nos quais conhecemos a fração de uma grandeza, e queremos determinar a que percentual do valor total ela corresponde.

Problema 6. Alunos do ProFIS

A Tabela 1.8 fornece a cor declarada pelos alunos matriculados na primeira turma do ProFIS. Determine o percentual de alunos daquela turma que se consideram pretos ou pardos.

Tabela 1.8: Alunos e cor.

Cor	Alunos
Branca	71
Preta	13
Parda	35
Amarela	1
Total	120

Solução.

Os alunos pretos e pardos da turma somam $13 + 35 = 48$ pessoas. Assim, a razão entre o número de pretos e pardos e o número total de alunos é igual a

$$\frac{48}{120} = 0{,}4 = 40\%.$$

Portanto, pretos e pardos correspondiam a 40% daquela turma.

Problema 7. Nota em matemática

Godofredo ministrou um curso de matemática para uma turma de 120 alunos, dos quais 87 foram aprovados. Qual foi o percentual de reprovação da turma?

Solução.

Se 87 alunos foram aprovados, então $120 - 87 = 33$ alunos foram reprovados. Esse número corresponde a

$$\frac{33}{120} \approx 0{,}275 = 27{,}5\% \text{ da turma.}$$

■ Crescimento e decrescimento percentual

A imprensa, os economistas, os institutos de pesquisa e os órgãos governamentais costumam fornecer taxas de crescimento ou decrescimento na forma percentual. Os exemplos a seguir mostram como a porcentagem pode ser usada para representar variações.

Problema 8. Salário mínimo

Entre 2012 e 2013, o salário mínimo brasileiro passou de R$ 622,00 para R$ 678,00. Qual foi o aumento percentual do salário nesse período?

Solução.

A variação do salário foi de R$ 678,00 – R$ 622,00 = R$ 56,00. O aumento percentual corresponde à razão

$$\frac{\text{variação do salário}}{\text{salário antes da variação}},$$

escrita na forma de porcentagem. Assim, o aumento foi de

$$\frac{\text{R\$ }56{,}00}{\text{R\$ }622{,}00} = 0{,}090 = 9\%.$$

A variação percentual também pode ser obtida a partir da divisão do salário mínimo novo pelo antigo:

$$\frac{\text{R\$ }678{,}00}{\text{R\$ }622{,}00} = 1{,}090 = 109\%.$$

Esse resultado indica que o novo salário corresponde a 109% do antigo, de modo que a variação percentual equivale a

$$\underbrace{109\%}_{\substack{\text{salário}\\\text{novo}}} - \underbrace{100\%}_{\substack{\text{salário}\\\text{antigo}}} = \underbrace{9\%}_{\text{variação}}.$$

Problema 9. Índice de Gini

O índice (ou coeficiente) de Gini é uma medida de desigualdade criada em 1912 pelo matemático Corrado Gini. Quando aplicado à distribuição de renda, esse índice vale 0 se há igualdade perfeita (ou seja, todas as pessoas investigadas têm a mesma renda) e atinge o valor máximo, 1, quando a concentração de renda é total (isto é, uma pessoa detém toda a renda).

É sabido que a distribuição de renda no Brasil é uma das piores do mundo. Por outro lado, nosso índice de Gini vem sendo reduzido ao longo dos anos, tendo baixado de 0,559, em 2004, para 0,508 em 2011, segundo o IBGE. Calcule a variação percentual do índice nesse período de sete anos.

Solução.

Nesse exemplo, o sinal negativo indica que o índice de Gini diminuiu. Se você preferir, pode calcular 0,559−0,508 e trabalhar com números positivos, desde que se lembre de responder que o índice foi reduzido.

A variação absoluta do índice de Gini entre 2004 e 2011 foi de $0{,}508 - 0{,}559 = -0{,}051$. Dividindo esse valor pelo índice de 2004, obtemos

$$\frac{-0{,}051}{0{,}559} \approx -0{,}091 = -9{,}1\%.$$

Logo, entre 2004 e 2011, o índice de Gini do Brasil foi reduzido em cerca de 9,1%.

Assim como no Problema 8, há um caminho alternativo para a obtenção da variação percentual do índice de Gini, que começa com a divisão do coeficiente de 2011 pelo de 2004:

$$\frac{0{,}508}{0{,}559} \approx 0{,}909 = 90{,}9\%.$$

Como se observa, o índice de 2011 equivalia a 90,9% do índice de 2004. Para encontrar a variação percentual a partir desse valor, basta subtrair 100%:

$$90{,}9 - 100 = -9{,}1\%.$$

Problema 10. Redução do peso das embalagens

A redução do peso das embalagens é um truque muito usado pelas empresas para camuflar o aumento de preço de seus produtos. Em sua última visita ao supermercado, Marinalva observou que o pacote de seu biscoito favorito teve o peso reduzido de 200g para 180g, enquanto o preço baixou de R$ 2,00 para R$ 1,90 por pacote. Determine a variação percentual do preço do quilo desse biscoito.

Solução.

O preço do biscoito, que era de

$$\frac{\text{R\$ } 2{,}00}{0{,}2 \text{ kg}} = \text{R\$ } 10{,}00/\text{kg},$$

passou para

$$\frac{\text{R\$ } 1{,}90}{0{,}18 \text{ kg}} \approx \text{R\$ } 10{,}56/\text{kg},$$

Assim, apesar da aparente redução, o preço subiu R$ 0,56 por quilo, o que corresponde a um aumento de

$$\frac{\text{R\$ } 0{,}56}{\text{R\$ } 10{,}00} = 0{,}056 = 5{,}6\%.$$

Exemplo 11. Televisão com desconto

Uma loja dá um desconto de 15% para quem compra à vista uma televisão que custa, originalmente, R$ 900,00. Nesse caso, o desconto corresponde a

$$900{,}00 \times \frac{15}{100} = 900{,}00 \times 0{,}15 = \text{R\$}135{,}00.$$

Assim, com desconto, a televisão custa R$ 900,00 − R$ 135,00 = R$ 765,00.

Para obter o mesmo resultado de forma mais direta, bastaria calcular

$$900{,}00 \times (1 - 0{,}15) = 900{,}00 \times 0{,}85 = \text{R\$ } 765{,}00.$$

Exemplo 12. Aumento do preço da passagem

A prefeitura de Jurupiranga anunciou que as passagens dos ônibus municipais, que atualmente custam R$ 3,00, subirão 6,67% no próximo mês. Nesse caso, o aumento será de

$$3{,}00 \times \frac{6{,}67}{100} = 3{,}00 \times 0{,}0667 \approx \text{R\$ } 0{,}20.$$

Logo, a passagem passará a custar R$ 3,00 + R$ 0,20 = R$ 3,20.

Poderíamos ter chegado de forma mais rápida a esse valor se tivéssemos calculado, simplesmente,

$$3{,}00 \times (1 + 0{,}0667) = 3{,}00 \times 1{,}0667 \approx \text{R\$ } 3{,}20.$$

Exercícios 1.7

1. Represente as frações abaixo na forma percentual.

a) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{3}{20}$ e) $\frac{1}{8}$ g) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{6}{5}$ h) $\frac{5}{4}$

2. Calcule:

a) 30% de 1500. d) 55% de 300.
b) 12% de 120. e) 98% de 450.
c) 27% de 900. f) 150% de 500.

3. Em uma turma de 40 alunos, 45% são meninos. Quantos meninos e meninas tem a turma?

4. Uma televisão que custava R$ 900,00 teve um aumento de R$ 50,00. Qual foi o percentual de aumento?

5. Um terreno que custava R$ 50.000,00 há dois anos teve uma valorização de 16,5% nos últimos 24 meses. Qual o valor atual do terreno?

6. Uma loja de eletrodomésticos dá 10% de desconto para pagamentos à vista. Quanto se paga à vista, nessa loja, por uma geladeira cujo preço original é R$ 1.200,00?

7. Uma aplicação financeira rende 8,5% ao ano. Investindo R$ 700,00 nessa aplicação, que montante uma pessoa terá após um ano?

8. De uma semana para outra, o preço da berinjela subiu 4% no mercado próximo à minha casa. Se o quilo do produto custava R$ 2,50, quanto pagarei agora?

9. Ao comprar, pela internet, um produto de US$ 125,00 usando seu cartão de crédito, Fernanda pagou 6,38% de IOF e 60% de imposto de importação. Se o dólar estava cotado a R$ 2,15, quanto Fernanda pagou pelo produto, em reais?

10. Uma passagem de ônibus de Campinas a São Paulo custa R$17,50. O preço da passagem é composto por R$ 12,57 de tarifa, R$ 0,94 de pedágio, R$ 3,30 de taxa de embarque e R$ 0,69 de seguro. Se a taxa de embarque aumentar 33,33% e esse aumento for integralmente repassado ao preço da passagem, qual será o aumento percentual total do preço da passagem?

11. Um determinado cidadão recebe um salário bruto de R$ 2500,00 por mês, e gasta cerca de R$ 1.800,00 por mês com escola, supermercado, plano de saúde etc. Uma pesquisa recente mostrou que uma pessoa com esse perfil tem seu salário bruto tributado em 13,3% e paga 31,5% de tributos sobre o valor dos produtos e serviços que consome. Qual o percentual total do salário mensal gasto com tributos?

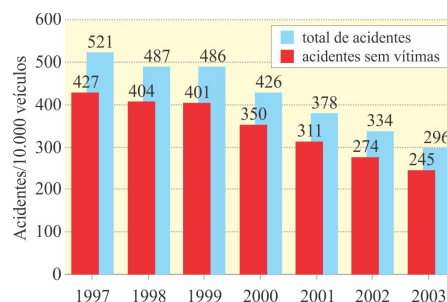
12. Laura e Fernanda queriam participar da prova de salto em distância das olimpíadas de sua escola. Entretanto, só poderiam se inscrever na prova se conseguissem saltar, ao menos, 5 m. Ao começarem o treinamento, dois meses antes das olimpíadas, tanto Laura como Fernanda saltavam apenas 2,6 m. Após um mês, Laura melhorou seu salto em 40%, enquanto Fernanda obteve uma melhora de 70%. Ao final dos dois meses de treinamento, Laura ainda conseguiu dar um salto 40% mais longo do que aquele que dera ao final do primeiro mês. Já Fernanda melhorou o salto do primeiro mês em 10%. Será que as duas meninas conseguiram participar da prova?

13. A cidade de Campinas tem 1 milhão de habitantes e estima-se que 4% de sua população viva em domicílios inadequados. Supondo-se que, em média, cada domicílio tenha 4 moradores, pergunta-se:

a) Quantos domicílios com condições adequadas tem a cidade de Campinas?

b) Se a população da cidade crescer 10% nos próximos 10 anos, quantos domicílios deverão ser construídos por ano para que todos os habitantes tenham uma moradia adequada ao final desse período de 10 anos? Suponha que o número de moradores por domicílio permanecerá inalterado no período.

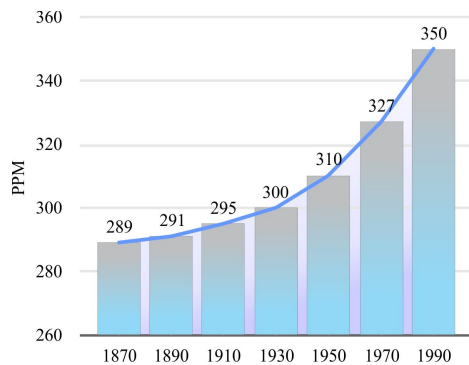
14. A área total ocupada com transgênicos em todo o globo era de 11 milhões de hectares em 1997, tendo subido para 27,94 milhões de hectares em 1998. Determine o crescimento, em porcentagem, da área total ocupada com transgênicos entre esses dois anos.

15. O gráfico abaixo mostra o total de acidentes de trânsito na cidade de Campinas e o total de acidentes sem vítimas, por 10.000 veículos, no período entre 1997 e 2003.

Sabe-se que a frota da cidade de Campinas foi composta por 500.000 veículos em 2003 e que era 4% menor em 2002.

a) Calcule o número de acidentes de trânsito ocorridos em Campinas em 2003.

b) Calcule o número de acidentes com vítimas ocorridos em Campinas em 2002.

16. O gráfico abaixo fornece a concentração de CO^2 na atmosfera, em "partes por milhão" (ppm), ao longo dos

anos. Qual foi o percentual de crescimento da concentração de CO^2 no período de 1930 a 1990?

17. A tabela a seguir mostra os valores estimados da população brasileira nos anos de 2005 e 2050, divididos por faixas etárias. Com base nessa tabela, responda às perguntas abaixo, desprezando a migração internacional.

a) Da população que, em 2005, tinha idade entre 0 e 14 anos, qual percentual falecerá antes de 2050?

b) Quantas pessoas nascidas após 2005 permanecerão vivas em 2050?

c) Sabendo que os indivíduos do sexo masculino corresponderão a 44% da população acima de 60 anos em 2050, qual será a diferença, em habitantes, entre o número de mulheres e o número de homens nessa faixa etária, em 2050?

Faixa etária (em anos)	População (em milhões)	
	2005	2050
de 0 a 14	51,4	46,3
de 15 a 29	50,9	49,5
de 30 a 44	44,3	51,7
de 45 a 59	25,3	48,2
60 ou mais	16,3	64,1
Total	184,2	259,8

18. Em uma loja, uma lavalouças sai por R$ 1500,00 quando se paga à vista, e R$ 1.800,00 quando se opta pelo pagamento em 12 parcelas. Qual é o percentual de aumento do preço para o pagamento em 12 prestações?

19. Luís gastava R$ 60,00 por mês com seu remédio para colesterol e R$ 30,00 com o remédio para pressão. Sabendo que o preço do primeiro subiu 5% e o preço do segundo subiu 2%,

a) Quanto Luís passou a pagar?

b) Qual foi percentual de aumento do gasto total de Luís com esses remédios?

20. Há um ano, uma TV custava R$ 1200,00 e um reprodutor de *blu ray* saía por R$ 500,00. Sabendo que o preço da TV subiu 6% e o preço do aparelho de *blu ray* baixou 4%,

a) Determine o custo atual do conjunto formado pela TV e pelo reprodutor de *blu ray*.

b) Determine a variação percentual total do conjunto formado pelos dois aparelhos.

21. Dos 20.000 domicílios da cidade de Paçoquinha, 85% estão ligados à rede de esgoto. A prefeitura estima que, daqui a 10 anos, o número de domicílios será 10% superior ao valor atual. Quantos domicílios terão que ser ligados à rede nos próximos 10 anos para que, ao final desse período, toda a população seja servida por coleta de esgoto?

22. Às sextas-feiras, uma companhia aérea opera 87 decolagens a partir de determinado aeroporto. A frota da empresa é composta por aeronaves que possuem, em média, 110 lugares, e que têm uma ocupação média de 80% dos assentos por voo. Sabendo que a taxa de embarque nesse aeroporto corresponde a R$ 16,23 por passageiro, determine o valor total arrecadado de taxa de embarque com os voos da companhia que decolam às sextas-feiras do referido aeroporto.

23. Uma organização não governamental realizou uma pesquisa com 1400 pessoas, com o objetivo de analisar as alterações em seus hábitos alimentares nos últimos dois anos. A partir dos resultados obtidos observou-se que

- 23% dos entrevistados não mudaram seu cardápio.
- 364 pessoas alteraram os hábitos alimentares por causa do preço.
- 322 entrevistados alteraram o cardápio por questões de saúde.
- Os demais alteraram a dieta por outros motivos.

Com base nesses dados, podemos concluir que

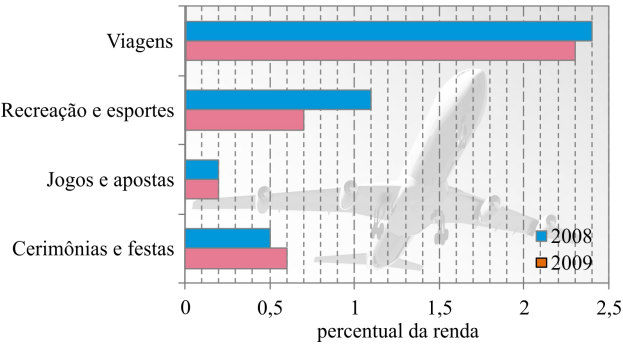
a) 222 pessoas não mudaram o cardápio.

b) 28% dos entrevistados mudaram o cardápo por motivos não relacionados ao preço ou à saúde.

c) 87% das pessoas mudaram o cardápio.

d) 24% das pessoas mudaram o cardápio por causa do preço.

24. Para transportar uma carga, um caminhoneiro faz uma viagem de ida e volta, partindo de Campinas. O trajeto percorrido em cada mão de direção contém 8 praças de pedágio, sendo necessário pagar, em cada uma delas, R$ 4,50 por eixo útil do caminhão. No trajeto de ida, o caminhão vai carregado, de modo que é preciso usar seus três eixos. Já na volta, só dois eixos são usados, para economizar pneus e o gasto com o pedágio. Se o caminhoneiro recebe R$ 3000,00 por viagem de ida e volta, que percentual desse valor ele gasta com pedágio?

25. O gráfico abaixo apresenta os percentuais da renda anual de uma família brasileira gastos com atividades de lazer, nos anos de 2008 e 2009.

Sabendo que a renda anual dessa família foi de R$ 18000,00 em 2008 e de R$ 21000,00 em 2009, calcule a variação (em reais) de seu gasto anual com atividades de lazer entre esses dois anos.

26. O sangue humano costuma ser classificado em diversos grupos, sendo os sistemas ABO e Rh os métodos mas comuns de classificação. A primeira tabela abaixo fornece o percentual da população brasileira com cada combinação de tipo sanguíneo e fator Rh. Já a segunda tabela indica o tipo de aglutinina e de aglutinogênio presente em cada grupo sanguíneo.

Tipo	Fator Rh	
	+	−
A	34,0%	8,0%
B	8,0%	2,0%
AB	2,5%	0,5%
O	36,0%	9,0%

Tipo	Aglutinogênios	Aglutininas
A	A	Anti-B
B	B	Anti-A
AB	A e B	Nenhuma
O	Nenhum	Anti-A e Anti-B

Qual o percentual de brasileiros com aglutinogênio A em seus sangue? Desses brasileiros com aglutinogênio A, que percentual tem sangue A+?

27. A tabela abaixo fornece a divisão percentual dos domicílios brasileiros segundo a faixa de renda em salários mínimos (s.m.). Os dados foram extraídos do censo demográfico 2010, do IBGE, que determinou que o país possuía, naquele ano, cerca de 57,3 milhões de domicílios. Com base nesses dados, determine o número de domicílios com renda superior a 5 salários mínimos, em 2010.

Faixa de renda	%
Até 1. s.m.	22,6
Mais de 1 a 3 s.m.	38,6
Mais de 3 a 5 s.m.	17,4
Mais de 5 a 10 s.m.	13,6
Mais de 10 s.m.	7,6

28. Carlinhos fez três provas de matemática. A nota da segunda prova foi 30% melhor que a da primeira, e a nota da terceira prova foi 30% melhor que a nota da segunda. Nesse caso, qual foi o aumento percentual da nota de Carlinhos entre a primeira e a terceira prova?

29. Em 2000, a taxa de incidência de AIDS em um país era igual a 2500 casos para cada 100.000 habitantes.

a) Calcule o percentual da população acometido de AIDS em 2000.

b) Entre 2000 e 2010, a taxa de incidência de AIDS nesse país baixou para 2250 casos por 100.000 habitantes. Calcule a variação percentual da taxa de incidência nesse período.

c) Sabendo que o país tinha 2.000.000 habitantes em 2000 e que a população cresceu 20% entre 2000 e 2010, calcule o número de portadores de AIDS em 2010.

30. Há um ano, um pacote de viagem custava R$ 1.800,00, dos quais R$ 600,00 correspondiam às passagens e R$ 1200,00 à hospedagem. Sabendo que, de lá para cá, o preço da passagem subiu 6% e a hospedagem subiu 9%,

a) calcule o preço atual do pacote turístico;

b) determine o aumento percentual do preço do pacote no período de um ano.

31. Em 01/09/2013, o dólar comercial estava cotado a R$ 2,385. Um ano depois, a moeda americana estava 5,87% mais barata. Por outro lado, entre 01/09/2014 e 01/09/2015, o valor do dólar teve um aumento de 64,28%.

a) Calcule o valor do dólar em 01/09/2014 e em 01/09/2015.

b) Determine a variação percentual da moeda entre 01/09/2013 a 01/09/2015.

Respostas dos Exercícios 1.7

1. a) 70% b) 20% c) 15% d) 75% e) 12,5% f) 120% g) 66,7% h) 125%

2. a) 450 b) 14,4 c) 243 d) 165 e) 441 f) 750

3. 18 meninos e 22 meninas.

4. 5,56%

5. R$ 58.250,00

6. R$ 1.080,00

7. R$ 759,50

8. R$ 2,60 por quilo.

9. R$ 457,43.

10. 6,3%

11. 36%

12. Não. Apenas Laura participou da prova.

13. a) 240.000 domicílios. b) 3.500 domicílios por ano.

14. 154%

15. a) 14.800 acidentes de trânsito em 2003. b) 2.880 acidentes com vítimas em 2002.

16. 16,7%

17. a) 6,23%. b) 147,5 milhões de pessoas. c) 7,7 milhões de habitantes.

18. 20%.

19. a) R$ 93,60 b) 4%

20. a) R$ 1752,00 b) 3,06%

21. 5.000 domicílios.

22. R$ 124.256,88

23. (b)

24. 6%
25. Houve um aumento de R$ 42,00.
26. Dos brasileiros 45% têm aglutinogênio A. Desses, cerca de 75,6% têm sange A+.
27. 12,1 milhões de domicílios.
28. 69%
29. a) 2,5%
b) Houve uma redução de 10%.
c) 54.000 pessoas
30. a) R$ 1944,00 b) 8%
31. a) R$ 3,688 b) 54,6%

1.8 Potências

Em nossa vida prática, é muito comum termos que calcular o produto de termos repetidos. Apenas para citar um exemplo geométrico muito simples, a área A de um quadrado de lado (ou aresta) ℓ é representada por

$$A = \ell \times \ell.$$

Há casos, entretanto, em que o número de termos repetidos é muito maior, como mostram os exemplos abaixo.

Problema 1. Torneio de tênis

Em um torneio de tênis, a cada rodada, os jogadores são agrupados em pares, e o vencedor de cada partida passa para a rodada seguinte. Determine o número de jogadores que podem participar de um torneio com 5 rodadas.

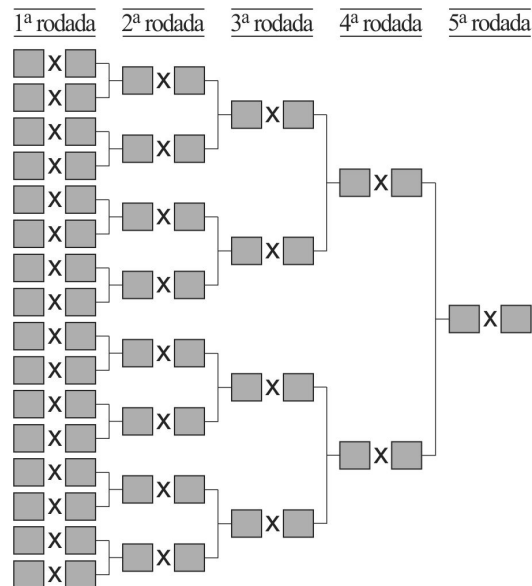



Figura 1.22: Jogos do torneio de tênis.

Solução.

A análise desse problema fica mais simples se começamos pela última rodada. No jogo final do torneio, dois tenistas se enfrentam para decidir quem será o campeão. Já na rodada anterior, a quarta, são realizados os dois jogos semifinais, nos quais quatro tenistas disputam as vagas na final. Repetindo esse raciocínio, reparamos que, a cada rodada que recuamos, o número de jogos (e de jogadores) é multiplicado por dois. A Figura 1.22 mostra os jogos de cada etapa do torneio.

Lembrando que cada jogo envolve dois tenistas, podemos concluir que a primeira rodada tem

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \text{ tenistas.}$$

Problema 2. Empréstimo bancário

Há seis meses, João teve algumas dificuldades financeiras que o fizeram recorrer a um empréstimo bancário de R$ 1000,00. Ao firmar contrato com João, o banco estipulou uma taxa de juros de 4% ao mês. Supondo que, de lá para cá, João não teve condições de abater sequer uma pequena parcela de sua dívida, calcule o montante a ser pago ao banco.

Solução.

Não se preocupe se você não entendeu como a dívida de João é atualizada mensalmente. Voltaremos a esse assunto no Capítulo 5.

Como a taxa de juros correspondia a 4%, a dívida de João foi multiplicada por 1,04 a cada mês. Assim, após seis meses, ela atingiu

$$1000 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \text{ reais.}$$

Os problemas acima envolvem o produto de termos repetidos. Como observamos, é cansativo escrever esse produto por extenso. Imagine, então, o que aconteceria se a dívida de João ficasse acumulada por 24 meses.

A forma mais prática de representar esse tipo de produto envolve o uso de **potências**. A definição formal de potência com expoente natural é dada a seguir.

Potência com expoente positivo

Se a é um número real e n é um número natural, definimos a n-ésima potência de a como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ termos}},$$

em que a é a **base** e n o **expoente** da potência. Em geral, lemos a^n como "a elevado à n-ésima potência", ou simplesmente "a elevado a n."

Você sabia?

Algumas potências recebem um nome especial. Por exemplo, a potência a^2 é denominada "a **ao quadrado**", enquanto a^3 é dita "a **ao cubo**".

Usando essa notação, podemos escrever

$$\ell \cdot \ell = \ell^2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$$1000 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 1000 \cdot 1{,}04^6$$

Exemplo 3. Cálculo de potências

a) $1{,}5^5 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 7{,}59375$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

c) $\frac{3^3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2}$

d) $(-4)^4 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 256$

e) $-4^4 = -(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = -256$

Vejamos, agora, algumas propriedades úteis na manipulação de potências. A primeira diz respeito ao produto de potências com a mesma base.

Voltando ao problema do empréstimo bancário, sabemos que, após seis meses, a dívida de João, que era igual a R$ 1000,00, foi multiplicada por $1{,}04^6$. Agora, vamos supor que João tenha deixado de quitar sua dívida por outros 3 meses. Nesse caso, para determinar o novo valor a pagar, teremos que multiplicar a dívida não somente por $1{,}04^6$, mas também por $1{,}04^3$, como mostrado abaixo.

$$\underbrace{1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04}_{\text{Primeiros 6 meses}} \cdot \underbrace{1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04}_{\text{Novos 3 meses}} = 1{,}04^6 \cdot 1{,}04^3 = 1{,}04^9 = 1{,}04^{6+3}.$$

De uma forma geral, se a representa um número real e m e n são dois inteiros positivos, podemos escrever

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ termos}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ termos}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ termos}} = a^{m+n}.$$

Essa e outras propriedades importantes das potências são apresentadas no quadro a seguir.

Propriedades das potências

Suponha que a e b sejam números reais, e que os denominadores sejam sempre diferentes de zero.

	Propriedade	**Exemplo**
1.	$a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$
2.	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$
3.	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$
4.	$(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$
5.	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4}$

Demonstrar que as propriedades 2 a 5 são válidas é tarefa simples, que o próprio leitor pode fazer. Para tanto, basta escrever por extenso o significado de cada expressão.

O uso correto dessas propriedades é essencial para a resolução de problemas que envolvam expressões e equações algébricas. De fato, boa parte dos erros cometidos por alunos de cursos de matemática provém do emprego de regras que não constituem propriedades das operações aritméticas.

Assim, se você ainda não conhece uma expressão equivalente a $(x-4)^2$, não ceda à tentação de escrever $x^2 - 4^2$, pois isso não está correto. Alguns erros frequentes de manipulação de potências são apresentados na Tabela 1.9.

Veremos como calcular $(3+x)^2$ na Seção 5 do Capítulo 2.

Tabela 1.9: Erros comuns na manipulação de potências.

Falsa propriedade	**Exemplo com erro**	**Propriedade correta**	**Exemplo correto**
$(a+b)^n = a^n + b^n$	$(3+x)^2 = 3^2 + x^2$	$(ab)^n = a^n b^n$	$(3x)^2 = 3^2 x^2$
$a^{m+n} = a^m + a^n$	$4^{2+x} = 4^2 + 4^x$	$a^{m+n} = a^m a^n$	$4^{2+x} = 4^2 4^x$
$a \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2 \cdot 10^3 = 20^3$	$(ab)^n = a^n b^n$	$20^3 = 2^3 10^3$
$a^{mn} = a^m a^n$	$3^{2x} = 3^2 3^x$	$a^{mn} = (a^m)^n$	$3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$

■ Expoentes negativos

Em todos os exemplo de potências que apresentamos até o momento, os expoentes eram números positivos. Entretanto, é fácil notar que, se $m < n$, o termo a^{m-n}, apresentado na Propriedade 2 acima, terá um expoente negativo. Será que isso é possível?

Para responder a essa pergunta, vamos recorrer a um exemplo numérico. Suponhamos, então, que $a = 5$, $m = 4$ e $n = 7$, de modo que, pela Propriedade 2,

$$\frac{5^4}{5^7} = 5^{4-7} = 5^{-3}.$$

Calculemos, agora, o valor de $\frac{5^4}{5^7}$ usando a definição de potência.

$$\frac{5^4}{5^7} = \frac{5\cdot5\cdot5\cdot5}{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5^3}.$$

Assim, nesse caso, a Propriedade 2 será válida se adotarmos a convenção

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a Propriedade 2 nos diz que

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0.$$

Por outro lado, segundo a definição de potência,

$$\frac{4^3}{4^3} = \frac{4\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot4} = 1.$$

Nesse caso, a Propriedade 2 permanecerá válida se adotarmos $4^0 = 1$.

Generalizando essas ideias para todo número real a, exceto o zero, chegamos às definições resumidas no quadro abaixo.

Expoente zero e expoente negativo

Se a é um número real diferente de zero, então definimos

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Usando essa notação, é fácil mostrar que todas as propriedades apresentadas acima são válidas mesmo que os expoentes sejam negativos. Para provar a Propriedade 2, por exemplo, basta escrever

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m \text{ termos}}}\cdot\frac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-m \text{ termos}}} = \frac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-m \text{ termos}}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Observe que, se $m < n$, então $a^n = a^m a^{n-m}$, com $n - m > 0$.

Exemplo 4. Propriedades das potências com expoentes negativos

a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

b) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

c) $-2^{-4} = -\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{16}$

d) $0{,}5^{-4} = \frac{1}{0{,}5^4} = \frac{1}{0{,}0625} = 16$

e) $\frac{10^{-3}}{6} = \frac{1}{6\cdot10^3} = \frac{1}{6000}$

f) $\frac{1}{4^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{4^3}} = 1\cdot\frac{4^3}{1} = 4^3 = 64$

Atenção

Observe a importância do uso dos parênteses, comparando os exemplos (b) e (c).

g) $\dfrac{2^{-3}}{6^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{6^2}} = \dfrac{1}{2^3} \cdot \dfrac{6^2}{1} = \dfrac{6^2}{2^3} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2}$

h) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2} = \dfrac{5^{-2}}{3^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{5^2}}{\frac{1}{3^2}} = \dfrac{1}{5^2} \cdot \dfrac{3^2}{1} = \dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{9}{25}$

Agora, tente os Exercícios 8 e 9.

Os exemplos (f), (g) e (h) ilustram algumas propriedades importantes dos expoentes negativos, as quais reproduzimos no quadro abaixo. De fato, essas propriedades decorrem da simples combinação das propriedades das potências com a definição de expoente negativo.

Propriedades dos expoentes negativos

Suponha que a e b sejam números reais diferentes de zero.

	Propriedade	Exemplo
6.	$\dfrac{1}{b^{-n}} = b^n$	$\dfrac{1}{3^{-7}} = 3^7$
7.	$\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^m}$	$\dfrac{5^{-3}}{4^{-2}} = \dfrac{4^2}{5^3}$
8.	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$	$\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-5} = \dfrac{3^5}{4^5}$

■ Simplificação de expressões com potências

Em muitas situações práticas, trabalhamos com expressões que envolvem potências de termos literais. O problema abaixo mostra como simplificar essas expressões com o emprego das propriedades das potências.

Problema 5. Simplificação de expressões com potências

Simplifique as expressões abaixo, supondo que os denominadores são diferentes de zero.

a) $z^2 z^5$

b) $(2x^6)^4$

c) $\dfrac{w^7}{w^3}$

d) $(5x^4y^2)(x^2yz)^3$

e) $\left(\dfrac{3}{t^6}\right)^2$

f) $\dfrac{3x^2y^6z^3}{12y^2zx^4}$

g) $y^3 \cdot y^{-4}$

h) $\left(\dfrac{2x^5y}{z}\right)^2 \left(\dfrac{z^2}{x^4y}\right)$

i) $\dfrac{15}{(5y)^{-2}}$

j) $\dfrac{v^2w^{-2}}{w^3v^{-1}}$

k) $(5u^3v^{-2})(uvt^{-1})^{-3}$

l) $\left(\dfrac{xy}{z^2}\right)^{-3}$

m) $\left(\dfrac{x^{-5}}{z^4}\right)^{-2}$

n) $\dfrac{2w^3}{y^2} - \dfrac{w^6y^3}{2y^5w^3}$

Solução.

a)

$$z^2z^5 = z^{2+5} \quad \text{Propriedade 1.}$$
$$= z^7 \quad \text{Simplificação do resultado.}$$

b)

$$\begin{aligned}(2x^6)^4 &= 2^4(x^6)^4 && \text{Propriedade 4.}\\ &= 2^4x^{6\cdot 4} && \text{Propriedade 3.}\\ &= 16x^{24} && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{w^7}{w^3} &= w^{7-3} && \text{Propriedade 2.}\\ &= w^4 && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(5x^4y^2)(x^2yz)^3 &= (5x^4y^2)[(x^2)^3y^3z^3] && \text{Propriedade 4.}\\ &= (5x^4y^2)[x^{2\cdot 3}y^3z^3] && \text{Propriedade 3.}\\ &= 5x^{4+6}y^{2+3}z^3 && \text{Propriedade 1.}\\ &= 5x^{10}y^5z^3 && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{t^6}\right)^2 &= \frac{3^2}{(t^6)^2} && \text{Propriedade 5.}\\ &= \frac{3^2}{t^{6\cdot 2}} && \text{Propriedade 3.}\\ &= \frac{9}{t^{12}} && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{3x^2y^6z^3}{12y^2zx^4} &= \frac{3}{12}\cdot\frac{x^2}{x^4}\cdot\frac{y^6}{y^2}\cdot\frac{z^3}{z} && \text{Reagrupamento dos termos.}\\ &= \frac{3}{12}x^{2-4}y^{6-2}z^{3-1} && \text{Propriedade 2.}\\ &= \frac{x^{-2}y^4z^2}{4} && \text{Simplificação da expressão.}\\ &= \frac{y^4z^2}{4x^2} && \text{Eliminação do expoente negativo.}\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}y^3\cdot y^{-4} &= y^{3+(-4)} && \text{Propriedade 1.}\\ &= y^{-1} && \text{Simplificação da expressão.}\\ &= \frac{1}{y} && \text{Eliminação do expoente negativo.}\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x^5y}{z}\right)^2\left(\frac{z^2}{x^4y}\right) &= \left(\frac{2^2(x^5)^2y^2}{z^2}\right)\left(\frac{z^2}{x^4y}\right) && \text{Propriedade 4.}\\ &= \left(\frac{2^2x^{5\cdot 2}y^2}{z^2}\right)\left(\frac{z^2}{x^4y}\right) && \text{Propriedade 3.}\\ &= 2^2\cdot\frac{x^{10}}{x^4}\cdot\frac{y^2}{y}\cdot\frac{z^2}{z^2} && \text{Reagrupamento dos termos.}\\ &= 2^2x^{10-4}y^{2-1}z^{2-2} && \text{Propriedade 2.}\\ &= 4x^6y && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

i)

$$\frac{15}{(5y)^{-2}} = 15(5y)^2 \quad \text{Propriedade 6.}$$

$$= 15 \cdot 5^2 y^2 \quad \text{Propriedade 4.}$$

$$= 375y^2 \quad \text{Simplificação do resultado.}$$

j)

$$\frac{v^2 w^{-2}}{w^3 v^{-1}} = \frac{v^2 v}{w^3 w^2} \quad \text{Propriedade 7.}$$

$$= \frac{v^{2+1}}{w^{3+2}} \quad \text{Propriedade 1.}$$

$$= \frac{v^3}{w^5} \quad \text{Simplificação do resultado.}$$

k)

$$(5u^3v^{-2})(uvt^{-1})^{-3} = (5u^3v^{-2})[u^{-3}v^{-3}(t^{-1})^{-3}] \quad \text{Propriedade 4.}$$

$$= (5u^3v^{-2})[u^{-3}v^{-3}t^{(-1)\cdot(-3)}] \quad \text{Propriedade 3.}$$

$$= (5u^3v^{-2})[u^{-3}v^{-3}t^3] \quad \text{Simplificação da expressão.}$$

$$= 5u^{3+(-3)}v^{-2+(-3)}t^3 \quad \text{Propriedade 1.}$$

$$= 5v^{-5}t^3 \quad \text{Simplificação da expressão.}$$

$$= \frac{5t^3}{v^5} \quad \text{Eliminação do expoente negativo.}$$

l)

$$\left(\frac{xy}{z^2}\right)^{-3} = \frac{(z^2)^3}{(xy)^3} \quad \text{Propriedade 8.}$$

$$= \frac{z^{2\cdot 3}}{(xy)^3} \quad \text{Propriedade 3.}$$

$$= \frac{z^{2\cdot 3}}{x^3y^3} \quad \text{Propriedade 4.}$$

$$= \frac{z^6}{x^3y^3} \quad \text{Simplificação do resultado.}$$

m)

$$\left(\frac{x^{-5}}{z^4}\right)^{-2} = \frac{(z^4)^2}{(x^{-5})^2} \quad \text{Propriedade 8.}$$

$$= \frac{z^{4\cdot 2}}{x^{(-5)\cdot 2}} \quad \text{Propriedade 3.}$$

$$= \frac{z^8}{x^{-10}} \quad \text{Simplificação da expressão.}$$

$$= z^8x^{10} \quad \text{Propriedade 6.}$$

n)

$$\frac{2w^3}{y^2} - \frac{w^6y^3}{2y^5w^3} = \frac{2w^3}{y^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{w^6}{w^3}\cdot\frac{y^3}{y^5} \quad \text{Reagrupamento dos termos.}$$
$$= \frac{2w^3}{y^2} - \frac{w^{6-3}y^{3-5}}{2} \quad \text{Propriedade 2.}$$
$$= \frac{2w^3}{y^2} - \frac{w^3y^{-2}}{2} \quad \text{Simplificação da expressão.}$$
$$= \frac{2w^3}{y^2} - \frac{w^3}{2y^2} \quad \text{Eliminação do expoente negativo.}$$
$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\frac{w^3}{y^2} \quad \text{Propriedade distributiva.}$$
$$= \frac{3w^3}{2y^2} \quad \text{Subtração da fração.}$$

Agora, tente os Exercícios 10 e 12.

Notação científica

Observe as frases abaixo e descubra o que elas têm em comum:

"No início de 2012, a população mundial era estimada em 7.068.000.000 habitantes."

"O rinovírus (causador do resfriado) tem cerca de 0,00000003 metros de diâmetro."

"O número de moléculas de água em um litro do líquido é de aproximadamente 33.400.000.000.000.000.000.000.000."

"Um átomo de Carbono 12 tem massa atômica equivalente a cerca de 0,0000000000000000000000199 gramas."

Se você disse que essas frases envolvem números que dão muito trabalho para escrever, acertou. Números muito grandes ou muito próximos de zero são um tormento para quem trabalha com a notação decimal.

Em alguns casos, é possível contornar esse problema mudando a unidade de medida. Assim, se usarmos o *nanômetro* (nm) como medida de comprimento, o tamanho do rinovírus pode ser escrito como 30 nm. Da mesma forma, se a nossa unidade de massa atômica for o *dalton* (u), a massa atômica do Carbono 12 poderá será representada simplesmente por 12 u.

1 nm = 0,000000001 m.

Usando uma calculadora, descubra a quantos gramas corresponde 1 dalton.

Entretanto, a mudança de unidade nem sempre é uma solução, já que, muitas vezes, precisamos efetuar operações aritméticas ou comparar números grandes com outros muito próximos de zero. Nesses casos, o melhor é escrever esses números usando o que chamamos de **notação científica**.

> Um número real está em notação científica se é escrito na forma
>
> $$\pm m \times 10^n,$$
>
> em que o **coeficiente** m é um número real maior ou igual a 1 e menor que 10, e o **expoente** n é um número inteiro.

Na calculadora

A maioria das calculadoras admite a representação de números na notação científica. Entretanto, em muitas delas o expoente aparece depois da letra `E`, que também pode aparecer na forma minúscula: `e`.
Assim, o número $5{,}7201 \times 10^{-4}$, por exemplo, pode aparecer no visor da calculadora na forma `5.7201E-04` ou `5.7201e-04`.

Para trabalhar com números na notação científica, é preciso saber lidar com potências de 10. A Tabela 1.10 mostra como algumas dessas potências podem ser representadas.

Tabela 1.10: Representações de potências de 10.

Forma decimal	**Forma de produto**	**Forma de potência**
0,0001	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$	10^{-4}
0,001	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$	10^{-3}
0,01	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$	10^{-2}
0,1	$\frac{1}{10}$	10^{-1}
1	1	10^{0}
10	10	10^{1}
100	$10\cdot 10$	10^{2}
1000	$10\cdot 10\cdot 10$	10^{3}
10 000	$10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$	10^{4}

Observando a tabela, constatamos que há uma relação entre o expoente da potência e o número de zeros antes e depois da vírgula decimal. Cada vez que movimentamos a vírgula um algarismo para a direita, aumentamos o expoente de 10 em uma unidade. Por outro lado, ao movermos a vírgula um algarismo para a esquerda, o expoente de 10 é reduzido em uma unidade. Essa relação é melhor explorada no Problema 6.

Problema 6. Conversão para a notação científica

Observe que os números usados nesse problema são aqueles apresentados no início da seção.

Converta os números abaixo para a notação científica.

a) 500.000

b) 7.068.000.000

c) 0,00000003

d) 33.400.000.000.000.000.000.000.000

e) 0,0000000000000000000000000199

Solução.

a) Embora o número 500000 seja inteiro e, portanto, não apresente a vírgula que separa a parte inteira da parte fracionária, podemos escrevê-lo na forma equivalente 500000,0.

Como o coeficiente m de um número expresso na notação científica deve ser maior ou igual a 1 e menor que 10, precisamos deslocar a vírgula cinco algarismos para a esquerda, aumentando o expoente de 10 em uma unidade a cada passo, como se observa abaixo:

$$\begin{aligned} 500.000{,}0 &= 500000{,}0\times 10^{0}\\ &= 50000{,}00\times 10^{1}\\ &= 5000{,}000\times 10^{2}\\ &= 500{,}0000\times 10^{3}\\ &= 50{,}00000\times 10^{4}\\ &= 5{,}000000\times 10^{5}\end{aligned}$$

Assim, em notação científica, o número 500.000 é escrito como 5×10^{5}.

b) Repetindo o que foi feito no item acima, temos

$$\begin{aligned} 7.068.000.000{,}0 &= 7068000000{,}0 \times 10^0 \\ &= 706800000{,}00 \times 10^1 \\ &= 70680000{,}000 \times 10^2 \\ &= 7068000{,}0000 \times 10^3 \\ &= 706800{,}00000 \times 10^4 \\ &= 70680{,}000000 \times 10^5 \\ &= 7068{,}0000000 \times 10^6 \\ &= 706{,}80000000 \times 10^7 \\ &= 70{,}680000000 \times 10^8 \\ &= 7{,}0680000000 \times 10^9 \end{aligned}$$

Logo, em notação científica, temos $7{,}068 \times 10^9$.

c) Para escrever o número 0,00000003 na notação científica, devemos mover a vírgula para a direita, como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} 0{,}00000003 &= 0{,}00000003 \times 10^0 \\ &= 0{,}0000003 \times 10^{-1} \\ &= 0{,}000003 \times 10^{-2} \\ &= 0{,}00003 \times 10^{-3} \\ &= 0{,}0003 \times 10^{-4} \\ &= 0{,}003 \times 10^{-5} \\ &= 0{,}03 \times 10^{-6} \\ &= 0{,}3 \times 10^{-7} \\ &= 3{,}0 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

Logo, 0,00000003 pode ser escrito como 3×10^{-8}

d) Como o número 33.400.000.000.000.000.000.000.000,0 tem 25 algarismos após o primeiro algarismo e antes da vírgula decimal (os algarismos indicados em vermelho), deve-se mover a vírgula para a esquerda 25 vezes. Com isso, o número assume a forma $3{,}34 \times 10^{25}$.

e) Para que a vírgula do número 0,000000000000000000000000000199 apareça logo após o algarismo 1, é preciso movê-la 26 algarismos para a direita (os algarismos em vermelho). Assim, em notação científica, esse número é escrito como $1{,}99 \times 10^{-26}$.

Agora, tente o Exercício 18.

Na conversão da notação científica para a forma decimal usual, movemos a vírgula no sentido contrário, como mostra o problema abaixo.

Problema 7. Conversão para a notação decimal

Converta os números abaixo para a notação decimal.

a) 7×10^4 b) $-2{,}178 \times 10^7$ c) 2×10^{-5} d) $8{,}031 \times 10^{-9}$

Solução.

a) Nesse problema, o expoente é positivo, de modo que

$$\begin{aligned} 7{,}0 \times 10^4 &= 70{,}0 \times 10^3 \\ &= 700{,}0 \times 10^2 \\ &= 7000{,}0 \times 10^1 \\ &= 70000{,}0 \times 10^0 \end{aligned}$$

Logo, $7 \times 10^4 = 70000$.

b) Para converter $-2{,}178 \times 10^7$ à forma decimal usual basta mover a vírgula 7 algarismos para a direita. Portanto, $-2{,}178 \times 10^7 = -21780000$.

c) Como, nesse exemplo, o expoente de 10 é negativo, fazemos

$$\begin{aligned} 2{,}0 \times 10^{-5} &= 0{,}2 \times 10^{-4} \\ &= 0{,}02 \times 10^{-3} \\ &= 0{,}002 \times 10^{-2} \\ &= 0{,}0002 \times 10^{-1} \\ &= 0{,}00002 \times 10^0 \end{aligned}$$

Assim, $2{,}0 \times 10^{-5} = 0{,}00002$.

d) Nesse problema, o expoente de 10 é -9, de modo que devemos mover a vírgula 9 algarismos para a esquerda. Com isso, obtemos 0,000000008031.

Agora, tente o Exercício 19.

■ Operações com números em notação científica

Para quem domina as propriedades das potências, é fácil efetuar operações com números em notação científica. Observe como isso é feito abaixo.

Problema 8. Cálculos em notação científica

Efetue os cálculos a seguir.

a) $1{,}2 \times 10^4 + 7{,}4 \times 10^4$

b) $3{,}5 \times 10^3 + 6{,}91 \times 10^5$

c) $9{,}81 \times 10^{-2} + 4{,}2 \times 10^{-3}$

d) $2{,}83 \times 10^9 - 1{,}4 \times 10^7$

e) $5{,}2 \times 10^5 - 1{,}9 \times 10^6$

f) $(2 \times 10^6) \cdot (4 \times 10^3)$

g) $(-6{,}1 \times 10^5) \cdot (3 \times 10^{-2})$

h) $\dfrac{1{,}2 \times 10^7}{4 \times 10^5}$

i) $\dfrac{8 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-4}}$

Solução.

a) Para efetuar a soma de dois números que, em notação científica, possuem o mesmo expoente, basta por a potência de 10 em evidência e somar os coeficientes. Logo,

$$1{,}2 \times 10^4 + 7{,}4 \times 10^4 = (1{,}2 + 7{,}4) \times 10^4 = 8{,}6 \times 10^4.$$

b) Quando precisamos somar dois números que, em notação científica, possuem expoentes diferentes, devemos converter o número com a menor potência de 10, deixando-o com o mesmo expoente do outro.

Nesse problema, devemos escrever $3{,}5 \times 10^3$ como o produto de algum coeficiente por 10^5. Para tanto, basta mover a vírgula dois algarismos para a esquerda:

$$3{,}5 \times 10^3 = 0{,}035 \times 10^5.$$

De fato, para somar dois números em notação científica, basta igualar os expoentes das potências de 10. Embora qualquer expoente seja permitido, optamos por converter somente o que tem a menor potência para simplificar os cálculos.

Agora que os dois números possuem a mesma potência de 10, podemos somá-los:

$$0{,}035 \times 10^5 + 6{,}91 \times 10^5 = (0{,}035 + 6{,}91) \times 10^5 = 6{,}945 \times 10^5.$$

c) Nesse problema, o termo com a menor potência de 10 é $4{,}2 \times 10^{-3}$. Convertendo-o, obtemos

$$4{,}2 \times 10^{-3} = 0{,}42 \times 10^{-2}.$$

Assim, a soma pode ser escrita como

$$9{,}81 \times 10^{-2} + 0{,}42 \times 10^{-2} = (9{,}81 + 0{,}42) \times 10^{-2} = 10{,}22 \times 10^{-2}.$$

Finalmente, para que o coeficiente desse número seja menor que 10, deslocamos a vírgula para a esquerda:

$$10{,}22 \times 10^{-2} = 1{,}022 \times 10^{-1}.$$

Logo, o resultado da soma é $1{,}022 \times 10^{-1}$.

d) Para efetuar uma subtração, usamos as mesmas regras empregadas na soma. Assim, convertendo o termo $1{,}4 \times 10^7$, encontramos

$$1{,}4 \times 10^7 = 0{,}014 \times 10^9.$$

Agora, subtraindo esse número de $2{,}83 \times 10^9$, obtemos

$$2{,}83 \times 10^9 - 0{,}014 \times 10^9 = (2{,}83 - 0{,}014) \times 10^9 = 2{,}816 \times 10^9.$$

e) A conversão adequada a esse problema é

$$5{,}2 \times 10^5 = 0{,}52 \times 10^6.$$

Com ela, escrevemos

$$0{,}52 \times 10^6 - 1{,}9 \times 10^6 = (0{,}52 - 1{,}9) \times 10^6 = -1{,}38 \times 10^6.$$

f) O cálculo do produto de dois números em notação científica pode ser efetuado através de um simples reordenamento dos termos, sem a prévia conversão para uma mesma potência de 10. Assim, nesse caso, fazemos:

$$(2 \times 10^6) \cdot (4 \times 10^3) = 2 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 10^3 = (2 \cdot 4) \times 10^{6+3} = 8 \times 10^9.$$

g) Reagrupando os termos do produto desse problema, obtemos

$$(-6{,}1 \times 10^5) \cdot (3 \times 10^{-2}) = -6{,}1 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} = [-6{,}1 \cdot 3] \times 10^{5+(-2)} = -18{,}3 \times 10^3.$$

Finalmente, a conversão da solução para a notação científica fornece $-1{,}83 \times 10^4$.

h) Para dividir números na notação científica, seguimos as regras usuais das frações:

$$\frac{1{,}2 \times 10^7}{4 \times 10^5} = \left(\frac{1{,}2}{4}\right) \cdot \left(\frac{10^7}{10^5}\right) = 0{,}3 \times 10^{7-5} = 0{,}3 \times 10^2.$$

Convertendo o resultado para a notação científica, obtemos 3×10^1.

i) Nesse caso, o resultado da divisão é calculado através dos seguintes passos:

$$\frac{8\times10^{-2}}{2\times10^{-4}}=\left(\frac{8}{2}\right)\cdot\left(\frac{10^{-2}}{10^{-4}}\right)=4\times10^{(-2)-(-4)}=4\times10^{2}.$$

Agora, tente os Exercícios 13 e 14.

Problema 9. PIB per capita

Em 2010, o *produto interno bruto* (PIB) brasileiro correspondeu a cerca de R$ 3,675 trilhões. Se o Brasil tinha cerca de 190,7 milhões de habitantes, qual foi o *PIB per capita* do país em 2010?

Solução.

Observe que 1 milhão equivale a 1.000.000 = 10^6, e 1 trilhão equivale a 1.000.000.000.000 = 10^{12}.

Em notação científica, o PIB brasileiro em 2010 era equivalente a R$ $3{,}675\times10^{12}$, para uma população de

$$190{,}7\times10^{6}=1{,}907\times10^{8}\text{ habitantes.}$$

Como o PIB per capita é fornecido pela divisão do PIB pelo número de habitantes, temos

$$\text{PIB per capita}=\frac{3{,}675\times10^{12}}{1{,}907\times10^{8}}=\frac{3{,}675}{1{,}907}\times10^{12-8}\approx1{,}9271\times10^{4}$$

Na notação usual, dizemos que o PIB per capita correspondeu a R$ 19271 em 2010.

Exercícios 1.8

1. Calcule as potências abaixo nos casos em que c vale −3, −2, −1, 0, 1, 2 e 3.

a) 2^c. b) $(-2)^c$. c) -2^c. d) 2^{-c}. e) $(-2)^{-c}$. f) -2^{-c}.

2. Quanto valem 2^0, 5^0 e $(-5)^0$?

3. Quanto valem 1^0, 1^2 e 1^5?

4. Quanto valem 0^1, 0^2 e 0^5?

5. Dentre as potências abaixo, quais podemos calcular?

a) 0^{-1} b) 0^0 c) $\left(\frac{1}{5}\right)^0$?

6. Dentre os números 3^{2^5} e $(3^2)^5$, qual é maior?

7. Mostre com um exemplo numérico que

$$(a+b)^2\neq a^2+b^2.$$

8. Simplifique as expressões, eliminando expoentes negativos, caso existam.

a) $2^4\cdot2^3$ b) $-2^4\cdot2^3$ c) $(-2)^4\cdot2^3$ d) $2^4\cdot(-2)^3$ e) $(-2)^4\cdot(-2)^3$ f) $2^4\cdot2^{-3}$ g) $2^{-4}\cdot2^3$ h) $(-2)^4\cdot2^{-3}$ i) $2^4\cdot(-2)^{-3}$

9. Simplifique as expressões, eliminando expoentes negativos, caso existam.

a) $\frac{5^4}{5^6}$ b) $\frac{5^4}{5^{-2}}$ c) $\frac{5^{-3}}{5^{-7}}$ d) $\left(\frac{2}{6}\right)^3$ e) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ f) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$ g) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$ h) $\frac{3^2}{11^0}$ i) $\frac{3^0}{11^2}$ j) $\frac{3^{-3}}{4^{-2}}$ k) $\frac{3^{-3}}{4^2}$ l) $\frac{3^3}{4^{-2}}$ m) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 5^{-2}$ n) $\left(\frac{5}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$ o) $\left(\frac{2}{5}\right)^3(-5)^4$ p) $\left(\frac{5}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ q) $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ r) $2^{-1}+4^{-1}$ s) $4^{51}+4^{50}$ t) $3^{101}-2\cdot3^{100}$

10. Simplifique as expressões, eliminando expoentes negativos, caso existam. Sempre que necessário, suponha que o denominador é não nulo.

a) x^2x^5 b) x^2x^{-5} c) $x^{-2}x^{-5}$ d) $y^3y^{-7}y^6$ e) $v^5v^{-2}v^{-4}$ f) 2^x2^{-y} g) 2^x2^{-x} h) $\frac{x^5}{x^2}$ i) $\frac{x^5}{x^{-2}}$ j) $\frac{x^{-5}}{x^2}$ k) $\frac{x^{-5}}{x^{-2}}$ l) $\frac{y^6}{y}$ m) $\frac{y^3}{y^7}$ n) $\frac{w^4w^6}{w^{10}}$ o) $\frac{w^5w^{-3}}{w^7}$ p) $\frac{z^3z^0}{z^2}$ q) $\frac{x^6x^2}{x^3x^7}$ r) $\frac{x^6x^{-2}}{x^{-3}x^7}$ s) $\frac{x^2-x^3}{x}$ t) $\frac{x^2+x^4}{3x^3}$

11. Simplifique as expressões, eliminando expoentes negativos, caso existam. Sempre que necessário, suponha que o denominador é não nulo.

a) $(3^2)^5$
b) $(3^{-2})^5$
c) $(3^2)^{-5}$
d) $(-3^2)^5$
e) $(-3^2)^{-5}$
f) $[(-3)^2]^5$
g) $(x^3)^4$
h) $(x^6)^{-2}$
i) $\frac{9^2}{3^4}$
j) $\frac{(2x)^2}{x^4}$
k) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^3$
l) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-3}$
m) $\left(\frac{2x}{4}\right)^3$
n) $\left(\frac{3}{9x}\right)^2$
o) $\left(\frac{x^3}{5}\right)^2$

12. Simplifique as expressões, eliminando expoentes negativos, caso existam. Sempre que necessário, suponha que o denominador é não nulo.

a) $(x^2y^6)(6yx^3)$
b) $(x^4y^7)(y^{-3}x^{-2})$
c) $(x^6y^{-2}z^3)(y^4z^3x^{-4})$
d) $\frac{3x^3y^5}{x^6y^4}$
e) $\frac{4x^2y^{-4}}{2x^{-5}y}$
f) $\left(\frac{x^2}{y}\right)\left(\frac{1}{2x^5}\right)$
g) $\frac{2x^2y^5}{x^4y^3} - \frac{y^2}{x^2}$
h) $\frac{3u^3v^3}{v^5u^2} + \frac{u^2}{v^2}$
i) $\left(\frac{2xyz^2}{3x^2y^3z}\right)^4$
j) $\left(\frac{y^{-3}}{4}\right)^{-2}$
k) $\left(\frac{y}{3x^{-2}}\right)^{-3}$
l) $(2xy^2)^3(5x^{-4}yz^3)$
m) $(5x^2y^3)^{-2}(10x^3y^5)$
n) $\left(\frac{w^3v^2}{3x^2}\right)^3\left(\frac{x^3v}{w^6}\right)$
o) $\left(\frac{4st^3}{u^5}\right)^2\left(\frac{s^4t}{u^{-2}}\right)^{-1}$
p) $\frac{x^2y}{3}\left(\frac{3}{y} - \frac{9y^{-1}}{2x}\right)$
q) $\frac{3x^2y^{-2}}{x^4} - \frac{y^5x^{-2}}{y^7}$
r) $\left(\frac{x^3y^2}{2w^{-4}}\right)^2\left(\frac{8x^{-2}v^4}{w^3y^{-3}}\right)$
s) $\left(\frac{2x^4y^{-2}}{3z}\right)^2\left(\frac{9z^3x^{-6}}{8y^{-4}}\right)$
t) $\frac{2x^5y^{-3}}{4x^3} - \frac{3yx^6}{4x^4y^4}$
u) $\left(\frac{xy}{x^{-1}y^3}\right)^2\left(\frac{y}{x^3} - \frac{y^2}{x^4}\right)$
v) $\frac{yx^2}{x^3y^{-1}}\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right)$

13. Efetue as operações abaixo.

a) $2{,}34 \times 10^5 - 1{,}87 \times 10^5$
b) $7{,}61 \times 10^8 + 5{,}2 \times 10^7$
c) $4{,}325 \times 10^{12} - 2{,}5 \times 10^{10}$
d) $9{,}67 \times 10^{-5} + 8{,}3 \times 10^{-6}$
e) $1{,}8 \times 10^{12} - 6{,}8 \times 10^{14}$
f) $(6{,}4 \times 10^{10}) \cdot (5{,}3 \times 10^6)$
g) $(-3{,}7 \times 10^{16}) \cdot (7{,}4 \times 10^{-9})$

14. Efetue as operações abaixo.

a) $\frac{-4{,}6 \times 10^{22}}{2{,}3 \times 10^{18}}$
b) $\frac{5{,}1 \times 10^{-8}}{3 \times 10^6}$
c) $-\frac{2{,}25 \times 10^{-11}}{5 \times 10^{-14}}$

15. Um *bit* é a menor informação armazenada em um computador. Cada bit pode assumir apenas dois valores, que representamos por 0 e 1 na notação binária. Um conjunto de n bits é suficiente para armazenar um número inteiro entre 0 e $2^n - 1$. Assim, um *byte*, que corresponde a 8 bits, é suficiente para armazenar os números inteiros de 0 a 255. Indique o maior número inteiro (não negativo) que pode ser armazenado usando-se:

a) 16 bits.
b) 32 bits.
c) 64 bits.

16. Um quilobyte (kB) corresponde a 2^{10} bytes. Por sua vez, um megabyte corresponde a 2^{10} quilobytes. Determine o número de bytes contidos em

a) 1 quilobyte.
b) 1 megabyte.

17. No Exercício 16, o prefixo *quilo-* foi usado com um sentido diferente daquele empregado, por exemplo, nos termos *quilograma* e *quilômetro*. Explique essa diferença.

18. Um fio do cabelo de Verônica tem 46,4μm de espessura. Sabendo que 1μm corresponde a 10^{-6} m, forneça a espessura do fio em metros, usando notação científica.

19. A concentração de íons de Hidrogênio do sangue humano é aproximadamente igual a $3{,}5 \times 10^{-8}$ mol/L. Forneça essa concentração na notação decimal.

20. A distância média da Terra ao Sol é de cerca de 149.600.000 quilômetros. Converta esse valor para a notação científica.

21. A velocidade da luz corresponde a 300.000 km/s. Após converter esse valor para a notação científica, determine o tempo que a luz do Sol gasta para atingir a Terra. Dica: use o resultado do Exercício 20.

22. O volume de uma esfera é dado pela fórmula $\frac{4}{3}\pi r^3$, em que r é o raio da esfera. Quantos litros de aço são necessários para produzir 1.000.000 esferas de rolamento, cada qual com 3 mm de raio? (Lembre-se que 1 mm = 0,1 cm e que 1 litro = 1000 cm^3.)

23. Apesar de a Terra não ser perfeitamente esférica, podemos aproximá-la por uma esfera cujo raio mede, aproximadamente, 6370 km. Usando a fórmula do Exercício 22, determine o volume aproximado de nosso planeta, em notação científica.

24. Leia o conto sobre a origem do jogo de xadrez, que o escritor Malba Tahan incluiu em seu maravilhoso livro "O homem que calculava".

Respostas dos Exercícios 1.8

1.
a) 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8
b) −1/8, 1/4, −1/2, 1, −2, 4, −8
c) −1/8, −1/4, −1/2, −1, −2, −4, −8
d) 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8
e) −8, 4, −2, 1, −1/2, 1/4, −1/8
f) −8, −4, −2, −1, −1/2, −1/4, −1/8

2. As três potências valem 1.

3. As três potências valem 1.

4. As três potências valem 0.

5. Só podemos calcular $\left(\frac{1}{5}\right)^0$, que vale 1.

6. $3^{2^5} = 3^{32}$ e $(3^2)^5 = 3^{10}$. O primeiro é maior.

7. $(2+3)^2 = 5^2 = 25$, enquanto $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

8.
a) 2^7
b) -2^7
c) 2^7
d) -2^7
e) -2^7
f) 2
g) $\frac{1}{2}$
h) 2
i) −2

9. a) $\frac{1}{5^2}$ b) 5^6 c) 5^4 d) $\frac{1}{3^3}$ e) 8^2 f) $\frac{1}{5^2}$ g) $-\frac{1}{4^3}$ h) 3^2 i) $\frac{1}{11^2}$ j) $\frac{4^2}{3^3}$ k) $\frac{1}{4^2 3^3}$ l) $3^3 4^2$ m) $\frac{1}{5^2}$ n) $\frac{5^3 2^2}{3^5}$ o) 40 p) $\frac{5^3}{3 \cdot 2^2}$ q) $\frac{1}{6}$ r) $\frac{3}{4}$ s) $5 \cdot 4^{50}$ t) 3^{100}

10. a) x^7 b) $\frac{1}{x^3}$ c) $\frac{1}{x^7}$ d) y^2 e) $\frac{1}{v}$ f) 2^{x-y} g) 1 h) x^3 i) x^7 j) $\frac{1}{x^7}$ k) $\frac{1}{x^3}$ l) y^5 m) $\frac{1}{y^4}$ n) 1 o) $\frac{1}{y^5}$ p) z q) $\frac{1}{x^2}$ r) 1 s) $x - x^2$ t) $\frac{1+x^2}{3x}$

11. a) 3^{10} b) 3^{-10} c) 3^{-10} d) -3^{10} e) -3^{-10} f) 3^{10} g) x^{12} h) x^{-12} i) 1 j) $\frac{4}{x^2}$ k) $\frac{1}{5^6}$ l) 5^6 m) $\frac{x^3}{2^3}$ n) $\frac{1}{3^2 x^2}$ o) $\frac{x^6}{5^2}$

12. a) $6x^5y^7$ b) x^2y^4 c) $x^2y^2z^6$ d) $\frac{3y}{x^3}$ e) $\frac{2x^7}{y^5}$ f) $\frac{1}{2yx^3}$ g) $\frac{y^2}{x^2}$ h) $\frac{3u+u^2}{v^2}$ i) $\frac{16z^4}{81x^4y^8}$ j) $16y^6$ k) $\frac{27}{x^6y^3}$ l) $\frac{40y^7z^3}{x}$ m) $\frac{2}{5xy}$ n) $\frac{v^7w^3}{27x^3}$ o) $\frac{16t^5}{s^2u^{12}}$ p) $x^2 - \frac{3x}{2}$ q) $\frac{2}{x^2y^2}$ r) $2v^4w^5x^4y^7$ s) $\frac{x^2z}{2}$ t) $-\frac{x^2}{4y^3}$ u) $\frac{x-y}{y^3}$ v) $1 - \frac{y^3}{x^3}$

13. a) $4{,}7 \times 10^4$ b) $8{,}13 \times 10^8$ c) $4{,}3 \times 10^{12}$ d) $1{,}05 \times 10^{-4}$ e) $-6{,}782 \times 10^{14}$ f) $3{,}392 \times 10^{14}$ g) $-2{,}738 \times 10^8$

14. a) -2×10^4 b) $1{,}7 \times 10^{-14}$ c) $-4{,}5 \times 10^2$

15. a) $2^{16} - 1 = 65.535$ b) $2^{32} - 1 = 4.294.967.295$ c) $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$

16. a) $2^{10} = 1.024$ bytes. b) $2^{40} = 1.048.576$ bytes.

17. O prefixo *quilo-* é usado para indicar um milhar. Assim, 1 kg = 1000 g e 1 km = 1000 m. Entretanto, quando se trata de *bytes*, o prefixo equivale a 1024, de modo que 1 kB = 1024 B. Voltaremos a esse assunto na Seção 1.10.

18. $4{,}64 \times 10^{-5}$ m.

19. 0,000000035 mol/L.

20. $1{,}496 \times 10^8$ km.

21. 487,7 s, ou 8 min 7,7 s.

22. 113,097 litros.

23. $1{,}083 \times 10^{12}$ km^3.

1.9 Raízes

A operação oposta à potenciação é chamada **radiciação**. Como o nome sugere, a radiciação é a operação através da qual extraímos **raízes** de números. Para entender o que significa "extrair uma raiz", vamos recorrer a um problema simples, que envolve a área de um quadrado.

Problema 1. Dimensões de um pasto

Seu Jacinto pretende cercar 16 hectares (ha) de sua fazenda para servir de pasto. Supondo que a região a ser cercada tenha a forma de um quadrado, qual deverá ser o comprimento dos lados dessa região?

Solução.

Cada hectare corresponde a 10.000 m^2, de modo que o pasto terá área igual a $16 \times 10.000 = 160.000$ m^2. A Figura 1.23 ilustra a região a ser transformada em pasto, supondo que seu lado tenha comprimento ℓ.

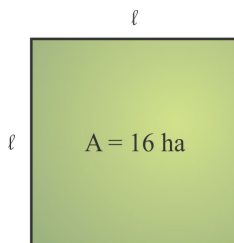



Figura 1.23: Um pasto quadrado com lados de comprimento ℓ.

Sabemos que a área de um quadrado de lado ℓ é dada pela fórmula $A = \ell^2$. Assim, para determinar o comprimento do lado da região, devemos encontrar um valor positivo de ℓ tal que

$$\ell^2 = 160.000.$$

Esse valor de ℓ é chamado **raiz quadrada** de 160.000, e é representado por $\sqrt{160.000}$. Usando uma calculadora, descobrimos que

$$\sqrt{160.000} = 400,$$

de modo que o lado da região que servirá de pasto terá 400 m de comprimento.

O símbolo $\sqrt{\ }$ é chamado **radical**.

Agora, tente o Exercício 1.

Raiz quadrada

A **raiz quadrada** de um número não negativo a – representada por $\sqrt{a}$ – é o número não negativo b tal que $b^2 = a$.

Em notação matemática, escrevemos

$$\sqrt{a} = b \quad \text{se} \quad b^2 = a.$$

Atenção
Muito embora seja verdade que $(-7)^2 = 49$, não se deve escrever $\sqrt{49} = \pm 7$, pois nunca se obtém um número negativo ao extrair a raiz quadrada.

Exemplo 2. Raízes quadradas

a) $\sqrt{49} = 7$, já que $7 \geq 0$ (7 é um número não negativo) e $7^2 = 49$.

b) $\sqrt{121} = 11$, já que $11 \geq 0$ e $11^2 = 121$.

c) $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$, pois $1{,}5 \geq 0$ e $1{,}5^2 = 2{,}25$.

d) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, pois $0{,}1 \geq 0$ e $0{,}1^2 = 0{,}01$.

e) $\sqrt{0} = 0$, pois 0 é não negativo e $0^2 = 0$.

Quadrados perfeitos

Dizemos que um número inteiro a é um **quadrado perfeito** quando sua raiz quadrada também é um número inteiro. A figura 1.24 mostra alguns quadrados perfeitos bastante conhecidos.

(a) 1 (b) 4 (c) 9 (d) 16 (e) 25

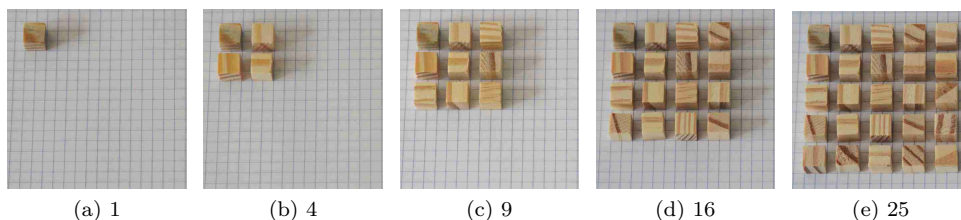



Figura 1.24: Alguns quadrados perfeitos.

Se um número é um quadrado perfeito, então é possível extrair sua raiz quadrada decompondo-o em fatores primos. Veja um exemplo:

Exemplo 3. Raiz quadrada de 3600

Vamos tentar extrair a raiz quadrada de 3600. Para tanto, comecemos fatorando esse número:

$$\begin{array}{r|l} 3600 & 2 \\ 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Agora, vamos tentar agrupar em pares os fatores iguais:

$$
\begin{aligned}
3600 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5 && \text{Fatoração de 3600.}\\
&= 2^2 2^2 3^2 5^2 && \text{Agrupamento dos fatores iguais em pares.}\\
&= (2\cdot 2\cdot 3\cdot 5)^2 && \text{Aplicação da propriedade 4 das potências.}\\
&= 60^2 && \text{Cálculo do produto entre parênteses.}
\end{aligned}
$$

Assim, concluímos que $3600 = 60^2$, de modo que a raiz quadrada de 3600 é 60.

Uma estratégia para se obter a raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos é apresentada no Exercício 17. Entretanto, não é indispensável aprender como extrair raízes de números reais quaisquer, já que uma calculadora simples é capaz de efetuar essa operação.

■ Raiz enésima

Podemos generalizar a ideia da raiz quadrada para uma raiz de ordem n de um número real a. Essa raiz é dita $n^{\text{ésima}}$ (ou, simplesmente, enésima).

Você sabia?
A raiz de ordem 3 é chamada **raiz cúbica**. Para exponentes maiores, usamos raiz quarta, quinta, sexta etc.

Raiz enésima

Dado um número natural n, a **raiz enésima** de um número a – representada por $\sqrt[n]{a}$ – é o número b tal que $b^n = a$.

Em notação matemática, escrevemos

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{se} \quad b^n = a.$$

Se n for par, a e b devem ser não negativos.

Exemplo 4. Raízes de ordem superior

a) $\sqrt[3]{125} = 5$, já que $5^3 = 125$.

b) $\sqrt[3]{-125} = -5$, já que $(-5)^3 = -125$.

c) $\sqrt[4]{16} = 2$, já que $16 \geq 0$ (16 não é negativo) e $2^4 = 16$.

d) $\sqrt[1000]{1} = 1$, pois $1^n = 1$ para todo n.

e) $\sqrt[4]{-16}$ não está definida, pois $-16 < 0$. Observe que não há número real a tal que a^4 seja negativo. De fato, como $a^4 = (a^2)^2$ e $a^2 \geq 0$, a^4 não pode ser negativo.

Usando o raciocínio do item (e), mostre que $\sqrt[n]{a}$ não está definida quando n é par e a é negativo.

Exemplo 5. Cubos perfeitos

Um número inteiro a é um **cubo perfeito** se sua raiz cúbica, $\sqrt[3]{a}$, também é um número inteiro. Nesse caso, também podemos usar a fatoração para encontrar essa raiz cúbica. Como exemplo, vamos tentar calcular

$$\sqrt[3]{3375}.$$

Fatorando 3375, obtemos

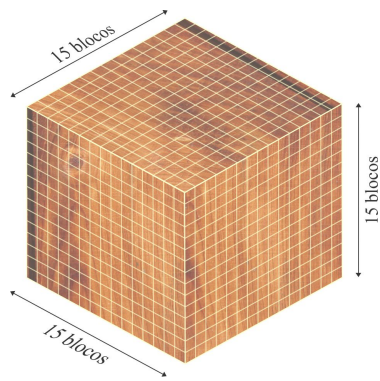



Figura 1.25: Um cubo formado por 3375 blocos.

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

Logo,

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3^3 5^3 = (3 \cdot 5)^3 = 15^3,$$

de modo que

$$\sqrt[3]{3375} = 15.$$

Um cubo formado por 3375 blocos, dispostos em 15 camadas, cada qual com 15×15 blocos, é mostrado na Figura 1.25.

Agora, tente o Exercício 5.

Ainda que os quadrados e os cubos perfeitos sejam raros, a fatoração de números inteiros é muito útil para a simplificação de expressões que envolvem raízes, como veremos a seguir.

Propriedades das raízes

Sendo a radiciação a operação inversa da potenciação, as raízes possuem propriedades similares àquelas apresentadas para as potências, como mostra o quadro abaixo. A relação entre essas propriedades ficará clara na próxima subseção.

Propriedades das raízes

Suponha que a e b sejam números reais e que os denominadores sejam sempre diferentes de zero.

Propriedade	Exemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{4000}} = \sqrt[3\cdot 5]{4000} = \sqrt[15]{4000}$
4. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \textbf{se } n \textbf{ é ímpar;} \\ \lvert a \rvert, & \textbf{se } n \textbf{ é par} \end{cases}$	$\sqrt[5]{11^5} = 11$ $\sqrt[4]{(-5)^4} = \lvert -5 \rvert = 5$

Se você não recorda o significado de $|a|$, consulte a página 45.

Em alguns casos, a aplicação dessas propriedades é facilitada quando se fatora os números dos quais se pretende extrair a raiz, como mostra o Exemplo 6.

Exemplo 6. Emprego das propriedades das raízes

a)

441	3
147	3
49	7
7	7
1	

$$\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2} \quad \text{Fatoração de 441.}$$
$$= \sqrt{3^2}\sqrt{7^2} \quad \text{Propriedade 1.}$$
$$= 3 \cdot 7 \quad \text{Propriedade 4.}$$
$$= 21 \quad \text{Simplificação do resultado.}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{-8}{125}} &= \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}} && \text{Propriedade 2.} \\ &= \frac{\sqrt[3]{-2^3}}{\sqrt[3]{5^3}} && \text{Fatoração de 8 e 125.} \\ &= -\frac{2}{5} && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{27} &= \sqrt{3^3} && \text{Fatoração de 27.} \\ &= \sqrt{3^2 3} && \text{Separação de um termo } 3^2. \\ &= \sqrt{3^2}\sqrt{3} && \text{Propriedade 1.} \\ &= 3\sqrt{3} && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{75}\sqrt{12} &= \sqrt{75 \cdot 12} && \text{Propriedade 1.} \\ &= \sqrt{(5^2 3) \cdot (2^2 3)} && \text{Fatoração de 75 e 12.} \\ &= \sqrt{5^2 3^2 2^2} && \text{Agrupamento das potências.} \\ &= \sqrt{5^2}\sqrt{3^2}\sqrt{2^2} && \text{Propriedade 1.} \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 2 && \text{Propriedade 4.} \\ &= 30 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{216} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} && \text{Fatoração de 216.} \\ &= \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{3^3} && \text{Propriedade 1.} \\ &= 2 \cdot 3 && \text{Propriedade 4.} \\ &= 6 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{20}{5}} && \text{Propriedade 2.} \\ &= \sqrt{4} && \text{Simplificação da expressão.} \\ &= 2 && \text{Cálculo da raiz.} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt[3]{64}} &= \sqrt[2\cdot 3]{64} && \text{Propriedade 3.} \\ &= \sqrt[6]{2^6} && \text{Fatoração de 64.} \\ &= \sqrt[6]{2^6} && \text{Propriedade 4.} \\ &= 2 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

h)

$$\begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2^6 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5\sqrt[4]{256}} &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{256}} && \text{Propriedade 1.} \\ &= \sqrt{5}\,\sqrt[8]{256} && \text{Propriedade 3.} \\ &= \sqrt{5}\,\sqrt[8]{2^8} && \text{Fatoração de 256.} \\ &= \sqrt{5} \cdot 2 && \text{Propriedade 4.} \\ &= 2\sqrt{5} && \text{Reordenamento da expressão.} \end{aligned}$$

i)

$$\sqrt[3]{(-7)^3} = -7 \quad \text{Propriedade 4.}$$

j)

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{(-23)^6} &= |-23| && \text{Propriedade 4.} \\ &= 23 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{2^{-10}} &= \sqrt[5]{\frac{1}{2^{10}}} && \text{Propriedade das potências.} \\ &= \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{2^{10}}} && \text{Propriedade 2.} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2^{10}}} && \sqrt[n]{1} = 1 \text{ sempre.} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{(2^2)^5}} && \text{Propriedade das potências.} \\ &= \frac{1}{2^2} && \text{Propriedade 4.} \\ &= \frac{1}{4} && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Agora, tente os Exercícios 6 e 7.

As propriedades das raízes também são muito úteis para a simplificação de expressões algébricas, como ilustrado abaixo.

Exemplo 7. Simplificação de expressões com raízes

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{w^3} &= \sqrt{w^2 w} && \text{Separação de potência com expoente 2.} \\ &= \sqrt{w^2}\sqrt{w} && \text{Propriedade 1.} \\ &= w\sqrt{w} && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{y^{12}} &= \sqrt[3]{(y^4)^3} && \text{Propriedade das potências.} \\ &= y^4 && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^6}}{4}} &= \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^6}}}{\sqrt{4}} && \text{Propriedade 2.} \\ &= \frac{\sqrt[2\cdot 3]{x^6}}{\sqrt{4}} && \text{Propriedade 3.} \\ &= \frac{\sqrt[6]{x^6}}{2} && \text{Cálculo da raiz de 4.} \\ &= \frac{x}{2} && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^5y^6} &= \sqrt[3]{x^3x^2(y^2)^3} && \text{Separação de termos com expoente 3.}\\ &= \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{(y^2)^3} && \text{Propriedade 1.}\\ &= x\sqrt[3]{x^2}y^2 && \text{Propriedade 4.}\end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 8.

Atenção
Também é preciso tomar o cuidado de não extrair uma raiz par de um número negativo, ou seja

$$\sqrt{-4} \neq -2.$$

De fato, $\sqrt{-4}$ não está definida.

Assim como ocorre com as potências, é comum o uso incorreto das propriedades das raízes. O engano mais comum é a tentativa de separar a raiz de uma soma fazendo $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, o que não é possível, como comprova o exemplo abaixo.

Errado	$\sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{5^2} + \sqrt{4^2} = 5+4 = 9$
Correto	$\sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ $(\approx 6{,}403)$

Exemplo 8. Expressões com soma de raízes

Observe que não se pode escrever $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{13}$. ☠ Errado!

a) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5.$

b) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3+4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$

c) $5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (5-2)\sqrt{7} = 3\sqrt{7}.$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = (2-1)\sqrt{3} = \sqrt{3}.$

Agora, tente o Exercício 10.

■ Raízes como potências

Já vimos como definir potências com expoentes inteiros (positivos e negativos). Agora, vamos expandir a notação de potência para expoentes racionais. Para tanto, considere que desejemos elevar um número real $b \geq 0$ a um expoente $\frac{1}{2}$, ou seja, que queiramos calcular

$$b^{\frac{1}{2}}.$$

Para que essa expressão seja válida, ela deve satisfazer as regras das potências citadas à página 65. Assim, se tomamos $b = a^2$, com $a \geq 0$, a Propriedade 3 apresentada àquela página nos diz que

$$\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a.$$

Observe que, nesse caso, ao elevarmos (a^2) a $\frac{1}{2}$, obtivemos o próprio número a, ou seja, o expoente $\frac{1}{2}$ *anulou* o expoente 2, exatamente como ocorre com a raiz quadrada. De fato, da Propriedade 4 das raízes, sabemos que $\sqrt{a^2} = a$. Isso sugere que, dado um número real $a \geq 0$,

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Não é difícil estender esse conceito à raiz enésima, já que podemos escrever

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a^{n\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a.$$

Desse modo, podemos definir

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$

supondo que $a \geq 0$ quando n é par.

Com essa definição de expoente racional, há uma relação direta entre as demais propriedades das raízes e algumas propriedades das potências, como mostrado no quadro abaixo.

Atenção

Lembre-se de que $a^{1/n} \neq \frac{1}{a^n}$. De fato, já vimos que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

Propriedades de potências e raízes

Suponha que $a, b \in \mathbb{R}$, que os denominadores sejam sempre diferentes de zero e que os termos dentro dos radicais sejam não negativos se n for par.

	Raízes	Potências
1.	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$
2.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$
3.	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$

Combinando a potência a^m com a raiz enésima, é possível generalizar o conceito de potência para um expoente racional qualquer.

Atenção

Note que $a^{n/m} \neq \frac{a^n}{a^m}$. Como dito à página 65, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Potência com expoente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

supondo que $a \geq 0$ quando n é par.

De fato, se $a \geq 0$, a potência a^n está definida (e suas propriedades são válidas) para qualquer n real, mesmo que irracional. Voltaremos a esse assunto no Capítulo 5, que trata de funções exponenciais.

Exemplo 9. Potências com expoentes racionais

a) $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3.$

b) $0{,}25^{0{,}5} = 0{,}25^{1/2} = \sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$

c) $\sqrt[3]{10^6} = 10^{6/3} = 10^2 = 100.$

d) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4.$

e) $16^{-1/2} = \frac{1}{16^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}.$

f) $4^{3{,}5} = 4^{7/2} = (\sqrt{4})^7 = 2^7 = 128.$

g) $81^{1{,}25} = 81^{5/4} = (3^4)^{5/4} = 3^{4\cdot\frac{5}{4}} = 3^5 = 243.$

h) $\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3}} = 3^{\frac{2}{4}-\frac{1}{2}} = 3^0 = 1.$

Agora, tente os Exercícios 11 e 12.

Exemplo 10. Simplificação de potências com expoentes racionais

Nos exemplos abaixo, reescrevemos algumas expressões envolvendo raízes e potências com expoentes fracionários, supondo que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ quando necessário, e que os denominadores são diferentes de zero.

a) $\sqrt[6]{x^4} = x^{4/6} = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$.

b) $\sqrt{\sqrt{x}} = (x^{1/2})^{1/2} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$.

c) $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{3+2}{6}} = x^{5/6} = \sqrt[6]{x^5}$.

d) $x^{6/5} \cdot x^{4/5} = x^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}} = x^{10/5} = x^2$.

e) $\dfrac{x^{1/3} \cdot x^{4/3}}{x^{2/3}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = x^{3/3} = x$.

f) $\left(\dfrac{4x^{2/5}}{y^{1/2}}\right) \cdot \left(\dfrac{y^2}{2x^{3/5}}\right) = \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{x^{2/5}}{x^{3/5}} \cdot \dfrac{y^2}{y^{1/2}} = 2 \cdot x^{\frac{2}{5}-\frac{3}{5}} \cdot y^{2-\frac{1}{2}} = 2x^{-1/5}y^{3/2} = \dfrac{2y^{3/2}}{x^{1/5}} = \dfrac{2\sqrt{y^3}}{\sqrt[5]{x}}$.

g) $\left(\dfrac{3^{1/2}}{x^{3/2}}\right)\sqrt{\dfrac{16x}{27}} = \left(\dfrac{3^{1/2}}{x^{3/2}}\right)\sqrt{\dfrac{4^2x}{3^3}} = \left(\dfrac{3^{1/2}}{x^{3/2}}\right)\left(\dfrac{4^{2/2}x^{1/2}}{3^{3/2}}\right)$

$= \dfrac{3^{1/2}}{3^{3/2}} \cdot 4 \cdot \dfrac{x^{1/2}}{x^{3/2}} = 3^{1/2-3/2}4x^{1/2-3/2} = 3^{-1}4x^{-1} = \dfrac{4}{3x}$.

h) $\left(\dfrac{x^{1/6}}{y^{1/3}z}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{z^{3/2}}{x^{-5/3}}\right) = \dfrac{(x^{1/6})^2}{x^{-5/3}} \cdot \dfrac{1}{(y^{1/3})^2} \cdot \dfrac{z^{3/2}}{z^2} = x^{\frac{2}{6}-(-\frac{5}{3})} \cdot y^{-\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{3}{2}-2}$

$= x^{12/6}y^{-2/3}z^{-1/2} = \dfrac{x^2}{y^{2/3}z^{1/2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{y^2}\sqrt{z}}$.

Agora, tente os Exercícios 14 e 16.

■ Racionalização de denominadores

Terminado o cálculo de uma expressão matemática, é possível que o denominador contenha uma raiz. Nesse caso, é comum eliminar-se essa raiz através de um processo chamado **racionalização do denominador**.

A racionalização de uma expressão na forma $1/\sqrt{x}$ é feita multiplicando-se o numerador e o denominador pela raiz, como indicado a seguir.

Nesse exemplo, supomos que $x > 0$.

$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot 1$ — O número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

$= \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ — Conversão de 1 em uma fração conveniente.

$= \dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}$ — Propriedade do produto de frações.

$= \dfrac{\sqrt{x}}{x^{2/2}}$ — Propriedade das potências.

$= \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ — Simplificação do resultado.

Como a raiz quadrada de qualquer número inteiro que não seja um quadrado perfeito é irracional, o processo acima transformou a expressão $1/\sqrt{x}$ em outra expressão equivalente, na qual o denominador certamente não contém um número irracional. Observe que esse procedimento não é indispensável, tendo um propósito puramente estético.

Problema 11. Racionalização com raiz quadrada

Racionalize

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{6x}{\sqrt{2x}}$

Solução.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Mais uma vez, supomos que $x > 0$.

b) $\dfrac{6x}{\sqrt{2x}} = \dfrac{6x}{\sqrt{2x}} \cdot \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \dfrac{6x\sqrt{2x}}{2x} = 3\sqrt{2x}.$

Quando o denominador contém um temo $\sqrt[n]{x^m}$, com $m < n$, e $x > 0$ se n é par, a racionalização é feita multiplicando-se o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{x^{n-m}}$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^n}} = \frac{\sqrt[n]{x^{n-m}}}{x}.$$

Exemplo 12. Racionalização com raiz enésima

Racionalize

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^6}}$ c) $\dfrac{1}{2\sqrt[8]{x^5}}$

Solução.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{10^2}}{10}.$

b) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^6}} = \dfrac{5}{\sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^2}} = \dfrac{5}{x\sqrt[4]{x^2}} = \dfrac{5}{x\sqrt[4]{x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2}} = \dfrac{5\sqrt[4]{x^2}}{x\sqrt[4]{x^4}} = \dfrac{5\sqrt[4]{x^2}}{x^2}.$

Aqui, também supomos que $x > 0$.

c) $\dfrac{1}{2\sqrt[8]{x^5}} = \dfrac{1}{2\sqrt[8]{x^5}} \cdot \dfrac{\sqrt[8]{x^3}}{\sqrt[8]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[8]{x^3}}{2\sqrt[8]{x^8}} = \dfrac{\sqrt[8]{x^3}}{2x}.$

Agora, tente o Exercício 15.

Exercícios 1.9

1. João deseja destinar uma parte de sua fazenda para a criação de um pomar de maçãs. Sabendo que cada macieira exige 25 m^2 de terreno, que o pomar será quadrado e que serão plantadas 36 mudas de árvores, determine o comprimento do lado do pomar.

2. Quais são os dois números reais cujo quadrado vale 25? Qual deles é a raiz quadrada de 25?

3. A distância d, em quilômetros, entre uma pessoa e o horizonte é dada aproximadamente pela fórmula $d = 112{,}88\sqrt{h}$, em que h, também em quilômetros, é a altura do observador em relação ao solo. Usando uma calculadora, determine a distância do horizonte para alguém que visita o último andar do edifício Burj Khalifa, nos Emirados Árabes, que está a 621,3 m do chão.

4. Ponha em ordem crescente os números $1 - \sqrt{2}$, $\sqrt{3} - 2$, $\sqrt{2} - 1$ e $2 - \sqrt{3}$.

5. Calcule as raízes abaixo sem usar calculadora. Dica: se necessário, fatore algum número.

a) $\sqrt{1024}$
b) $\sqrt{1764}$
c) $\sqrt{2025}$
d) $\sqrt{\frac{1}{36}}$
e) $\sqrt[3]{1000}$
f) $\sqrt[3]{9261}$
g) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$
h) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$
i) $\sqrt[4]{0}$
j) $\sqrt[4]{81}$
k) $\sqrt[5]{-1}$
l) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

6. Simplifique as expressões.

a) $\sqrt{20}$
b) $\sqrt{4/49}$
c) $\sqrt{2/25}$
d) $\sqrt[3]{8/27}$
e) $\sqrt[3]{-216}$
f) $\sqrt[3]{-64/27}$
g) $\sqrt{36^2}$
h) $\sqrt{(-5)^2}$
i) $\sqrt{5^{-2}}$
j) $\sqrt[3]{9^6}$
k) $\sqrt[4]{16^2}$
l) $\sqrt[5]{3^5 2^{10}}$
m) $\sqrt[5]{2^6 4^2}$
n) $\sqrt[3]{\frac{27}{2^4}}$
o) $\sqrt{3^4 6^{-2}}$
p) $\sqrt{\sqrt{2^8}}$
q) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$
r) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

7. Simplifique as expressões.

a) $\sqrt{2}\sqrt{18}$
b) $\sqrt{6}\sqrt{150}$
c) $\sqrt{15}\sqrt{5}$
d) $\sqrt{45}\sqrt{10}$
e) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$
f) $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{100}$
g) $\sqrt[3]{15}\sqrt[3]{9}$
h) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$
i) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$
j) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}$
k) $\frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{8}}$
l) $\frac{\sqrt{6}\sqrt{12}}{\sqrt{72}}$
m) $\frac{6\sqrt{5}\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$
n) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2^3}\sqrt{3}}$
o) $\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}\sqrt{7}}$
p) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}}$

8. Simplifique as expressões. Sempre que necessário, suponha que as variáveis são positivas e que os denominadores são não nulos.

a) $\sqrt{4x^2}$
b) $\sqrt{4x}$
c) $\sqrt[3]{8x^3}$
d) $\sqrt{8/x^2}$
e) $\sqrt[3]{x^3y^6}$
f) $\sqrt{xy^3}\sqrt{x^5y}$
g) $\sqrt[4]{y^8/z^4}$
h) $\frac{\sqrt{w^5v^3}}{\sqrt{v^5w^4}}$
i) $\sqrt{x\sqrt[3]{y^{12}}}$
j) $\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{y^8}}$

9. Mostre com um exemplo numérico que $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

10. Calcule as expressões.

a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$
b) $\sqrt{9} - \sqrt{5}$
c) $5\sqrt{8} - 3\sqrt{8}$
d) $5\sqrt{8} - 3\sqrt{2}$
e) $\sqrt{8} + \sqrt[3]{8}$
f) $\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})$
g) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$
h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
i) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
j) $\frac{8}{\sqrt{3}} + 3\sqrt{\frac{16}{27}}$

11. Reescreva as expressões abaixo na notação de potência, simplificando-as sempre que possível.

a) $\sqrt{3}$
b) $1/\sqrt{3}$
c) $\sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt[4]{5^2}$
e) $1/\sqrt{2^3}$
f) $\sqrt[3]{-2}$

12. Escreva as expressões abaixo na notação de raízes.

a) $3^{2/5}$
b) $5^{2,5}$
c) $(-3)^{5/3}$
d) $3^{-5/2}$
e) $2^{-1/2}$
f) $4^{-2/3}$
g) $4^{2/3}$
h) $-3^{1/2}$
i) $2^{-1,5}$

13. Usando uma calculadora, determine o valor de cada expressão abaixo.

a) $0{,}36^{1/2}$
b) $0{,}008^{1/3}$
c) $0{,}0081^{1/4}$

14. Simplifique as expressões. Sempre que necessário, suponha que as variáveis são positivas.

a) $16^{3/2}$
b) $27^{2/3}$
c) $25^{-1/2}$
d) $16^{-5/4}$
e) $(\frac{125}{64})^{2/3}$
f) $(\frac{8}{27})^{-4/3}$
g) $(3^2)^{1/2}$
h) $(7^5)^{1/5}$
i) $(4x)^{1/2}$
j) $(x/4)^{1/2}$
k) $(5^{1/2})^{-3}$
l) $x^{-3}/4^{1/2}$
m) $x^{-3}/4^{-1/2}$

15. Racionalize os denominadores das frações. Sempre que necessário, suponha que as variáveis são positivas e os denominadores são não nulos.

a) $1/\sqrt{11}$
b) $5/\sqrt{5}$
c) $x^2/\sqrt{x}$
d) $4/\sqrt{2^3}$
e) $1/\sqrt[5]{3}$
f) $5/\sqrt[7]{5^4}$

16. Simplifique as expressões convertendo as raízes em potências. Elimine expoentes negativos, caso existam, e racionalize os denominadores. Se necessário, suponha que as variáveis são números positivos e que os denominadores são não nulos.

a) $(5^2)^3\frac{\sqrt{5}}{5^{3/2}}$
b) $\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt[3]{3^4}}$
c) $(\frac{3}{2})^{-3}\sqrt{\frac{9}{16}}$
d) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{-3}\sqrt{\frac{25}{8}}$
e) $\sqrt[4]{81x^2y^8}$
f) $\sqrt[4]{16x^6y^2}$
g) $\frac{\sqrt{x^7}}{\sqrt{x^3}}$
h) $\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{y^5}}$
i) $\frac{(x^3)^2}{\sqrt{x^5x^3}}$
j) $(x^{-5}y^{1/3})^{-3/5}$
k) $\sqrt{x\sqrt{x}}$
l) $\frac{(w^2)^{1/3}}{\sqrt{w^3}}$
m) $\frac{5^{-1/2}(5x^{5/2})}{(5x)^{3/2}}$
n) $\left(\frac{2\sqrt{u^5v^2}}{v\sqrt{u}}\right)\left(\frac{v^2}{2\sqrt{u}}\right)^2$
o) $\frac{3^{1/2}}{(2y^3)^2}\sqrt{\frac{64y^4}{27}}$
p) $\left(\frac{x^{7/2}}{2^{5/2}}\right)\sqrt{\frac{49x^3}{8}}$
q) $\frac{y^{1/2}\cdot(yx^{3/2})}{(yx)^{5/2}}$
r) $(2x)^{1/2}\sqrt{\frac{32}{x^7}}$
s) $\left(\frac{81x}{2}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{8x^3}{9}}$
t) $\frac{2^{3/2}}{(3x)^{1/2}}\sqrt{\frac{27x}{32}}$

17. Se sua calculadora não dispõe de uma tecla específica para a determinação de raízes quadradas, não se desespere. Existe um algoritmo muito simples (denominado *método de Newton*) para a obtenção aproximada da raiz de um número real positivo a. O algoritmo é composto dos seguintes passos:

1) Defina uma estimativa inicial, x_0, para a raiz. Qualquer número maior que zero serve, de modo que você pode usar $x_0 = 1$, por exemplo.

2) De posse de uma estimativa x_k (você já tem x_0), calcule outro valor aproximado x_{k+1} usando a fórmula
$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}.$$

3) Repita o passo 2 até que duas estimativas sucessivas, x_k e x_{k+1}, sejam muito parecidas.

Aplique esse método para calcular $\sqrt{2}$ e verifique quantas vezes você teve que repetir o passo 2.

Respostas dos Exercícios 1.9

1. 30 m.

2. 5 e −5. Somente 5 é a raiz quadrada de 25.

3. Aproximadamente 89 km.

4. $1 - \sqrt{2}$, $\sqrt{3} - 2$, $2 - \sqrt{3}$, $\sqrt{2} - 1$

5. a) 32 b) 42 c) 45 d) $\frac{1}{6}$ e) 10 f) 21 g) $\frac{1}{3}$ h) $-\frac{1}{3}$ i) 0 j) 3 k) −1 l) $-\frac{1}{2}$

6. a) $2\sqrt{5}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ e) −6 f) $-\frac{4}{3}$ g) 36 h) 5 i) $\frac{1}{5}$ j) 81 k) 4 l) 12 m) 4 n) 2 o) $\frac{3}{2}$ p) 4 q) 3 r) 2

7. a) 6 b) 30 c) $5\sqrt{3}$ d) $15\sqrt{2}$ e) 4 f) $5\sqrt[3]{4}$ g) $3\sqrt[3]{5}$ h) 3 i) $\sqrt{7}$ j) $\frac{3}{2}$ k) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ l) 1 m) 30 n) $\frac{1}{4}$ o) 2 p) $\frac{2}{3}$

8. a) $2x$ b) $2\sqrt{x}$ c) $2x$ d) $\frac{2\sqrt{2}}{x}$ e) xy^2 f) x^3y^2 g) $\frac{y^2}{z}$ h) $\frac{\sqrt{w}}{v}$ i) $y^2\sqrt{x}$ j) $\frac{\sqrt[4]{x}}{y^4}$

9. Exemplo:
$$\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13,$$
enquanto
$$\sqrt{144} + \sqrt{25} = 12 + 5 = 17.$$

10. a) $3\sqrt{3}$ b) $3 - \sqrt{5}$ c) $2\sqrt{8}$ d) $7\sqrt{2}$ e) $2+2\sqrt{2}$ f) $5 + \sqrt{5}$ g) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ h) 0 i) $2\sqrt{15}$ j) $4\sqrt{3}$

11. a) $3^{1/2}$ b) $3^{-1/2}$ c) $2^{1/3}$ d) $5^{1/2}$ e) $2^{-3/2}$ f) $-2^{1/3}$

12. a) $\sqrt[5]{3^2}$ b) $\sqrt{5^5}$ c) $\sqrt[3]{(-3)^5}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3^5}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$ g) $\sqrt[3]{4^2}$ h) $-\sqrt{3}$ i) $\frac{1}{\sqrt{2^3}}$

13. a) 0,6 b) 0,2 c) 0,3

14. a) 64 b) 9 c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{32}$ e) $\frac{25}{16}$ f) $\frac{81}{16}$ g) 3 h) 7 i) $2\sqrt{x}$ j) $\frac{\sqrt{x}}{2}$ k) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$ l) $\frac{1}{2x^3}$ m) $\frac{2}{x^3}$

15. a) $\frac{\sqrt{11}}{11}$ b) $\sqrt{5}$ c) $x\sqrt{x}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$ f) $\sqrt[7]{5^3}$

16. a) 5^5 b) $\sqrt[6]{3}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{25}$ e) $3y^2\sqrt{x}$ f) $2x\sqrt{xy}$ g) x^2 h) $\frac{1}{y}$ i) x^2 j) $\frac{x^3\sqrt[5]{y^4}}{y}$ k) $\sqrt[4]{x^3}$ l) $\frac{\sqrt[6]{w}}{w}$ m) $\frac{x}{5}$ n) $\frac{uv^4}{2}$ o) $\frac{2}{3y^4}$ p) $\frac{7x^5}{16}$ q) $\frac{1}{xy}$ r) $\frac{8}{x^3}$ s) $6x^2$ t) $\frac{3}{2}$

17. ...

1.10 Unidades de medida

As unidades de medida brasileiras seguem o **Sistema Internacional de Unidades** (SI), que foi concebido a partir das sete unidades básicas apresentadas na Tabela 1.11.

Você sabia?

O SI foi estabelecido em 1960, a partir do antigo sistema MKS, que era baseado na tríade metro-quilograma-segundo. Com a crescente adoção da base 10 e do metro como unidade de medida de comprimento, o SI se tornou padrão em quase todos os países.

Tabela 1.11: Unidades básicas do SI.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Quantidade de matéria	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

O uso de um conjunto reduzido de unidades simplifica e unifica a notação, mas torna difícil a apresentação de medidas com magnitudes muito diferentes. Assim,

por exemplo, se usarmos apenas o metro como unidade de comprimento, teremos que fornecer o tamanho da *Escherichia coli* e o raio médio da Terra como

$$\text{comprimento da } \textit{Escherichia coli} = 0{,}000002 \text{ m};$$
$$\text{raio médio da Terra} = 6.371.000 \text{ m}.$$

Felizmente, o SI conta com um conjunto de prefixos que permitem que definamos múltiplos e submúltiplos das unidades mostradas na Tabela 1.11. Com isso, fica fácil ajustar as unidades àquilo que está sendo medido, de modo que a magnitude dos valores seja sempre apropriada. O excesso de zeros nos valores acima, por exemplo, pode ser eliminado se adotarmos o quilômetro para representar distâncias grandes, e o centímetro, o milímetro ou o micrômetro para as medidas pequenas. Nesse caso, escreveríamos

$$\text{comprimento da } \textit{Escherichia coli} = 2\ \mu\text{m};$$
$$\text{raio médio da Terra} = 6.371 \text{ km}.$$

Os principais prefixos do SI são mostrados na Tabela 1.13. De fato, esses prefixos podem ser combinados com várias grandezas, inclusive aquelas que não fazem parte do SI. A Tabela 1.12 contém alguns exemplos de unidades que envolvem prefixos, bem como a equivalência entre medidas nessa unidade e na unidade de referência.

Tabela 1.12: Medidas que incluem prefixos do SI.

Unidade	**Equivalência**
mililitro	1 ml = 0,001 l
miligrama	1 mg = 0,001 g
milissegundo	1 ms = 0,001 s
decímetro	1 dm = 0,1 m
quilograma	1 kg = 1.000 g
quilowatt	1 kW = 1.000 W
centilitro	1 cl = 0,01 L
microampere	1 μA = 10^{-6} A
mega-hertz	1 MHz = 10^{6} Hz

Tabela 1.13: Prefixos do Sistema Internacional.

Prefixo	**Símbolo**	**Potência**	**Forma decimal**
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
giga	G	10^{9}	1 000 000 000
mega	M	10^{6}	1 000 000
quilo	k	10^{3}	1 000
hecto	h	10^{2}	100
deca	da	10^{1}	10
deci	d	10^{-1}	0,1
centi	c	10^{-2}	0,01
mili	m	10^{-3}	0,001
micro	μ	10^{-6}	0,000 001
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001
pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001

Observe que, dentre as unidades básicas do SI, o quilograma é uma exceção, já que aparece com o prefixo "quilo". Nesse caso específico, a unidade à qual foi aplicado o prefixo é o grama, que equivale a um milésimo do quilograma.

Para discutir o uso de prefixos, vamos nos concentrar nas medidas de comprimento, embora os princípios aqui apresentados sirvam para as demais medidas. Observando a Tabela 1.13, notamos que suas quatro colunas contêm informações que podem ser associadas de forma equivalente ao metro, que é a unidade padrão de comprimento. Assim, escolhendo as linhas dos prefixos *mili* e *quilo*, temos

$$\begin{aligned} 1 \text{ milímetro} &= 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} = 0{,}001 \text{ m}; \\ 1 \text{ quilômetro} &= 1 \text{ km} = 10^{3} \text{ m} = 1\,000 \text{ m}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, o prefixo *mili*, a letra m que antecede o símbolo do metro (que também é a letra m) e os números 10^{-3} e 0,001 significam o mesmo: *um milésimo*. Já o prefixo *quilo*, o símbolo k e os números 10^3 e 1000 significam *um milhar*.

Alguns exemplos de medidas cuja magnitude é diferente de 1 são

$$\begin{array}{rcccccc} 3{,}27 \text{ centímetros} & = & 3{,}27 \text{ cm} & = & 3{,}27 \cdot 10^{-2} \text{ m} & = & 0{,}0327 \text{ m;} \\ 8{,}54 \text{ decâmetros} & = & 8{,}54 \text{ dam} & = & 8{,}54 \cdot 10^{1} \text{ m} & = & 85{,}4 \text{ m.} \end{array}$$

■ Mudança de unidades

Nos dois últimos exemplos, vimos como usar os dados da Tabela 1.13 para converter para metros uma medida de comprimento dada em centímetros ou decâmetros. Discutamos, agora, como fazer uma conversão no sentido contrário, isto é, do metro para outra unidade de comprimento.

Para começar, tomemos como exemplo o decâmetro. Quando escrevemos

$$1 \text{ dam} = 10 \text{ m},$$

estamos afirmando que há 10 metros em cada decâmetro, o que implica que o metro é igual a um décimo do decâmetro, ou seja,

$$1 \text{ m} = \frac{1}{10} \text{ dam} = 0{,}1 \text{ dam}.$$

De forma análoga, quando afirmamos que um decímetro é igual a um décimo do metro, isto é, quando escrevemos

$$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0{,}1 \text{ m},$$

queremos dizer que há 10 decímetros em cada metro, o que significa que

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}.$$

Recorrendo à mesma ideia e usando os dados da Tabela 1.13, obtemos as seguintes relações entre o metro e outras unidades de comprimento:

$$1 \text{ m} = \left\{ \begin{array}{rcrcr} \frac{1}{10^{-3}} \text{ mm} & = & \frac{1}{0{,}001} \text{ mm} & = & 1000 \text{ mm} \\ \frac{1}{10^{-2}} \text{ cm} & = & \frac{1}{0{,}01} \text{ cm} & = & 100 \text{ cm} \\ \frac{1}{10^{-1}} \text{ dm} & = & \frac{1}{0{,}1} \text{ dm} & = & 10 \text{ dm} \\ \frac{1}{10^{1}} \text{ dam} & = & \frac{1}{10} \text{ dam} & = & 0{,}1 \text{ dam} \\ \frac{1}{10^{2}} \text{ hm} & = & \frac{1}{100} \text{ hm} & = & 0{,}01 \text{ hm} \\ \frac{1}{10^{3}} \text{ km} & = & \frac{1}{1000} \text{ km} & = & 0{,}001 \text{ km} \end{array} \right.$$

Usando essas relações e a Tabela 1.13, podemos converter quaisquer medidas de comprimento do SI, como mostra o problema abaixo.

Problema 1. Conversão de unidades de comprimento

Converta

a) 123,5 cm para decâmetros;

b) 0,362 hm para decímetros.

Solução.

a) Usando os dados da Tabela 1.13, é fácil converter para metros a medida fornecida:

$$123{,}5 \text{ cm} = 123{,}5 \cdot 0{,}01 \text{ m} = 1{,}235 \text{ m}.$$

Agora, observando que 1 m = 0,1 dam, temos

$$1{,}235 \text{ m} = 1{,}235 \cdot 0{,}1 \text{ dam} = 0{,}1235 \text{ dam}.$$

b) Nesse caso, a conversão de hectômetros para metros fornece:

$$0{,}362 \text{ hm} = 0{,}362 \cdot 100 \text{ m} = 36{,}2 \text{ m}.$$

Lembrando, então, que 1 m = 10 dm, obtemos

$$36{,}2 \text{ m} = 36{,}2 \cdot 10 \text{ dm} = 362 \text{ dm}.$$

Embora não seja complicado, o processo de conversão usado no Problema 1 é trabalhoso, pois envolve dois passos. Felizmente, como o sistema internacional adota a base 10, a conversão entre unidades pode ser feita de uma só vez com o simples deslocamento da vírgula, a exemplo do que foi visto quando discutimos a notação científica na Seção 1.8.

Exemplo 2. Mudança de unidade de comprimento

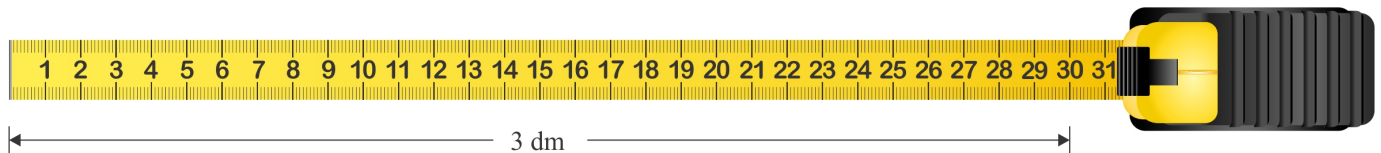



Figura 1.26: Uma trena indicando 3 dm.

A Figura 1.26 mostra uma trena na qual está destacada a medida de três decímetros. Como a numeração original da trena é dada em centímetros, é fácil notar que 3 dm equivalem a 30 cm. Além disso, como a distância entre dois tracinhos sucessivos da trena corresponde a 1 mm, cada centímetro equivale e 10 mm. Logo, 3 dm correspondem a $30 \cdot 10$ mm = 300 mm, ou seja,

$$3 \text{ dm} = 30 \text{ cm} = 300 \text{ mm}.$$

Generalizando o exemplo acima, observamos que 1 km equivale a 10 hm, 1 hm equivale a 10 dam, 1 dam equivale a 10 m, e assim sucessivamente. De modo análogo, adotando o sentido inverso (ou seja, partindo da menor unidade em direção à maior), notamos que 1 mm equivale a 0,1 cm; 1 cm equivale a 0,1 dm etc.

Sendo assim, cada vez que se troca uma unidade de comprimento pela imediatamente menor é preciso multiplicar o valor da medida por 10, e cada vez que se troca pela unidade imediatamente maior deve-se dividir a medida por 10, como mostrado abaixo.

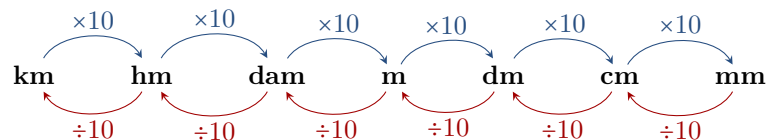



Figura 1.27: Operações para a conversão de unidades de comprimento.

Lembrando, então, que o produto de um número por 10 corresponde ao deslocamento da vírgula para a direita, e que a divisão de um número por 10 é obtida deslocando-se a vírgula para a esquerda, fica fácil converter unidades com prefixos diferentes, como ilustra o problema a seguir.

Problema 3. Conversão de unidades de comprimento

Converta

a) 0,0032 m para milímetros;

b) 0,045 hm para centímetros;

c) 9372 m para quilômetros;

d) 12,7 dm para decâmetros.

Solução.

a) Na Figura 1.27, notamos que o milímetro é a terceira unidade à direita do metro. Desse modo, a conversão solicitada exige que desloquemos a vírgula três algarismos para a direita, ou seja,

$$0{,}0032 \text{ m} = 3{,}2 \text{ mm}.$$

b) Como a mudança de hectômetros para centímetros corresponde a efetuar 4 passos para a direita na Figura 1.27, devemos mover a vírgula quatro casas para a direita. Logo,

$$0{,}045 \text{ hm} = 450 \text{ cm}.$$

c) Na Figura 1.27, o quilômetro é a terceira unidade à esquerda do metro. Movendo, então, a vírgula três algarismos para a esquerda, concluímos que

$$9372 \text{ m} = 9{,}372 \text{ km}.$$

d) Uma vez que a mudança de decímetros para decâmetros exige 2 movimentos para a esquerda na Figura 1.27, devemos mover a vírgula duas casas para a esquerda, o que significa que

$$12{,}7 \text{ dm} = 0{,}127 \text{ dam}.$$

Agora, tente o Exercício 1.

Problema 4. Conversão de outras unidades de medida

Converta

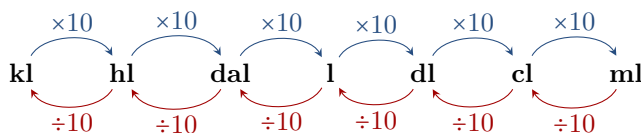
a) 0,054 l para mililitros;

b) 3800 cl para hectolitros;

c) 0,0062 kg para gramas;

d) 7,5 mg para decigramas.

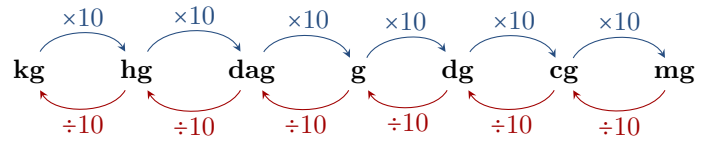
Solução.

a) A estratégia adotada no Problema 1 pode ser empregada para converter quaisquer unidades que admitam os prefixos do SI. Para trabalhar com volumes dados em múltiplos e frações do litro, como nesse problema, usamos

Como a mudança de litro para mililitro envolve três movimentos para a direita na figura acima, devemos mover a vírgula igual número de casas para a direita. Assim, obtemos

$$0{,}054 \text{ l} = 54 \text{ ml}.$$

b) Na figura acima, a conversão de centilitros para hectolitros requer quatro passos para a esquerda. Movendo, então, a vírgula para a esquerda, concluímos que

$$3800 \text{ cl} = 0{,}38 \text{ hl}.$$

c) Seguindo o princípio adotado até agora, estabelecemos as seguintes relações entre medidas de peso:

Dado que a mudança de quilogramas para gramas envolve três movimentos para a direita nessa figura, a conversão solicitada nesse item requer que transportemos a vírgula três algarismos para a direita. Com isso, obtemos

$$0{,}0062 \text{ kg} = 6{,}2 \text{ g}.$$

d) Notando, também, que a conversão de miligramas para decigramas exige dois passos para a esquerda, o deslocamento correspondente da vírgula nos fornece

$$7{,}5 \text{ mg} = 0{,}075 \text{ dg}.$$

Agora, tente o Exercício 2.

■ Unidades derivadas

Algumas grandezas, como aquelas apresentadas Tabela 1.14, requerem que usemos uma combinação das unidades do SI.

Tabela 1.14: Algumas grandezas com unidades derivadas do SI.

Grandeza	**Nome da unidade**	**Relação com o SI**
área	metro quadrado	m^2
volume	metro cúbico	m^3
velocidade	metro por segundo	m/s
aceleração	metro por segundo quadrado	m/s^2
densidade	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
vazão	metro cúbico por segundo	m^3/s

Para converter unidades de medida combinadas, é preciso manipular cada unidade em separado. Os problemas a seguir mostram como efetuar esse tipo de conversão.

Problema 5. Conversão de unidades de área

Converta

a) 0,25 cm^2 para milímetros quadrados;

b) 3,7 m^2 para centímetros quadrados;

c) 1250 m^2 para quilômetros quadrados;

d) 480.000.000 cm^2 para quilômetros quadrados.

Solução.

a) Para converter centímetros quadrados em milímetros quadrados é preciso lembrar que cada centímetro corresponde a 10 mm, de modo que

$$1 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} = 100 \text{ mm}^2.$$

Essa relação entre centímetro quadrado e milímetro quadrado fica mais clara quando observamos a Figura 1.28, que mostra uma quadrado de 1 cm^2 de área ampliado de uma folha de papel milimetrado por uma potente lupa.

Note que, no papel milimetrado, cada lado do quadrado de 1 cm é dividido em 10 partes de 1 mm de comprimento. Assim, o quadrado grande, que tem 1 cm^2, é dividido em $10 \times 10 = 100$ quadrados pequenos, cada qual com 1 mm^2 de área.

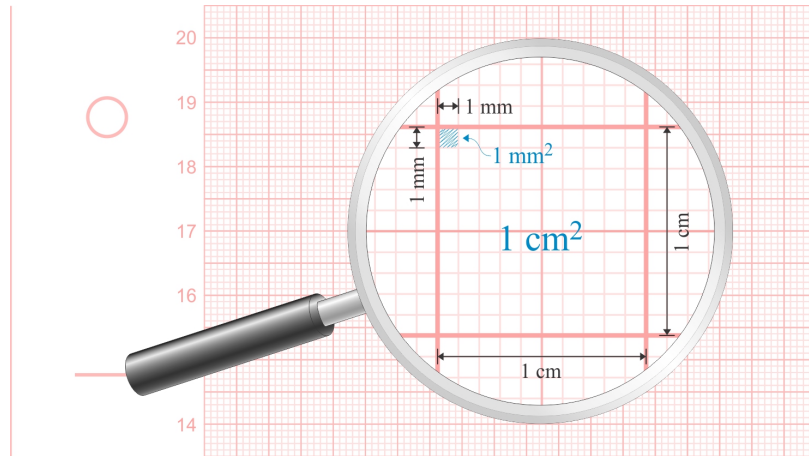



Figura 1.28: Um quadrado com 1 cm^2 de área ampliado de uma folha de papel milimetrado.

Aplicando essa regra de conversão ao nosso problema, concluímos que

$$0{,}25 \text{ cm}^2 = 0{,}25 \times 100 \text{ mm}^2 = 25 \text{ mm}^2.$$

b) Lembrando que cada metro corresponde a 100 cm, podemos fazer a conversão diretamente:

$$3{,}7 \text{ m}^2 = 3{,}7 \times 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} = 3{,}7 \times 10000 \text{ cm}^2 = 37\,000 \text{ cm}^2.$$

Podemos tornar mais simples e direta essa conversão notando que, como a mudança de metros para centímetros envolve o deslocamento da vírgula duas casas para a direita, a conversão de metros quadrados para centímetros quadrados deve envolver o dobro disso, ou seja, o deslocamento de 4 casas para a direita.

c) Para a mudança de metros quadrados para quilômetro quadrados, devemos observar que

$$1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 0{,}001 \text{ km} \times 0{,}001 \text{ km} = 0{,}000001 \text{ km}^2.$$

Assim, temos

$$1250 \text{ m}^2 = 1250 \times 0{,}000001 \text{ km}^2 = 0{,}00125 \text{ km}^2.$$

d) Como a mudança de centímetros para quilômetros exige que desloquemos a vírgula 5 casas para a esquerda, a mudança de centímetros quadrados para quilômetros quadrados exige um deslocamento de $5 \times 2 = 10$ casas para a esquerda, ou seja,

$$480.000.000 \text{ cm}^2 = 0{,}048 \text{ km}^2.$$

Agora, tente o Exercício 3.

Problema 6. Conversão de unidades de volume

Converta

a) $0{,}00023 \text{ m}^3$ para milímetros cúbicos;

b) $6{,}8 \text{ hm}^3$ para metros cúbicos;

c) $5.700.000 \text{ cm}^3$ para metros cúbicos;

d) $450.000.000 \text{ m}^3$ para quilômetros cúbicos.

Solução.

a) Seguindo o mesmo raciocínio empregado no Problema 5, escrevemos

$$1 \text{ m}^3 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm} \times 1000 \text{ mm} \times 1000 \text{ mm} = 1.000.000.000 \text{ mm}^3.$$

Portanto,

$$0{,}00023 \text{ m}^3 = 0{,}00023 \times 1.000.000.000 \text{ mm}^3 = 230.000 \text{ mm}^3.$$

b) Lembrando que, para mudar de hectômetro para metro, devemos mover a vírgula duas casas para a direita, chegamos à conclusão de que a mudança de hectômetro cúbico para metro cúbico exige que desloquemos a vírgula $2 \times 3 = 6$ casas para a direita. Assim,

$$6{,}8 \text{ hm}^3 = 6.800.000 \text{ m}^3.$$

c) Se $1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m}$, então

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m} \times 0{,}01 \text{ m} \times 0{,}01 \text{ m} = 0{,}000001 \text{ m}^3.$$

Logo,

$$5.700.000 \text{ cm}^3 = 5.700.000 \times 0{,}000001 \text{ m}^3 = 5{,}7 \text{ m}^3.$$

d) Como a mudança de metros para quilômetros envolve o deslocamento da vírgula três casas para a esquerda, a conversão de metro cúbico para quilômetro cúbico requer que a vírgula seja movida $3 \times 3 = 9$ casas para a esquerda. Assim,

$$450.000.000 \text{ m}^3 = 0{,}45 \text{ km}^3.$$

Agora, tente o Exercício 4.

Várias unidades derivadas das sete unidades básicas do SI recebem nomes especiais. Algumas dessas unidades são dadas na Tabela 1.15.

Tabela 1.15: Unidades derivadas das sete básicas que compõem o SI.

Grandeza	**Unidade**	**Símbolo**	**Relação com unidades SI**
Ângulo plano	radiano	rad	m/m
Ângulo sólido	esferorradiano	sr	m^2/m^2
Força	newton	N	kg m/s^2
Pressão	pascal	Pa	N/m^2
Energia, trabalho	joule	J	N m
Potência	watt	W	J/s
Carga elétrica	coulomb	C	A s
Tensão elétrica	volt	V	W/A
Resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
Capacitância	farad	F	C/V
Frequência	hertz	Hz	1/s
Fluxo luminoso	lúmen	lm	cd sr
Iluminância	lux	lx	lm/m^2
Temperatura	grau Celsius	°C	K

Para converter para graus Celsius uma temperatura dada em kelvin, basta subtrair 273,15.

Outras unidades usadas no Brasil, mas que não fazem parte do SI, são dadas na Tabela 1.16. A tabela também fornece a relação entre essas unidades e aquelas que compõem o SI.

Tabela 1.16: Algumas unidades que não fazem parte do SI.

Grandeza	**Unidade**	**Símbolo**	**Valor em unidades do SI**
tempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	dia	d	1 d = 24 h = 1440 min = 86 400 s
ângulo plano	grau	°	$1° = (\pi/180)$ rad
	minuto	′	$1' = (1/60)° = (\pi/10800)$ rad
	segundo	″	$1'' = (1/60)' = (\pi/648000)$ rad
comprimento	angstrom	Å	1 Å = 0,1 nm = 100 pm = 10^{-10} m
e distância	milha náutica	M	1 M = 1 852 m
	ano-luz	ly	1 ly = 9 460 730 472 580 800 m
área	hectare	ha	1 ha = 0,01 km^2 = 1 hm^2 = 10^4 m^2
volume	litro	l, L	1 L = 1 dm^3 = 10^3 cm^3 = 10^{-3} m^3
massa	tonelada	t	1 t = 10^3 kg
velocidade	nó	kn	1 kn = 1 M/h = 1 852/3 600 m/s
força	quilograma-força	kgf	1 kgf = 9,80665 N
pressão	bar	bar	1 bar = 100 kPa = 10^5 Pa
	Atmosfera	atm	1 atm = 101,325 kPa = 101 325 Pa
	Metro de coluna d'água	mca	1 mca = 9,80638 kPa = 9 806,38 Pa
	milímetro de mercúrio	mmHg	1 mmHg = 133,3224 Pa
energia	caloria	cal	1 cal = 4,1868 J
potência	cavalo-vapor	cv	1 cv = 735.49875 W

Problema 7. Conversão de unidades que não são do SI

a) Se uma fazenda tem 120 ha, qual é sua área em quilômetros quadrados?

b) Se uma caixa d'água comporta 500 L, qual é seu volume em metros cúbicos?

c) Se uma barra de cereal tem 84 quilocalorias, quanta energia ela fornece em quilojoules?

d) Se um esfigmomanômetro indicou que um paciente tinha uma pressão sistólica de 140 mmHg, qual era a pressão da pessoa em bar?

Solução.

a) A Tabela 1.16 nos informa que 1 ha $= 0{,}01$ km^2. Logo,

$$120 \text{ ha} = 120 \times 0{,}01 \text{ km}^2 = 1{,}2 \text{ km}^2.$$

b) Recorrendo novamente à Tabela 1.16, observamos que 1 L $= 10^{-3}$ m^3. Dessa forma,

$$500 \text{ L} = 500 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 0{,}5 \text{ m}^3.$$

c) Como 1 cal $= 4{,}1868$ J, temos

$$84 \text{ kcal} = 84.000 \text{ cal} = 84.000 \times 4{,}1868 \text{ J} = 351.691{,}2 \text{ J} \approx 351{,}7 \text{ kJ}.$$

d) Se 1 mmHg $= 133{,}322$ Pa, então

$$140 \text{ mmHg} = 140 \times 133{,}322 \text{ Pa} = 18.665{,}08 \text{ Pa}.$$

Além disso, como 1 bar $= 10^5$ Pa, temos

$$18.665{,}08 \text{ Pa} = 18.665{,}08 \times \frac{1}{10^5} \text{ bar} = 18.665{,}08 \times 10^{-5} \text{ bar} \approx 0{,}1867 \text{ bar}.$$

Agora, tente o Exercício 10.

Problema 8. Conversão de unidades compostas

a) Se um carro trafega a 50 km/h, qual é sua velocidade em metros por segundo?

b) A velocidade do som no ar é de aproximadamente 340 m/s. Qual é a velocidade do som em quilômetros por hora?

c) A 20°C, o politereftalato de etileno, ou simplesmente PET (material do qual são feitas as garrafas de refrigerante), tem densidade igual a 1,3 g/cm^3. Qual é a densidade do PET em quilograma por litro, à mesma temperatura?

Solução.

a) Para converter medidas de velocidade, é preciso tratar em separado as unidades de comprimento e de tempo. Começando pela mudança de quilômetro para metro, uma consulta à Tabela 1.13 ou à Figura 1.27 revela que

$$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}.$$

Passando, então, à mudança da unidade de tempo, a Tabela 1.16 indica que

$$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}.$$

Como a velocidade é obtida dividindo-se a medida de distância pela medida de tempo, temos

$$50 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50 \times \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} \approx 13{,}89 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Mais uma vez, converteremos a velocidade trabalhando em separado com as medidas de comprimento e de tempo.

Lembrando que 1 km = 1000 m e que 1 h = 3 600 s, temos

$$1 \text{ m} = \frac{1}{1\,000} \text{ km} = 0{,}001 \text{ km} \qquad \text{e} \qquad 1 \text{ s} = \frac{1}{3\,600} \text{ h} \approx 0{,}00027778 \text{ h}.$$

Logo,

$$340 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 340 \times \frac{0{,}001 \text{ km}}{0{,}00027778 \text{ h}} \approx 1224 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

c) A densidade também envolve duas unidades, uma de massa e outra de volume. Para converter para quilogramas uma medida de massa dada em gramas, usamos a relação

$$1 \text{ g} = 0{,}001 \text{ kg}.$$

Você também pode lembrar que a mudança de quilograma para grama requer o deslocamento da vírgula três casas para a esquerda.

Por sua vez, a conversão de centímetros cúbicos para litros envolve a relação 1 L = 10^3 cm^3, fornecida na Tabela 1.16. Sendo assim,

$$1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{10^3} \text{ L} = 10^{-3} \text{ L}.$$

Finalmente, dividindo os valores convertidos, obtemos

$$1{,}3 \ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1{,}3 \times \frac{0{,}001 \text{ kg}}{10^{-3} \text{ L}} = 0{,}0013 \times 10^3 \ \frac{\text{kg}}{\text{L}} = 1{,}3 \ \frac{\text{kg}}{\text{L}}.$$

Curiosamente, nesse caso, a conversão de unidade não provocou a mudança da magnitude da medida.

Agora, tente o Exercício 14.

■ Medidas imperiais

Apesar de chamarmos genericamente de *medidas imperiais* as unidades apresentadas nessa seção, algumas unidades usadas nos EUA, como as de volume de líquido, seguem um padrão anterior àquele adotado pelo Reino Unido em 1824.

Formalmente, apenas três países do globo não aderiram ao sistema internacional de unidades: Libéria, Myanmar e os Estados Unidos. Além desses, alguns países que, no século 19, formavam o império britânico ainda usam no dia a dia uma parte das unidades de medida imperiais. A Tabela 1.17 fornece uma lista parcial das unidades adotadas atualmente nos Estados Unidos.

Tabela 1.17: Algumas unidades de medida imperiais.

Grandeza	Unidade	Símbolo	fator de conversão
comprimento	polegada	in	1 in = 2,54 cm
	pé	ft	1 ft = 30,48 cm
	jarda	yd	1 yd = 91,44 cm
	milha	mi	1 mi = 1,609344 km
área	polegada quadrada	sq in	1 sq in = 6,4516 cm^2
	pé quadrado	sq ft	1 sq ft = 929,0304 cm^2
	acre	ac	1 ac = 4046,8564224 m^2
volume de líquido	galão	gal	1 gal = 3,785411784 L
	pint	pt	1 liq pt = 0,473176473 L
	onça	fl oz	1 fl oz = 29,5735295625 ml
Massa	libra	lb	1 lb = 453,59237 g
	onça	oz	1 oz = 28,349523125 g
temperatura	grau Fahrenheit	°F	1°F = $\frac{5}{9}$ °C
força	libra-força	lbf	1 lbf = 4,4482216152605 N
pressão	libra-força por polegada quadrada	psi	1 psi = 6894,757293168 Pa
potência	cavalo-vapor mecânico	hp	1 hp = 745,69987158227 W
energia	unidade térmica britânica	BTU	1 BTU = 1 055,05585262 J

Para converter para graus Celsius uma temperatura em graus Fahrenheit é preciso, em primeiro lugar, subtrair 32 do valor medido.

Problema 9. Conversão de unidades imperiais

a) Um carro estrangeiro tem um tanque com capacidade para 16 gal de combustível. Qual é a capacidade em litros do tanque?

b) Em certa estrada nos Estados Unidos, a velocidade máxima permitida corresponde a 70 mi/h. Qual é o limite em quilômetros por hora?

c) Se um barômetro está indicando que a pressão atmosférica corresponde a 14,2 psi, qual é o valor da pressão em milímetros de mercúrio?

Solução.

a) A Tabela 1.17 indica que 1 gal = 3,785411784 L. Logo,

$$16 \text{ gal} = 16 \times 3{,}785411784 \text{ L} \approx 60{,}57 \text{ L}.$$

Ou seja, o tanque comporta cerca de 61 litros.

b) Uma vez que 1 mi = 1,609344 km, temos

$$70\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = 70 \times \frac{1{,}609344 \text{ km}}{1 \text{ h}} \approx 112{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

c) Segundo a Tabela 1.17, 1 psi = 6894,757293168 Pa, de modo que

$$14{,}2 \text{ psi} = 14{,}2 \times 6894{,}757293168 \text{ Pa} \approx 97.905{,}55 \text{ Pa}.$$

Por sua vez, a Tabela 1.16 informa que 1 mmHg = 133,3224 Pa, o que implica em

$$1 \text{ Pa} = \frac{1}{133{,}3224} \text{ mmHg}.$$

Assim,

$$97.905{,}55 \text{ Pa} = \frac{97.905{,}55}{133{,}3224} \text{ mmHg} \approx 734{,}35 \text{ mmHg}$$

Solução.

Agora, tente o Exercício 15.

■ Unidades de armazenamento de dados

Você sabia?
Se você prefere a forma aportuguesada das palavras, pode usar **baite** em lugar de *byte*.

O *binary term*, ou simplesmente **byte**, é uma unidade de armazenamento de dados formada por 8 bits. Por sua vez, o **bit**, ou *binary digit*, é a menor unidade de informação armazenada ou transmitida por um aparelho digital, e pode assumir apenas dois valores distintos, costumeiramente representados por 0 e 1. Como um byte tem 8 bits, cada byte pode assumir $2^8 = 256$ valores diferentes, o que é suficiente para representar todas as letras maiúsculas e minúsculas do alfabeto, bem como os números e diversos símbolos especiais ($, %, #, &, ?, ! etc).

O bit é representado pela letra **b**, enquanto o símbolo do byte é **B**. Um aspecto confuso das unidades de armazenamento de dados é que elas misturam potências de 2 com os prefixos do SI, de modo que, por exemplo, 1 quilobyte não equivale a 1000 bytes. De fato,

$$1 \text{ kB} = 2^{10} \text{ B} = 1024 \text{ B}.$$

Essa diferença de 24 bytes parece pequena, mas o efeito é amplificado quando trabalhamos com unidades maiores, como os gigabytes. A Tabela 1.18 fornece as principais unidades de armazenamento de dados, bem como sua relação com a unidade básica, que é o byte.

Tabela 1.18: Unidades de armazenamento de dados.

Prefixo	**Símbolo**	**Potência**	**Forma decimal**
quilobyte	kB	2^{10} B	1 024 B
megabyte	MB	2^{20} B	1 048 576 B
gigabyte	GB	2^{30} B	1 073 741 824 B
terabyte	TB	2^{40} B	1 099 511 627 777 B
petabyte	PB	2^{50} B	1 125 899 906 842 624 B
exabyte	EB	2^{60} B	1 152 921 504 606 846 976 B

Problema 10. Armazenamento e transferência de dados

a) Um disco rígido externo possui 3 TB de memória. Calcule o número aproximado de bytes que esse disco é capaz de armazenar.

b) Um roteador transmite dados a uma taxa real de 72 Mb/s. Quantos megabytes esse roteador transmite por segundo? E quantos bytes por segundo são transmitidos?

Solução.

a) Uma vez que $1\ \text{TB} = 2^{40}$ B, o disco rígido é capaz de armazenar

$$3 \times 2^{40}\ \text{B} \approx 3{,}3 \text{ trilhões de bytes.}$$

b) Como 1 byte corresponde a 8 bits, temos

$$72\ \text{Mb/s} = 72 \times \frac{1}{8}\ \text{MB/s} = 9\ \text{MB/s},$$

ou seja, o roteador transmite 9 megabytes por segundo. Além disso, como $1\ \text{MB} = 2^{20}$ B, são transmitidos

$$9\ \text{MB/s} = 9 \times 2^{20}\ \text{B/s} = 9\,437\,184\ \text{B/s}.$$

Agora, tente o Exercício 16.

Operações com horas, minutos e segundos

Em nosso cotidiano, representamos medidas de tempo usando unidades como os dias (d), as horas (h), os minutos (min) e os segundos (s). Como sabemos, as medidas de tempo não estão relacionadas através de múltiplos de 10, como é praxe no sistema internacional. Sendo assim, é preciso tomar algum cuidado ao efetuar operações aritméticas com medidas de tempo que envolvem mais de uma unidade, como mostram os problemas abaixo.

Problema 11. Horário de chegada do ônibus

O ônibus de João saiu da rodoviária de Campinas às 9 h 48 min. Se a viagem ao Rio de Janeiro tem duração prevista de 7 h 18 min, a que horas o ônibus deve chegar a seu destino?

Solução.

Como o horário de saída e o tempo de viagem envolvem medidas mistas (horas e minutos), vamos convertê-los para uma medida única: as horas.

Horário de saída: O instante de partida do ônibus corresponde à soma 9 h + 48 min. Para somar esses valores, vamos transformar os minutos em horas. Como cada hora compreende 60 minutos, temos:

Aqui, fizemos a conversão

$$1\ \text{min} = \frac{1}{60}\ \text{h}.$$

$$48\ \text{min} = 48 \cdot \frac{1}{60}\ \text{h} = \frac{48}{60}\ \text{h} = 0{,}8\ \text{h}.$$

Logo, o ônibus partiu às $9 + 0{,}8 = 9{,}8$ h.

Tempo de viagem: De forma análoga, o tempo de viagem pode ser escrito como a soma 7 h + 18 min. Para converter os minutos para horas, fazemos:

$$18\ \text{min} = 18 \cdot \frac{1}{60}\ \text{h} = \frac{18}{60}\ \text{h} = 0{,}3\ \text{h}.$$

Assim, a viagem consome $7 + 0{,}3 = 7{,}3$ h.

Agora que os valores foram convertidos para uma unidade única, podemos somá-los para obter o horário de chegada:

$$9{,}8\ \text{h} + 7{,}3\ \text{h} = 17{,}1\ \text{h}.$$

Finalmente, vamos converter o décimo de hora em minutos:

Nesse caso, usamos $1\,\text{h} = 60\,\text{min}$.

$$0{,}1\,\text{h} = 0{,}1 \cdot 60\,\text{min} = 6\,\text{min}.$$

Logo, o ônibus chegará à rodoviária do Rio de Janeiro às 17 h 06 min.

Problema 12. Diferença de tempo de corrida

O primeiro colocado na prova masculina dos 10000 metros da olimpíada de Londres, em 2012, foi o britânico Mo Farah, que correu a distância em 27 min 30,42 s. O outro britânico na prova, Christopher Thompson, foi apenas o vigésimo quinto colocado, tendo gasto 29 min 06,14 s para atravessar a linha de chegada. Qual foi a diferença do tempo de corrida dos dois atletas?

Solução.

Nesse problema, vamos converter o tempo dos atletas para segundos.

Tempo de Mo Farah:

$$27\,\text{min} + 30{,}42\,\text{s} = 27 \cdot 60\,\text{s} + 30{,}42\,\text{s} = 1650{,}42\,\text{s}.$$

Tempo de Christopher Thompson:

$$29\,\text{min} + 6{,}14\,\text{s} = 29 \cdot 60\,\text{s} + 6{,}14\,\text{s} = 1746{,}14\,\text{s}.$$

Logo, a diferença entre os tempos dos atletas foi de $1746{,}14 - 1650{,}42 = 95{,}72\,\text{s}$.

Problema 13. Tempo entre paradas de uma corrida de fórmula 1

Um determinado piloto de fórmula 1 consegue fazer uma volta do grande prêmio do Brasil em 1 min 29,1 s. Supondo que o piloto manterá esse ritmo em todas as 24 voltas que fará até a próxima parada para abastecimento, daqui a quanto tempo essa parada ocorrerá?

Solução.

Convertido para minutos, o tempo por volta corresponde a

$$1\,\text{min} + 29{,}1\,\text{s} = 1\,\text{min} + \frac{29{,}1}{60}\,\text{min} = 1{,}485\,\text{min}.$$

Multiplicando esse valor pelo número de voltas, obtemos $1{,}485 \cdot 24 = 35{,}64\,\text{min}$, que é o tempo, em minutos até a próxima parada. Esse tempo corresponde a

$$35\,\text{min} + 0{,}64 \cdot 60\,\text{s} = 35\,\text{min}\,38{,}4\,\text{s}.$$

Problema 14. Tempo médio de uma volta em uma corrida

Em 2012, o vencedor do grande prêmio do Brasil de fórmula 1 foi o inglês Jenson Button, da McLaren, que completou as 71 voltas da prova em 1 h 45 min 22,66 s. Qual foi o tempo médio por volta do intrépido piloto?

Solução.

Convertamos o tempo total de prova para minutos:

$$1\,\text{h} + 45\,\text{min} + 22{,}66\,\text{s} = 1 \cdot 60 + 45 + \frac{22{,}66}{60}\,\text{min} \approx 60 + 45 + 0{,}3777\,\text{min} \approx 105{,}3777\,\text{min}.$$

O tempo médio por volta é obtido dividindo-se o tempo total pelo número de voltas, ou seja

$$\text{Tempo médio} = \frac{105{,}3777}{71}\ \text{min} \approx 1{,}4842\ \text{min}.$$

Convertendo em segundos a parte fracionária do número, obtemos $0{,}4842 \cdot 60 \approx 29{,}05\ \text{s}$. Logo, em média, cada volta foi percorrida em cerca de 1 min 29 s.

Nos problemas acima, tomamos o cuidado de converter todas as unidades antes de efetuar as operações aritméticas. Entretanto, isso não é indispensável, como mostra o problema a seguir, no qual as mesmas contas são feitas de forma direta.

Problema 15. Cálculos com intervalos de tempo na forma direta

Efetue as operações abaixo:

a) 9 h 48 min + 7 h 18 min

b) 29 min 6,14 s − 27 min 30,42 s

c) 1 min 29,1 s · 24

d) 1 h 45 min 22,66 s ÷ 71

Solução.

a) Somando em separado as horas e os minutos, obtemos

$$\begin{array}{rrr} & 9\ \text{h} & 48\ \text{min} \\ + & 7\ \text{h} & 18\ \text{min} \\ \hline & 16\ \text{h} & 66\ \text{min} \end{array}$$

Como o número de minutos é superior a 60, fazemos a conversão 66 min = 1 h 06 min. Dessa forma, a soma fornece 16 h + 1 h + 6 min = 17 h 06 min.

b) Nesse problema, devemos subtrair em separado os minutos e os segundos. Entretanto, como 6,14 é menor que 30,42, para subtrair os segundos temos que fazer a conversão

$$29\ \text{min}\ 6{,}14\ \text{s} = 28\ \text{min} + 60\ \text{s} + 6{,}14\ \text{s} = 28\ \text{min}\ 66{,}14\ \text{s}.$$

Assim, obtemos

$$\begin{array}{rrr} & 28\ \text{min} & 66{,}14\ \text{s} \\ - & 27\ \text{min} & 30{,}42\ \text{s} \\ \hline & 1\ \text{min} & 35{,}72\ \text{s} \end{array}$$

c) Fazendo em separado o produto de minutos e segundos, obtemos

$$\begin{array}{rr} 1\ \text{min} & 29{,}1\ \text{s} \\ \times & 24 \\ \hline 24\ \text{min} & 698{,}4\ \text{s} \end{array}$$

A conversão de 698,4 s em minutos fornece

$$698{,}4\ \text{s} = \frac{698{,}4}{60} = 11{,}64\ \text{min} = 11\ \text{min} + 0{,}64 \cdot 60\ \text{s} = 11\ \text{min}\ 38{,}4\ \text{s}$$

Assim, o produto é igual a

$$24\ \text{min} + 698{,}4\ \text{s} = 24\ \text{min} + 11\ \text{min}\ 38{,}4\ \text{s} = 35\ \text{min}\ 38{,}4\ \text{s}.$$

d) Vamos calcular 1 h 45 min 22,656 s ÷ 71 dividindo, em primeiro lugar, as horas. Em seguida, dividiremos os minutos e, finalmente, os segundos. Como 1 é menor que 71, a divisão de 1 h por 71 fornece 0 h como quociente e 1 h como resto.

1 h | 71
1 h   0 h

Convertendo esse resto para minutos, obtemos 1 h = 60 min. Somando esse valor aos minutos do numerador, encontramos 60 + 45 = 105 min. A divisão de 105 min por 71 fornece 1 min como quociente e 34 min como resto.

105 min | 71
34 min   1 min

Convertendo o novo resto para segundos, obtemos 34 min = 34 · 60 s = 2040 s. Somando esse valor aos segundos do numerador, encontramos 2040+22,66 = 2062,66 s. Finalmente, a divisão desse valor por 71 fornece aproximadamente 29,05 s.

2062,66 s | 71
29,05 s

Logo, o quociente da divisão corresponde a 1 min 29,05 s.

Agora, tente o Exercício 22.

Exercícios 1.10

1. Efetue as conversões abaixo.

a) 312,5 m para quilômetros.
b) 0,27 m para milímetros.
c) 8,4 dam para decímetros.
d) 450 cm para hectômetros.
e) 23415 mm para decâmetros.
f) 0,0000215 km para milímetros.

2. Efetue as conversões abaixo.

a) 0,0025 hl para decilitros.
b) 18 cl para litros.
c) 1250 g para quilogramas.
d) 0,632 dag para centigramas.
e) 755 mA para amperes.
f) 0,00039 kA para miliamperes.

3. Efetue as conversões abaixo.

a) 50.000 m^2 para km^2.
b) 0,0625 m^2 para cm^2.
c) 2.340 mm^2 para dm^2.
d) 7,05 km^2 para hm^2.

4. Efetue as conversões abaixo.

a) 0,125 m^3 para dm^3.
b) 45.500 m^3 para hm^3.
c) 0,0064 cm^3 para mm^3.
d) 9.280 dm^3 para dam^3.

5. Supondo que a área média ocupada por uma pessoa em um comício seja de 2.500 cm^2, quantas pessoas poderão se reunir em uma praça que tem 7.500 m^2 de área?

6. Uma piscina tem 12 m de comprimento, 6 m de largura e 1,5 m de profundidade. Lembrando que o volume de um prisma retangular (como a piscina) é igual ao produto das medidas de seus lados, calcule o volume de água, em litros, que a piscina comporta.

7. Uma nota de R$ 50,00 tem 140 mm de comprimento, 65 mm de largura, 0,2 mm de espessura e densidade igual a 0,75 g/cm^3. Lembrando que o volume da nota é igual ao produto de suas três medidas, e que a massa (que denominamos usualmente de "peso") do dinheiro é o produto do volume pela densidade, determine a massa, em quilogramas, correspondente a R$ 600.000,00.

8. A reserva natural da Serra das Almas, localizada em Crateús (CE) tem 6.146 ha de área protegida. Qual é a área da reserva em km^2?

9. A tabela de informações nutricionais de um sanduíche indica que ele tem 2131 kJ. Quantas calorias tem esse sanduíche?

10. Efetue as conversões abaixo.

a) 56,4 kgf para newtons.
b) Meia tonelada para gramas.
c) 1,5 atm para milímetros de mercúrio.

11. Quando chega a um chuveiro, a água em um cano está a uma pressão de 4 mca. Qual é a pressão da água em quilopascals?

12. No vácuo, a luz viaja a uma velocidade de aproximadamente 300.000.000 m/s. Qual é a velocidade da luz em quilômetros por hora?

13. A água flui em uma cano a uma vazão de 2,5 L/s. Quantos metros cúbicos fluem pelo cano a cada hora?

14. Efetue as conversões abaixo.

a) 4,75 kgf/mm^2 para N/cm^2.
b) 0,63 kg/m^3 para g/cm^3.
c) 36 km/h para m/s.

15. Efetue as conversões abaixo.

a) 1.200 ft para metros.
b) 250 ml para onças.
c) 0,38 psi para pascals.
d) 9.000 BTU para quilojoules.

e) 0,5 gal/s para metros cúbicos por hora.
f) 6,14 kgf/cm^2 para libra-força por polegada quadrada (psi).

16. Efetue as conversões abaixo.

a) 2.500.000 MB para terabytes.
b) 0,7 GB para megabytes.
c) 300 Mb/s para GB/min.

17. O voo diário para Fortaleza da VAI (Viação Aérea Ipatinguense) sai de Ipatinga às 7 h 32 min. Se a viagem dura 6 h 44 min, a que horas o avião chega ao aeroporto da capital cearense?

18. Converta para minutos.

a) 4 h
b) 3,5 h
c) 2,75 h
d) $\frac{4}{3}$ h
e) 1,6 h
f) 5 h 33 min

19. Converta para segundos.

a) 1 h
b) 1,255 h
c) 1 h 30 min
d) 1 h 22,25 min
e) 2 h 12 min 47 s
f) 27 min 59 s

20. Converta para horas.

a) 1 h 30 min
b) 15 min 45 s
c) 2 h 40 min
d) 1 h 22 min 30 s

21. Uma comissária de bordo foi convocada para um voo noturno de ida e volta entre as cidades A e B. O tempo de voo entre A e B é o mesmo que entre B e A. A diferença de fuso horário entre as duas cidades é de uma hora. Sabe-se que a decolagem de A ocorreu às 2 h (horário local), a aterrissagem em B às 2 h 55 min (horário local) e a decolagem de B, para a viagem de volta, às 3 h 25 min (horário local). Qual foi a duração do voo entre A e B e quanto tempo a comissária trabalhou nesse período.

22. Efetue as operações abaixo.

a) 5 h 10 min 30 s + 1 h 37 min 12 s
b) 2 h 40 min 30 s + 2 h 22 min 35 s
c) 1 h 32 min − 1 h 10 min
d) 2 h 12 min − 1 h 40 min
e) 4 × 2 h 30 min
f) 2 h 30 min ÷ 5

Respostas dos Exercícios 1.10

1. a) 0,3125 km; b) 270 mm; c) 840 dm; d) 0,045 hm; e) 2,3415 dam; f) 21,5 mm

2. a) 2,5 dl; b) 0,18 L; c) 1,25 kg; d) 632 cg; e) 0,755 A; f) 390 mA

3. a) 0,05 km^2; b) 625 cm^2; c) 0,234 dm^2; d) 705 hm^2

4. a) 125 dm^3; b) 0,0455 hm^3; c) 6,4 mm^3; d) 0,00928 dam^3

5. 30.000 pessoas

6. 108 000 litros

7. 16,38 kg

8. 61,46 km^2

9. 508,98 cal

10. a) 533,095 N; b) 500.000 g; c) 1.140 mmHg

11. 39,2255 kPa

12. Cerca de 1.080.000.000 km/h.

13. 9 m^3/h

14. a) 0,4658 N/cm^2; b) 0,063 g/cm^3; c) 10 m/s

15. a) 365,76 m; b) 8,4535 fl oz; c) 2620 Pa; d) 9.495,5 kJ; e) 6,81374 m^3/h; f) 87,3313 psi^2

16. a) 2,384 TB; b) 716,8 MB; c) 2,197 GB/min

17. O voo chega às 14 h 16 min.

18. a) 240 min; b) 210 min; c) 165 min; d) 80 min; e) 96 min; f) 333 min

19. a) 3600 s; b) 4518 s; c) 5400 s; d) 4935 s; e) 7967 s; f) 1679 s

20. a) 1,5 h; b) 0,2625 h; c) 2,6667 h; d) 1,375 h

21. 1 h 55 min e 4 h 20 min.

22. a) 6 h 47 min 42 s; b) 5 h 3 min 5 s; c) 22 min; d) 32 min; e) 10 h; f) 30 min

Equações e inequações

2

Antes de ler o capítulo

O texto a seguir supõe que o leitor domine o conteúdo do Capítulo 1. Também se exige habilidade para trabalhar com várias unidades de comprimento, massa e volume.

O propósito desse capítulo é discutir como descrever um problema prático em linguagem matemática, e como resolvê-lo usando equações, inequações e a regra de três. Trataremos aqui dos tipos básicos de equações e inequações – lineares, quadráticas, racionais, irracionais e modulares –, deixando os casos mais complexos para os próximos capítulos.

Apesar de, em muitas seções, detalharmos os métodos de resolução de equações e inequações, o leitor deve ter claro que o processo de conversão de um texto escrito em um modelo matemático, também conhecido como **modelagem**, é o ponto mais importante de todo o livro. Aprendendo a usá-lo, o leitor verá os problemas cotidianos com outros olhos, e conseguirá enfrentá-los com maior facilidade.

2.1 Equações

Uma **equação** é uma declaração de que duas expressões são iguais. Essa **igualdade** é representada pelo símbolo "=". Assim, se sabemos que a expressão A é igual à expressão B, escrevemos

$$A = B.$$

São exemplos de equações:

a) $\dfrac{12y}{18} = \dfrac{2y}{3}$;

b) $|x| = \sqrt{x^2}$;

c) $3x - 2 = 10$;

d) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

A primeira dessas equações afirma que as frações $\frac{12y}{18}$ e $\frac{2y}{3}$ são equivalentes. Já a equação (b) fornece a definição de módulo a partir da raiz quadrada. Em ambos os casos, temos equações que são sempre válidas, não dependendo do valor das variáveis que nelas aparecem. Quando isso acontece, a equação recebe o nome de **identidade**.

Nessa seção, abordaremos as equações que não são identidades, ou seja, nos dedicaremos às equações que só são válidas para alguns valores reais (ou mesmo para nenhum valor), como os exemplos (c) e (d). Em equações desse tipo, o termo cujo valor é desconhecido é chamado **incógnita**, ou simplesmente **variável**. Nos exemplos (c) e (d), a incógnita é representada pela letra x.

Quando escrevemos equações com incógnitas, nosso objetivo é **resolver** a equação, o que significa que queremos encontrar os valores da variável que fazem com que a equação seja válida. Tais valores são chamados **raízes** ou **soluções** da equação.

Uma solução da equação do item (c) é $x = 4$. De fato, essa é a única solução do problema, já que 4 é único valor de x para o qual a equação é válida.

Por sua vez, a equação do item (d) possui duas soluções, $x = -5$ e $x = 3$. Para comprovar, por exemplo, que -5 é uma raiz de $x^2 + 2x - 15 = 0$, devemos substituir esse valor na equação:

$x^2 + 2x - 15 = 0$	Equação original.
$(-5)^2 + 2 \cdot (-5) - 15 = 0$	Substituição de x por -5 na equação.
$25 - 10 - 15 = 0$	Cálculo da expressão.
$0 = 0$	Ok! A equação foi satisfeita.

■ Solução de equações

Duas equações que possuem exatamente as mesmas soluções são chamadas **equivalentes**. Assim, as equações

$$4x + 6 = 26 \qquad \text{e} \qquad 3x - 4 = 11$$

são equivalentes, pois $x = 5$ é a única solução de ambas.

A forma mais comumente usada para resolver uma equação consiste em escrever uma sequência de equações equivalentes até que a variável fique **isolada**, ou seja, apareça sozinha em um dos lados da igualdade. No caso do exemplo (c) apresentado acima, podemos escrever as seguintes equações equivalentes:

$$3x - 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad 3x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

A obtenção de equações equivalentes, como nesse exemplo, é feita com base em certas propriedades, as quais apresentamos a seguir.

Propriedades das equações

Sejam dadas as expressões A, B e C.

	Propriedade	Exemplo
1.	Se $A = B$, então $A + C = B + C$	Se $x - 2 = 5$, então $x - 2 + 2 = 5 + 2$
2.	Se $A = B$ e $C \neq 0$, então $CA = CB$	Se $3x = 12$, então $\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 12$.
3.	Se $A = B$, então $B = A$	Se $21 = 7x$, então $7x = 21$.

O item 3 decorre diretamente da definição de igualdade, não constituindo, de fato, uma propriedade das equações. Esse item foi incluído na tabela por ser usado na resolução de problemas.

Vimos no Capítulo 1 que a subtração $A - C$ é equivalente à soma $A + (-C)$. Sendo assim, a Propriedade 1 implica que

$$\text{Se } A = B, \text{ então } A - C = B - C.$$

De forma análoga, dividir uma expressão por C corresponde a multiplicá-la por $\frac{1}{C}$. Logo, a Propriedade 2 também implica que

$$\text{Se } A = B \text{ e } C \neq 0, \text{ então } \frac{A}{C} = \frac{B}{C}.$$

Observe que, no exemplo da Propriedade 2 da tabela, poderíamos ter escrito simplesmente $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$.

Exemplo 1. Resolução de uma equação

Vamos resolver a equação

$$12x - 26 = 34.$$

aplicando as propriedades apresentadas acima até conseguirmos isolar a variável x.

Naturalmente, não há uma forma única de se obter uma equação equivalente a outra. Assim, devemos usar uma certa dose de bom senso para que a aplicação das propriedades gere, a cada passo, uma equação mais simples que a anterior.

Como ficará claro no Problema 2 abaixo, para esse tipo de equação, é conveniente transferir para o mesmo lado todos os termos que envolvem x, e mover para o outro lado todos os termos que não contêm essa variável.

a) Vamos começar eliminando o termo (-26) que aparece do lado esquerdo da equação. Para tanto, aplicaremos a Propriedade 1, somando 26 aos dois lados da igualdade:

$$12x - 26 + 26 = 34 + 26$$
$$12x = 60$$

b) Agora que obtivemos uma equação mais simples, vamos aplicar a Propriedade 2, multiplicando os dois lados da igualdade por $\frac{1}{12}$ para isolar x.

$$\frac{1}{12} \cdot 12x = \frac{1}{12} \cdot 60$$
$$\frac{12}{12}x = \frac{60}{12}$$
$$x = 5$$

Aí está. Aplicando as propriedades com uma escolha conveniente de valores, chegamos à solução $x = 5$.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de resolução de equações com o auxílio das propriedades enunciadas acima. Acompanhando com atenção esses exemplos é possível ter uma boa ideia de como resolver equações lineares, assunto ao qual voltaremos na Seção 2.4.

Problema 2. Equações

Resolva as equações

a) $3 - 7x = 21$

b) $42 = 9x + 36$

c) $8x - 25 = 5 + 2x$

d) $3(x + 2) = 5x - 12$

e) $\frac{x}{4} + 11 = \frac{3x}{2} + 15$

f) $\frac{4x - 2}{3} + \frac{2x - 3}{4} = \frac{5 - x}{6} - 2$

Solução.

a)

$3 - 7x = 21$	Equação original.
$3 - 3 - 7x = 21 - 3$	Propriedade 1.
$-7x = 18$	Termo com x = termo sem x.
$\frac{-7x}{-7} = \frac{18}{-7}$	Propriedade 2.
$x = -\frac{18}{7}$	Solução da equação.

b)

$$\begin{aligned}
42 &= 9x + 36 && \text{Equação original.}\\
42 - 36 &= 9x + 36 - 36 && \text{Propriedade 1.}\\
6 &= 9x && \text{Termo sem } x = \text{termo com } x.\\
\frac{6}{9} &= \frac{9x}{9} && \text{Propriedade 2.}\\
\frac{2}{3} &= x && \text{Equação simplificada.}\\
x &= \frac{2}{3} && \text{Propriedade 3.}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
8x - 25 &= 5 + 2x && \text{Equação original.}\\
8x - 2x - 25 &= 5 + 2x - 2x && \text{Propriedade 1.}\\
6x - 25 &= 5 && \text{Variável } x \text{ só do lado esquerdo.}\\
6x - 25 + 25 &= 5 + 25 && \text{Propriedade 1.}\\
6x &= 30 && \text{Termo com } x = \text{termo sem } x.\\
\frac{6x}{6} &= \frac{30}{6} && \text{Propriedade 2.}\\
x &= 5 && \text{Solução da equação.}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
3(x + 2) &= 5x - 12 && \text{Equação original.}\\
3x + 6 &= 5x - 12 && \text{Propriedade distributiva.}\\
3x - 3x + 6 &= 5x - 3x - 12 && \text{Propriedade 1.}\\
6 &= 2x - 12 && \text{Variável } x \text{ só do lado direito.}\\
6 + 12 &= 2x - 12 + 12 && \text{Propriedade 1.}\\
18 &= 2x && \text{Termo sem } x = \text{termo com } x.\\
\frac{18}{2} &= \frac{2x}{2} && \text{Propriedade 2.}\\
9 &= x && \text{Equação simplificada.}\\
x &= 9 && \text{Propriedade 3.}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4}+11 &= \frac{3x}{2}+15 && \text{Equação original.}\\
\frac{x}{4}-\frac{3x}{2}+11 &= \frac{3x}{2}-\frac{3x}{2}+15 && \text{Propriedade 1.}\\
\frac{x}{4}-\frac{3x}{2}+11 &= 15 && \text{Variável } x \text{ só do lado esquerdo.}\\
\frac{x-6x}{4}+11 &= 15 && \text{Subtração de frações.}\\
-\frac{5x}{4}+11 &= 15 && \text{Equação simplificada.}\\
-\frac{5x}{4}+11-11 &= 15-11 && \text{Propriedade 1.}\\
-\frac{5x}{4} &= 4 && \text{Termo com } x = \text{termo sem } x.\\
\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5x}{4}\right) &= \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 4 && \text{Propriedade 2.}\\
x &= -\frac{16}{5} && \text{Solução da equação.}
\end{aligned}$$

As estratégias usadas para resolver essas equações não são as únicas possíveis. Assim o leitor não deve se preocupar se seguir outros caminhos, desde que aplique corretamente as propriedades apresentadas.

f)

$$\begin{aligned}
\frac{4x-2}{3}+\frac{2x-3}{4} &= \frac{5-x}{6}-2 && \text{Equação original.}\\
12\cdot\frac{4x-2}{3}+12\cdot\frac{2x-3}{4} &= 12\cdot\frac{5-x}{6}-12\cdot 2 && \text{Propriedade 2, usando o mmc dos denominadores.}\\
4(4x-2)+3(2x-3) &= 2(5-x)-24 && \text{Equação simplificada.}\\
16x-8+6x-9 &= 10-2x-24 && \text{Propriedade distributiva.}\\
22x-17 &= -14-2x && \text{Equação simplificada.}\\
22x+2x-17 &= -14-2x+2x && \text{Propriedade 1.}\\
24x-17 &= -14 && \text{Variável } x \text{ só do lado esquerdo.}\\
24x-17+17 &= -14+17 && \text{Propriedade 1.}\\
24x &= 3 && \text{Termo com } x = \text{termo sem } x.\\
\frac{24x}{24} &= \frac{3}{24} && \text{Propriedade 2.}\\
x &= \frac{1}{8} && \text{Solução da equação.}
\end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 7.

Ao terminar de resolver uma equação, é conveniente conferir se o valor encontrado é realmente uma solução, ou seja, se não ocorreu um erro de conta. Para o problema (d) acima, por exemplo, calculamos

$$3(x+2)=5x-12 \quad\Rightarrow\quad 3(9+2)=5\cdot 9-12 \quad\Rightarrow\quad 33=33 \quad \text{Verdadeiro!}$$

Apesar de não adotarmos essa prática no livro, por economia de espaço, recomendamos enfaticamente que o leitor confira sempre os resultados que obtém.

Formas abreviadas de aplicação das propriedades das equações

Frequentemente, os professores do ensino fundamental e médio apresentam de forma simplificada as propriedades acima, com o objetivo de facilitar o trabalho do aluno. Apesar de tais simplificações serem bem-vindas, é preciso aplicá-las com cuidado, tendo sempre em mente a que propriedade se referem, para evitar erros na resolução de equações. Revisemos, então, essas formas abreviadas de obtenção de equações equivalentes.

1. Passagem de um termo que está sendo somado.

   Quando é preciso eliminar um termo que aparece somado ou subtraído de um dos lados de uma equação, é comum "passar o termo para o outro lado, com o sinal trocado", como no exemplo abaixo.

$$\begin{aligned} 3x + 20 &= 65 \\ 3x &= 65 - 20 \\ 3x &= 45 \end{aligned}$$

   Essa regra corresponde à primeira propriedade, segundo a qual podemos somar ou subtrair o mesmo valor dos dois lados da equação:

$$\begin{aligned} 3x + 20 &= 65 \\ 3x + 20 - 20 &= 65 - 20 \\ 3x &= 45 \end{aligned}$$

   Nesse caso, os cuidados a serem tomados incluem, por exemplo, não passar um termo envolvido em um produto, como nos exemplos abaixo.

Errado

$$\begin{aligned} 5x &= 15 \\ x &= 15 - 5 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Certo

$$\begin{aligned} 5x &= 15 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{15}{5} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Errado

$$\begin{aligned} 2(x - 4) &= 6 \\ 2x &= 6 + 4 \\ 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2} \end{aligned}$$

Certo

$$\begin{aligned} 2(x - 4) &= 6 \\ 2x - 8 &= 6 \\ 2x &= 6 + 8 \\ x &= \frac{14}{2} \end{aligned}$$

2. Passagem de um termo que está sendo multiplicado.

   Quando é preciso eliminar um termo que aparece em um produto, costuma-se "passar o termo para o outro lado, no denominador". Da mesma forma, quando

se quer eliminar um termo do denominador, é costume "passá-lo para o outro lado, no numerador". Veja os exemplos.

$$\begin{aligned} 8x &= 32 \\ x &= 32/8 \\ x &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x/10 &= 9 \\ x &= 9 \cdot 10 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

Essas regras correspondem à segunda propriedade, segundo a qual podemos multiplicar ou dividir os dois lados da equação pelo mesmo valor:

$$\begin{aligned} 8x &= 32 \\ \frac{8x}{8} &= \frac{32}{8} \\ x &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{x}{10} &= 9 \\ 10 \cdot \frac{x}{10} &= 10 \cdot 9 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

Um dos erros mais comuns na aplicação dessa regra é a passagem de um termo que está multiplicando apenas uma parte da expressão:

Errado

$$\begin{aligned} 2x + 14 &= 36 \\ x + 14 &= 36/2 \\ x + 14 &= 18 \\ x &= 18 - 14 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Certo

$$\begin{aligned} 2x + 14 &= 36 \\ 2x + 14 - 14 &= 36 - 14 \\ 2x &= 22 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{22}{2} \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Outro erro frequente é a passagem de um termo com o sinal trocado:

Errado

$$\begin{aligned} 7x &= -42 \\ x &= -42/(-7) \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Certo

$$\begin{aligned} 7x &= -42 \\ \frac{7x}{7} &= \frac{-42}{7} \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Exercícios 2.1

1. Verifique se $\frac{3}{5}$ é uma raiz da equação $\frac{5x}{2} + \frac{5x}{6} = 2$.

2. Verifique se 5 é uma solução de $4x - 11 = 2(x - 3) + 5$.

3. Verifique se 4 é uma solução de $3(x - 2) + 5(2x - 1) = 7(3 - x)$.

4. Verifique se 3 e 2 são soluções da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$.

5. Verifique se -4 e $\frac{2}{3}$ são raízes da equação $3x^2 + 10x - 8 = 0$.

6. Resolva as equações.

a) $x - 35 = 155$

b) $y + 22 = 42$

c) $y + 42 = 22$

d) $2x - 3 = 25$

e) $-3x + 2 = -7$

f) $\frac{3x}{5} = -\frac{4}{9}$
g) $x - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$
h) $\frac{a}{2} - 5 = 2$
i) $\frac{a-5}{2} = 2$
j) $3(x-4) + 8 = 5$
k) $11 = 36 - 5(1-x)$
l) $-23 = 7 - 6(x-10)$

7. Resolva as equações.

a) $x + 12 = 2x - 5$
b) $3y + 4 = -9y + 14$
c) $2(x-3) = 4(2x+1)$
d) $x - x/6 = -3$
e) $3{,}5x + 2 = 2{,}9x - 1$
f) $2(x-5) + 5x = 2 + 3(4-3x)$
g) $3 - 3(x-2) = 2x - (x-4)$
h) $5(z+1) - 2(3z+1) = 4(5-z)$
i) $2(y-4) = 2 - 3(y-5) + 10(1-3y)$
j) $\frac{4a-2}{3} = \frac{5(a+3)}{2}$
k) $\frac{3x}{2} + 2 = 3x - 2$
l) $\frac{8x}{3} - 5 = \frac{5x}{2} - 7$
m) $\frac{2x-3}{4} + \frac{x-1}{2} = \frac{5-x}{2}$
n) $\frac{x+2}{3} - \frac{4-5x}{2} = \frac{3x-5}{4} + \frac{1}{3}$
o) $\frac{4x-5}{3} - \frac{7-3x}{2} = \frac{5-x}{6} + 3$

8. Transforme os problemas em equações e os resolva.

a) Qual é o número que, somado a $\frac{3}{4}$, resulta em $\frac{1}{2}$?
b) Por quanto devemos multiplicar $\frac{2}{3}$ para obter $\frac{5}{4}$?
c) Dividindo um número por 2 e somando o resultado a 5, obtemos 8. Que número é esse?
d) Somando o dobro de um número ao seu triplo, obtemos 125. Que número é esse?
e) Qual é o número que, somado à sua quarta parte, fornece 15?
f) Somando a metade de um número à terça parte desse mesmo número, obtemos 30. Qual é esse número?

Respostas dos Exercícios 2.1

1. Sim
2. Sim
3. Não
4. O número 3 é solução. Já 2 não é solução.
5. Os dois valores são solução.

6. a) $x = 190$ b) $y = 20$ c) $y = -20$ d) $x = 14$ e) $x = 3$ f) $x = -\frac{20}{27}$ g) $x = \frac{5}{6}$ h) $a = 14$ i) $a = 9$ j) $x = 3$ k) $x = -4$ l) $x = 15$

7. a) $x = 17$ b) $y = \frac{5}{6}$ c) $x = -\frac{5}{3}$ d) $x = -\frac{18}{5}$ e) $x = -5$ f) $x = \frac{3}{2}$ g) $x = \frac{5}{4}$ h) $z = \frac{17}{3}$ i) $y = 1$ j) $a = -7$ k) $x = \frac{8}{3}$ l) $x = -12$ m) $x = \frac{5}{2}$ n) $x = \frac{1}{5}$ o) $x = 3$

8. a) $x + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad x = -\frac{1}{4}$
b) $\frac{2}{3}x = \frac{5}{4}$ $\quad x = \frac{15}{8}$
c) $\frac{x}{2} + 5 = 8$ $\quad x = 6$
d) $2x + 3x = 125$ $\quad x = 25$
e) $x + \frac{x}{4} = 15$ $\quad x = 12$
f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 30$ $\quad x = 36$

2.2 Proporções e a regra de três

Pretendendo comprar 2 kg de contrafilé, Lídice entrou no açougue Boi Bom e descobriu que o um quilo da peça custava R$ 13,50. Nesse caso, quanto Lídice pagou pelos 2 kg?

A resposta para essa pergunta é simples: se um quilo custava R$ 13,50, então os 2 kg custaram o dobro, isto é, $2 \times 13{,}50 =$ R$ 27,00. Efetuamos cálculos desse tipo tão corriqueiramente que nem nos damos conta de que eles envolvem um conceito matemático muito importante e útil: a **proporcionalidade**.

Tabela 2.1: Preço do contrafilé.

Peso (kg)	Preço (R$)
1	13,50
2	27,00
3	40,50
4	54,00
5	67,50

Observando a Tabela 2.1, é possível perceber que a razão entre o preço e o peso do contrafilé é constante, ou seja,

$$\frac{\text{R\$ } 13{,}50}{1 \text{ kg}} = \frac{\text{R\$ } 27{,}00}{2 \text{ kg}} = \frac{\text{R\$ } 40{,}50}{3 \text{ kg}} = \frac{\text{R\$ } 54{,}00}{4 \text{ kg}} = \frac{\text{R\$ } 67{,}50}{5 \text{ kg}}.$$

Quando duas razões, escritas de forma diferente, são iguais, ou seja, correspondem ao mesmo número real, dizemos que são **proporcionais**. Assim, as razões $\frac{27}{2}$ e $\frac{67{,}5}{5}$ são proporcionais.

Proporção

Definimos **proporção** como a igualdade entre duas razões. Em notação matemática, essa igualdade é representada pela equação

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Nesse caso, dizemos que *a está para b, assim como a′ está para b′*. A razão constante $k = \frac{a}{b}$ é chamada **Constante de proporcionalidade**.

Note que, seguindo estritamente a nomenclatura sugerida na Seção 1.6, deveríamos dizer que, nesse exemplo, a constante de proporcionalidade é uma *taxa*, e não uma *razão*.

No exemplo do açougue, podemos dizer, por exemplo, que *R$ 27,00 estão para 2 kg, assim como R$ 67,50 estão para 5 kg de contrafilé.* A constante de proporcionalidade, nesse caso, corresponde ao custo por quilo de file, ou seja, k = R$ 13,5/kg.

■ Grandezas diretamente proporcionais

Analisando o o valor que o açougue Boi Bom cobra pelo contrafilé, constatamos que

a) ao aumentamos o peso, o preço também aumenta;

b) a razão $\frac{\text{preço}}{\text{peso}}$ é constante e igual a 13,5.

Nesse caso, dizemos que o preço cobrado pelo contrafilé é diretamente proporcional ao peso vendido. O quadro abaixo generaliza essa ideia.

Grandezas diretamente proporcionais

Dizemos que duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando

a) ao aumentarmos uma, a outra também aumenta;

b) a razão entre as duas é constante, ou seja, dadas as medidas $a, a', a'', a''', \ldots$ da primeira grandeza e as medidas $b,b',b'',b''', \ldots$ da segunda grandeza, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \cdots$$

Vejamos outros exemplos de grandezas diretamente proporcionais.

Exemplo 1. Viagem a uma velocidade constante

Se um carro viaja à velocidade constante de 90 km/h, então a distância que ele percorre é diretamente proporcional ao tempo gasto, como mostrado na Tabela 2.2.

Observe que

a) a distância aumenta à medida que o tempo de viagem aumenta;

b) a razão $\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$ é constante, isto é,

$$\frac{90 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{135 \text{ km}}{1{,}5 \text{ h}} = \frac{180 \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{225 \text{ km}}{2{,}5 \text{ h}} = \frac{270 \text{ km}}{3 \text{ h}}.$$

Nesse caso, a constante de proporcionalidade é a própria velocidade do carro, ou seja, k = 90 km/h.

Tabela 2.2: Tempo e distância em uma viagem a 90 km/h.

Tempo (kg)	Distância (km)
1,0	90
1,5	135
2,0	180
2,5	225
3,0	270

Exemplo 2. Densidade do óleo de soja

A Tabela 2.3 fornece a massa aproximada (em quilogramas) de diversos volumes de óleo de soja (em litros), à temperatura de 25°C.

O termo "massa" corresponde ao que, no dia a dia, chamamos (erroneamente) de "peso".

Tabela 2.3: Volume e massa do óleo de soja.

Volume (ℓ)	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Massa (kg)	0,184	0,328	0,552	0,736	0,920

Calculando a razão $\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$ para cada um dos volumes apresentados na tabela, obtemos

$$\frac{0{,}184 \text{ kg}}{0{,}2\ \ell} = \frac{0{,}328 \text{ kg}}{0{,}4\ \ell} = \frac{0{,}552 \text{ kg}}{0{,}6\ \ell} = \frac{0{,}736 \text{ kg}}{0{,}8\ \ell} = \frac{0{,}920 \text{ kg}}{1{,}0\ \ell} = 0{,}920 \text{ kg}/\ell.$$

Como essa razão é constante e o peso aumenta com o volume, podemos dizer que as duas grandezas são diretamente proporcionais. De fato, a razão entre massa e volume é tão usada em diversas áreas da ciência, que damos a ela o nome especial de **densidade**. Assim, a densidade do óleo de soja é igual a 0,920 kg/ℓ.

■ Grandezas inversamente proporcionais

Em vários problemas práticos, apesar de haver relação entre duas grandezas, o aumento de uma provoca a redução da outra. Nesse caso, dizemos que as grandezas são **inversamente proporcionais**, como ocorre no exemplo abaixo.

Exemplo 3. Construção de uma cerca

O tempo gasto para cercar o pasto da fazenda de Geraldo depende do número de pessoas envolvidas na construção da cerca. A Tabela 2.4 fornece a relação entre o número de trabalhadores e o tempo gasto, segundo o levantamento feito por Geraldo.

Tabela 2.4: Tempo de construção em relação ao número de trabalhadores.

Trabalhadores	1	2	3	4	6
Tempo (dias)	36	18	12	9	6

Nesse caso, constatamos que

a) o tempo necessário à construção da cerca diminui à medida que o número de trabalhadores aumenta;

b) dividindo o tempo gasto pelo inverso do número de trabalhadores, obtemos um valor constante:

$$\frac{36}{\frac{1}{1}} = \frac{18}{\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{1}{4}} = \frac{6}{\frac{1}{6}} = 36.$$

O quadro abaixo resume a ideia.

Grandezas inversamente proporcionais

Dizemos que duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando

a) ao aumentarmos uma, a outra diminui;

b) a razão entre uma e o inverso da outra é constante, ou seja, dadas as medidas $a, a', a'', a''', \ldots$ da primeira grandeza e as medidas $b, b', b'', b''', \ldots$ da segunda grandeza, temos

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{a'}{\frac{1}{b'}} = \frac{a''}{\frac{1}{b''}} = \frac{a'''}{\frac{1}{b'''}} = \cdots.$$

A condição (b) pode ser reescrita de forma bem mais simples como

$$a \cdot b = a' \cdot b' = a'' \cdot b'' = a''' \cdot b'''.$$

Lembre-se de que, conforme vimos na Seção 1.3,

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = a \cdot \frac{b}{1} = a \cdot b.$$

Aplicando o último comentário do quadro acima ao exemplo da cerca de Geraldo, podemos dizer que o produto entre o tempo e o número de trabalhadores é constante, ou seja,

$$36 \cdot 1 = 18 \cdot 2 = 12 \cdot 3 = 9 \cdot 4 = 6 \cdot 6 = 36.$$

Para grandezas inversamente proporcionais, a constante de proporcionalidade é dada por $k = \frac{a}{\frac{1}{b}} = a \cdot b$. Logo, no caso de Geraldo, temos $k = 36$ dias $\cdot$ pessoa.

Exemplo 4. Lei de Boyle

Vários balões de volumes diferentes foram preenchidos com a mesma massa de um certo gás, mantido à temperatura constante. A Tabela 2.5 fornece a relação entre a pressão e o volume do gás.

Tabela 2.5: Volume e pressão de um gás, a uma temperatura constante.

Volume (ℓ)	2	3	4	5
Pressão (atm)	3,0	2,0	1,5	1,2

Nesse exemplo, está claro que

a) a pressão diminui à medida que o volume aumenta;

b) o produto do volume pela pressão é constante:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 4 \cdot 1{,}5 = 5 \cdot 1{,}2 = 6.$$

Logo, a uma temperatura constante, a pressão do gás é inversamente proporcional ao volume que ele ocupa. Essa propriedade dos gases é conhecida como *Lei de Boyle*, em homenagem ao cientista inglês Robert Boyle, que a observou no século 17.

Para a massa de gás desse exemplo, a constante de proporcionalidade é $k = 6$ atm$\cdot\ell$.

■ Regra de três para grandezas diretamente proporcionais

Em muitas situações práticas, sabemos que há proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, mas uma dessas grandezas é desconhecida. Nesse caso, para resolver o problema, recorremos a um método denominado **regra de três**.

Para ilustrar o emprego da regra de três, vamos retomar a ideia do Exemplo 1 e considerar um problema no qual um trem viaja a uma velocidade constante.

Problema 5. Tempo de viagem

Suponha que um trem, viajando a uma velocidade constante, percorra 300 km em 4 horas. Quanto tempo ele gastará em uma viagem de 720 km?

Solução.

O valor a ser determinado é o tempo a ser gasto em uma viagem de 720 km. A esse valor desconhecido, associamos a variável x. Além disso, analisando o enunciado, descobrimos que

a) a velocidade do trem é constante, ou seja, o tempo gasto é diretamente proporcional à distância percorrida.

b) Gasta-se 4 horas para percorrer 300 km.

Tabela 2.6: Distância × tempo

Distância (km)	Tempo (h)
↓ 300	4 ↓
720	x

Com base nesses dados, podemos montar a Tabela 2.6, que relaciona as informações fornecidas à incógnita do problema.

As setas ao lado da tabela indicam a direção na qual os valores crescem. As duas setas apontam na mesma direção (para baixo), corroborando a tese de que as grandezas (distância e tempo) são diretamente proporcionais. Assim, podemos escrever

$$\frac{300 \text{ km}}{4 \text{ h}} = \frac{720 \text{ km}}{x \text{ h}}.$$

Nesse exemplo, a constante de proporcionalidade é $300/4$, ou $720/x$, supondo que $x \neq 0$.

Para simplificar essa equação, vamos começar eliminando o termo x do denominador. Para tanto, multiplicamos os dois lados por x, obtendo

$$x \cdot \frac{300}{4} = \frac{720}{x} \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{300x}{4} = 720.$$

Em seguida, eliminamos o denominador do lado esquerdo multiplicando os dois lados da equação por 4:

$$4 \cdot \frac{300x}{4} = 720 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad 300x = 2280.$$

Finalmente, para isolar x, dividimos toda a equação por 300:

$$\frac{300x}{300} = \frac{2280}{300} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2280}{300}.$$

Logo, $x = 9{,}6$ h, de modo que a viagem de 720 km durará $9\,\text{h} + 0{,}6 \cdot 60\,\text{min}$, ou $9\,\text{h}\,36\,\text{min}$.

Note que os dois primeiros passos da resolução do problema acima correspondem à multiplicação dos dois lados da equação pelos denominadores x e 4. Como esse procedimento é usado em todo problema que envolve regra de três, vale a pena investigá-lo de forma pormenorizada.

Vamos supor, então, que queiramos eliminar os denominadores de uma equação na forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

em que a, b, c e d são números reais, um dos quais a íncógnita do problema. Nesse caso, se multiplicarmos os dois lados da equação por bd, obtemos

$$bd \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot bd \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{b} \cdot da = \frac{d}{d} \cdot cb,$$

o que nos leva à equação equivalente

$$ad = cb.$$

Essa equação pode ser obtida diretamente multiplicando-se o numerador de cada fração pelo denominador da outra, e igualando-se os resultados. Essa técnica, conhecida como *produto cruzado*, é ilustrada abaixo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad = cb.$$

O produto cruzado é um processo prático de simplificação de equações nas quais cada lado da igualdade é escrito como uma única fração. Doravante, usaremos essa estratégia para resolver problemas que envolvem a regra de três.

Problema 6. Alimentação de peixes

João possui vários tanques de criação de peixes. O tanque de tilápias adultas, por exemplo, tinha, no mês passado, 250 peixes, que consumiam 70 kg de ração por dia. Sabendo que, nesse mês, o mesmo tanque tem 350 peixes, determine o consumo diário atual de ração para tilápias.

Solução.

A incógnita desse problema, x, corresponde à quantidade de ração (em kg) gasta por dia para alimentar as tilápias adultas.

Supondo que as tilápias tenham peso parecido e, portanto, consumam quantidades semelhantes de ração, podemos considerar que a quantidade de ração gasta é diretamente proporcional ao número de peixes no tanque. Os dados do problema estão resumidos na Tabela 2.7. Com base nos dados da tabela, montamos a equação

Tabela 2.7: Peixes × ração

Número de peixes	Ração (kg)
250	70
350	x

$$\frac{250 \text{ peixes}}{70 \text{ kg}} = \frac{350 \text{ peixes}}{x \text{ kg}}.$$

Aplicando, agora, o produto cruzado, obtemos

$$250x = 350 \cdot 70 \quad \Rightarrow \quad 250x = 24500,$$

donde

$$x = \frac{24500}{250} = 98.$$

Logo, o consumo de ração de tilápias subiu para 98 kg por dia.

Problema 7. Compra de fio por metro

Uma loja de material elétrico vende fios por metro. Em uma visita recente à loja, Manoel pagou R$ 62,00 por 40 m de fio com 4 mm de diâmetro. Agora, ele precisa de mais 18 m do mesmo fio para efetuar outra instalação. Quanto Manoel irá desembolsar dessa vez?

Solução.

Nesse problema, x representa o preço de 18 m de fio. A Tabela 2.8 reúne as informações disponíveis. Da tabela, concluímos que

Tabela 2.8: Comprim. × preço

Comprimento (m)	Preço (R$)
40	62
18	x

$$\frac{62 \text{ reais}}{40 \text{ m}} = \frac{x \text{ reais}}{18 \text{ m}}.$$

O produto cruzado fornece

$$62 \cdot 18 = 40x.$$

Desse modo, 18 m de fio saem por

$$x = \frac{62 \cdot 18}{40} = \text{R\$ } 27{,}90.$$

Se analisarmos o problema acima tomando especial cuidado com as unidades, veremos que

$$x = \frac{\text{R\$ } 62 \cdot 18 \text{ m}}{40 \text{ m}}.$$

Essa equação também pode ser escrita na forma

$$x = \underbrace{\frac{\text{R\$ } 62}{40 \text{ m}}}_{\substack{\text{custo}\\ \text{por metro}}} \cdot \underbrace{18 \text{ m.}}_{\substack{\text{comprimento}\\ \text{do fio}}}$$

Logo, o custo de 18 metros de fio pode ser obtido em duas etapas:

a) Calculamos o custo por metro de fio:

$$\frac{\text{R\$ } 62}{40 \text{ m}} = \text{R\$ } 1{,}55/\text{m}.$$

Note que, nesse caso, também operamos com as unidades, ou seja, fazemos

$$\frac{\text{R\$}}{\text{m}} \cdot \text{m} = \text{R\$}.$$

b) Calculamos o custo de 18 metros de fio:

$$\text{R\$ } 1{,}55/\text{m} \cdot 18\text{m} = \text{R\$ } 27{,}90.$$

Esse procedimento pode ser aplicado a qualquer problema envolvendo a regra de três, como mostrado no exemplo abaixo.

Problema 8. Pagamento parcial de uma conta

Passei a receber o sinal de TV a cabo em minha casa no dia 19 do mês passado. Se a empresa que fornece o sinal cobra R$ 80,00 de mensalidade, começando a contagem no dia 1 de cada mês, qual deve ser o valor do meu primeiro pagamento?

Solução.

Vamos supor, como é comum em situações que envolvem pagamento mensal, que um mês tenha 30 dias. Nesse caso, x é o valor a ser pago por 12 dias serviço.

Note que o período que vai do dia 19 ao dia 30 de um mês compreende $30 - 18 = 12$ dias.

Para resolver esse problema, usaremos o método apresentado acima, que consiste nos seguintes passos:

1. Cálculo dos custo por dia: Se o sinal da TV custa R$ 80,00 por mês, então o custo diário é igual a

$$\frac{\text{R\$ } 80}{30 \text{ dias}} \approx \text{R\$ } 2{,}667/\text{dia}.$$

2. Cálculo do custo por 12 dias:

$$x = \text{R\$ } 2{,}667/\text{dia} \cdot 12 \text{ dias} \approx \text{R\$ } 32{,}00.$$

Mais uma vez, operamos com as unidades, fazendo

$$\frac{\text{R\$}}{\text{dia}} \cdot \text{dia} = \text{R\$}.$$

Agora, tente resolver esse problema usando a regra de três tradicional, para comprovar que o resultado é o mesmo.

Problema 9. Embalagens de bombons

Em um supermercado, os bombons *Leukas* são vendidos em duas embalagens: um pacote com 5 e uma caixa com 12 unidades. A embalagem de 5 unidades custa R$ 12,50, enquanto a de 12 unidades é vendida por R$ 28,80. Em qual das embalagens o custo por bombom é menor?

Solução.

Cada unidade do pacote com 5 bombons custa $\frac{12{,}50}{5}$ = R$ 2,50. Por outro lado, um bombom da caixa com 12 unidades sai por $\frac{28{,}80}{12}$ = R$ 2,40. Logo, a caixa é mais econômica.

Pode-se descobrir qual embalagem é a mais econômica comparando o custo por unidade, como foi feito em um problema semelhante, apresentado na Seção 1.6, que trata de razões e taxas.

Entretanto, vamos adotar uma estratégia alternativa para analisar o problema, recorrendo à regra de três. Assim, partindo do preço do pacote com 5 bombons, vamos calcular quanto a caixa com 12 unidades custaria se o preço fosse diretamente proporcional ao número de bombons.

Usando a regra de três tradicional

Tabela 2.9: Bombons × custo

Bombons (unidades)	Custo (R$)
↓ 5	12,50 ↓
12	x

A Tabela 2.9 contém os dados relevantes à nossa análise, supondo que x seja o custo de 12 unidades.

Aplicando a regra de três, obtemos

$$\frac{5}{12{,}5} = \frac{12}{x} \quad \Rightarrow \quad 5x = 12{,}5 \cdot 12.$$

Logo, se o custo por bombom fosse o mesmo do pacote com 5 unidades, a caixa com 12 bombons deveria custar

$$x = \frac{12{,}5 \cdot 12}{5} = \text{R\\$ } 30{,}00.$$

Como custa apenas R$ 28,80, a caixa é mais econômica do que o pacote com 5 unidades.

Usando a regra de três com o cálculo do custo unitário

Agora, vamos seguir o roteiro adotado no Problema 8 e recalcular a solução a partir do custo de cada bombom. De fato, através dessa estratégia é fácil resolver até mesmo mentalmente o problema, bastando calcular

Dica
Para dividir mentalmente um número por 5, você pode multiplicá-lo por 2 e dividir o resultado por 10. Assim,

$$\frac{12{,}5}{5} = 12{,}5 \cdot \frac{2}{10} = \frac{25}{10} = 2{,}5.$$

a) o custo de cada bombom da embalagem de 5 unidades:

$$\frac{\text{R\\$ } 12{,}50}{5} = \text{R\\$ } 2{,}50;$$

b) o custo de 12 bombons:

$$\text{R\\$ } 2{,}50 \cdot 12 = \text{R\\$ } 30{,}00.$$

Como $30 > 28{,}8$, a embalagem com 12 bombons é proporcionalmente mais barata do que a com 5 unidades.

■ Regra de três para grandezas inversamente proporcionais

A regra de três também pode ser aplicada a problemas nos quais as grandezas são inversamente proporcionais. Nesse caso, contudo, é preciso levar em conta que a

constante de proporcionalidade é definida por um produto, e não por uma razão, como veremos nos exemplos a seguir.

Problema 10. Administração da produção

Para atender as encomendas de natal que recebeu, uma indústria com 48 operários gastaria 42 dias. Entretanto, o prazo de entrega das encomendas se encerra em 28 dias. Se a empresa puder contratar trabalhadores avulsos, quantos devem ser chamados para que seja possível terminar essa empreitada dentro do prazo?

Solução.

Tabela 2.10: Trab. × tempo

Empregados	Tempo (d)
↑ 48	42 ↓
x	28

O tempo gasto para atender as encomendas da indústria é inversamente proporcional ao número de operários, o que significa que, quanto maior for o número de trabalhadores, menor será o tempo gasto na produção.

Na Tabela 2.10, essa relação inversa é indicada pelas setas que apontam em direções opostas. A variável x representa o número total de operários que participarão da produção, incluindo os trabalhadores avulsos.

Observe que, para determinar o número de trabalhadores avulsos que a empresa deve contratar, vamos supor que a produtividade dos novos trabalhadores seja igual à dos funcionários atuais da empresa.

Como as grandezas são inversamente proporcionais, o número de trabalhadores é proporcional ao inverso do tempo gasto na produção, de modo que a equação associada ao problema é

$$\frac{48}{\frac{1}{42}} = \frac{x}{\frac{1}{28}}.$$

Como vimos anteriormente, essa equação também pode ser escrita na forma de produto como

$$48 \cdot 42 = 28x,$$

donde

$$x = \frac{2016}{28} = 72.$$

Assim, a empresa deve contratar $72 - 48 = 24$ trabalhadores temporários.

Lembre-se de que, quando as grandezas são inversamente proporcionais, a constante de proporcionalidade k é dada pelo produto. Assim, nesse exemplo, temos

$$k = 48 \text{ empregados} \cdot 42 \text{ dias}.$$

Problema 11. Assentamento de azulejos

Uma equipe de dois pedreiros assenta todos os azulejos de uma cozinha em 7 horas e meia. Se a equipe contasse com cinco pessoas, quanto tempo seria gasto para assentar o mesmo número de azulejos?

Solução.

Para resolver esse problema, vamos supor que todos os pedreiros sejam igualmente eficientes no assentamento de azulejos. Nesse caso, chamando de x o tempo gasto pela equipe de cinco pessoas, podemos montar a Tabela 2.11.

Tabela 2.11: Pedreiros × tempo

Pedreiros	Tempo (h)
↓ 2	7,5 ↑
5	x

Observando que o número de pedreiros é inversamente proporcional ao tempo gasto, vamos escrever a regra de três usando o produto:

$$2 \cdot 7{,}5 = 5x.$$

Logo,

$$x = \frac{15}{5} = 3 \text{ horas}.$$

Será que, mesmo quando lidamos com grandezas inversamente proporcionais, é possível reescrever a regra de três usando o custo unitário? É claro que sim. Para ver

como isso é feito, vamos revisitar o Problema 11 acima, prestando muita atenção nas unidades envolvidas.

Incluindo as unidades na equação da regra de três, obtemos

$$2 \text{ pedreiros} \cdot 7{,}5 \text{ horas} = 5 \text{ pedreiros} \cdot x \text{ horas}.$$

Isolando x nessa equação, descobrimos que o número de horas de trabalho quando temos 5 pedreiros é igual a

$$x = \frac{\overbrace{2 \text{ pedreiros} \cdot 7{,}5 \text{ horas}}^{\text{tempo gasto por um pedreiro}}}{\underbrace{5 \text{ pedreiros}}_{\text{Número de pedreiros}}}.$$

Ou seja, para descobrirmos quanto tempo cada pedreiro irá trabalhar, devemos efetuar duas etapas:

O passo (a) corresponde ao cálculo do "custo unitário", ou seja, da constante de proporcionalidade do problema. Nesse exemplo, essa constante corresponde a 15 h · pedreiro.

a) Calcular o tempo gasto por um pedreiro, caso estivesse trabalhando sozinho: Se dois pedreiros gastam 7,5 h cada um, então um pedreiro, sozinho, teria que fazer o trabalho de dois, gastando
$$2 \cdot 7{,}5 = 15 \text{ h}.$$

b) Dividir o valor encontrado pelo número de pedreiros disponíveis: Se um pedreiro gastaria 15 h para efetuar o serviço, cinco pedreiros gastarão
$$\frac{15}{5} = 3 \text{ h}.$$

Tentemos resolver mais um problema prático usando essa ideia.

Problema 12. Água na piscina

Quando três registros iguais são abertos, uma piscina é enchida em 21 horas. Se apenas dois registros forem abertos, quanto tempo será gasto para encher a piscina?

Solução.

Como os registros são iguais, podemos supor que a vazão através deles é a mesma, ou seja, que a quantidade de água que passa a cada segundo pelos registros é a mesma. Nesse caso, o tempo necessário para o enchimento da piscina é inversamente proporcional ao número de registros abertos, como indica a Tabela 2.12.

Tabela 2.12: Registros × tempo

Registros	Tempo (horas)
↑ 3	21 ↓
2	x

Usando a regra de três tradicional

A partir da tabela, podemos escrever

$$3 \cdot 21 = 2x.$$

Desse modo,

$$x = \frac{63}{2} = 31{,}5 \text{ horas}.$$

Usando a regra de três com o cálculo do "custo unitário"

Tentemos, agora, obter a mesma solução usando a estratégia em duas etapas apresentada acima.

a) Tempo gasto se há um único registro aberto:

Quando três registros são abertos, a piscina é enchida em 21 h. Por outro lado, se apenas um registro estiver aberto, ele terá que fazer o trabalho dos três, gastando

$$3 \cdot 21 = 63 \text{ h}.$$

b) Tempo gasto quando dois registros são abertos:

Se, quando um único registro é aberto, gasta-se 63 h, então, com dois registros, a piscina pode ser enchida em

$$\frac{63}{2} = 31{,}5 \text{ h.}$$

■ Problemas complexos

Em alguns problemas práticos, é preciso fazer algumas manipulações até que a regra de três possa ser aplicada. Vejamos um exemplo cuja resolução não é imediata.

Problema 13. Empresa em sociedade

Fernando, Pedro e Celso abriram uma empresa de investimento imobiliário. O capital inicial da empresa contou com R$ 300.000,00 de Fernando, R$ 700.000,00 de Celso e R$ 900.000,00 de Pedro. Após um ano, a empresa rendeu R$ 180.500,00. Como distribuir esse lucro pelos três sócios, de forma que cada um receba um valor proporcional ao que investiu?

Solução.

Juntos, os três sócios investiram 300.000 + 700.000 + 900.000 = R$ 1.900.000,00 na empresa. Assim, com base nos dados do problema, podemos montar a Tabela 2.13.

Tabela 2.13: Investimento e lucro por sócio

Sócio	**Investimento (R$ mil)**	**Lucro (R$ mil)**
Fernando	300	x
Celso	700	y
Pedro	900	z
Total	1.900	180,5

Como o lucro de cada sócio é diretamente proporcional ao valor investido, também poderíamos determinar x, y e z aplicando três vezes a regra de três, usando os valores totais do investimento e do lucro como referência.

Vamos resolver o problema calculando o "lucro unitário", ou seja, o lucro (em reais) obtido para cada real investido, que vale

$$\frac{\text{R\$ } 180{,}5 \text{ mil}}{\text{R\$ } 1900 \text{ mil}} = 0{,}095.$$

Logo, há um lucro de 9,5 centavos para cada real aplicado na empresa, o que corresponde a um rendimento de 9,5%. Agora, podemos calcular a parcela do lucro que cabe a cada sócio, multiplicando o lucro unitário pelo valor investido:

Fernando: $0{,}095 \cdot 300 =$ R$ 28,5 mil.

Celso: $0{,}095 \cdot 700 =$ R$ 66,5 mil.

Pedro: $0{,}095 \cdot 900 =$ R$ 85,5 mil.

Só para aumentar a nossa confiança no resultado obtido, vamos conferir se os lucros dos sócios somam R$ 180.500:

$$28{,}5 \text{ mil} + 66{,}6 \text{ mil} + 85{,}5 \text{ mil} = 180{,}5 \text{ mil.}$$

Ok! A resposta parece correta.

Exercícios 2.2

1. Em uma loja de materiais de construção, o preço da pia de granito (com 0,55 m de largura) é diretamente proporcional ao comprimento da peça. Se uma pia com 1,5 m de comprimento custa R$ 330,00, quanto custará uma pia com 1,8 m?

2. Com 500 litros de leite se produz 23 kg de manteiga. Quantos quilos de manteiga será capaz de produzir uma cooperativa que possui 2700 litros de leite?

3. As 36 mulheres de uma empresa correspondem a 45% dos funcionários. Quantos empregados possui a empresa?

4. Um copo de leite integral contém 248mg de cálcio, o que representa 31% do valor diário de cálcio recomendado. Qual é esse valor recomendado?

5. Se um litro de água do mar contém 35 g de sal, quantos litros de água do mar são necessários para a obtenção de 1 kg de sal?

6. Se uma torneira libera 78 litros de água em 5 minutos, quanto tempo será necessário para encher uma piscina plástica de 2300 litros?

7. Uma senhora consome duas caixas de reumatix a cada 45 dias. Quantas caixas ela consome por ano? Em quanto tempo ela consome 12 caixas?

8. No açougue do Zé, uma peça de 1,6 kg de lagarto custa R$ 19,20. Quanto Zé cobra por uma peça de 2,1 kg da mesma carne?

9. João gastou 8m30s para imprimir um texto de 180 páginas em sua possante impressora. Quanto tempo ele gastaria para imprimir um texto de 342 páginas?

10. Um carro percorre os 500 km que separam Campinas e o Rio de Janeiro em 6 h 15 m. Mantendo a mesma velocidade, quanto tempo ele gastaria para ir de Campinas a Vitória, distantes 950 km?

11. O reservatório de Cachoeirinha está enfrentando um período de estiagem. Se a população mantiver o consumo atual de 150 litros por pessoa por dia, o reservatório estará seco em 160 dias. Qual deve se o consumo (em litros por pessoa por dia) para que a água do reservatório dure até o início do próximo período chuvoso, que começa em 200 dias?

12. Coloquei 50 litros de combustível no tanque de meu carro, gastando R$ 120,00. Quanto gastaria se colocasse apenas 35 litros do mesmo combustível?

13. Quinze operários constroem uma casa em 6 meses. Em quanto tempo vinte operários seriam capazes de construir a mesma casa?

14. Rodando a 60 km/h, um ônibus faz um percurso em 45 minutos. Em quanto tempo o ônibus faria o mesmo percurso trafegando a 80 km/h?

15. Uma embalagem de 900 g de um sabão em pós custa R$ 5,40. Quanto deve custar uma embalagem de 1,2 kg do mesmo sabão para que seja vantajoso comprá-la?

16. Uma equipe de 12 marceneiros fabrica um lote de cadeiras em 10 dias. Se for preciso produzir o mesmo lote em 8 dias, quantos marceneiros deverão ser contratados (supondo que todos tenham o mesmo ritmo de trabalho)?

17. Um operário assentou 12 m^2 de piso em 8 h. Mantendo esse ritmo, em quanto tempo ele ainda gastará para terminar de assentar os 96 m^2 de piso da residência?

18. Usando um cano com vazão de 0,2 ℓ/s (litros por segundo), enchemos uma caixa d'água em 6 h. Se a vazão fosse aumentada para 0,5 ℓ/s, quanto tempo seria gasto para encher a caixa d'água?

19. Em um restaurante por quilo, um prato de 420 g custa R$ 5,25. Quanto custa um prato de 640 g nesse mesmo restaurante?

20. Navegando a 10 nós, uma barca atravessa uma baía em 20 minutos. Determine quanto tempo uma barca que navega a 16 nós gasta para fazer a mesma travessia.

21. Um professor corrige 50 provas em 70 minutos. Quanto tempo ele gasta para corrigir todas as 125 provas de seus alunos?

22. Em uma fazenda, 40 pessoas fazem a colheita de frutas em 8 dias. Se o número de pessoas aumentasse para 64, quanto tempo seria gasto na colheita das frutas?

23. Um fazendeiro pode transportar sua safra de grãos usando dois tipos de caminhões: um com 16 e outro com 24 toneladas de carga. Usando os caminhões de 16 toneladas, é preciso fazer 33 viagens. Quantas viagens são necessárias quando se usa caminhões com 24 toneladas de capacidade?

24. Para produzir 120 blocos de cimento, uma fábrica consome 420 kg de material. Quantos quilogramas seriam consumidos para produzir 1000 blocos?

25. Quando faz um churrasco em família, Abel compra 1,6 kg de carne. Hoje, Abel receberá três convidados, de modo que terá que fazer churrasco para 8 pessoas. Quantos quilogramas de carne ele deverá comprar?

26. Lendo 20 páginas por dia, Carla terminará um livro em 15 dias. Em quantos dias ela terminaria o mesmo livro se lesse 25 páginas por dia?

27. Para encher uma piscina infantil, Laís precisa transportar 104 baldes com 2,5 litros de capacidade. Se usasse um balde de 4 litros, quantas vezes ela teria que transportar água da torneira à piscina?

28. Um caixa de banco gasta, em média, 5 minutos para atender 3 pessoas. Quanto tempo ele gastará para atender os 27 clientes que estão na fila?

29. Ezequiel gastou 2 horas para pintar 16 m^2 de um muro com 50 m^2. Mantendo esse ritmo, quanto tempo ele gastará para terminar de pintar o muro?

30. Dirigindo a 60 km/h, certo professor vai de casa à UNICAMP em 12 minutos. Em quanto tempo esse professor faz o mesmo percurso na hora do rush, trafegando a 42 km/h?

31. Em um treino para uma corrida, o piloto que ficou em primeiro lugar gastou 1 m 29,6 s para percorrer uma volta em uma pista, rodando a 236,7 km/h. Determine em quanto tempo o último colocado deu uma volta na pista, sabendo que ele dirigiu a uma velocidade média de 233,8 km/h.

32. Para pintar uma superfície de 25 m^2 de área, gasta-se 3,6 litros de tinta. Quantos litros são necessários para pintar uma parede de 40 m^2?

33. Com uma equipe de 20 funcionários, uma empresa é capaz de atender uma encomenda de produtos natalinos em 48 dias. Se a empresa precisa reduzir o prazo de entrega da encomenda para 32 dias, quantos funcionários deverão compor a equipe?

34. Em um dia normal de trabalho, uma colhedeira funciona por 8 horas e consome 360 litros de combustível. Se for necessário ampliar o turno de trabalho para 11 h, quanto combustível a colhedeira consumirá diariamente?

35. Um motorista viajou de Grumixama a Porangaba em 21 minutos, a uma velocidade média de 80 km/h. Na volta, o trânsito pesado fez com que a velocidade média baixasse para 64 km/h. Quanto tempo durou essa viagem de volta?

36. A luz viaja no vácuo a 300 mil km/s. Sabendo que a distância entre o Sol e a Terra é de, aproximadamente, 150 milhões de quilômetros, quantos minutos um raio de luz gasta para fazer essa travessia?

37. Segundo o censo do IBGE, em 2010, o Brasil tinha 147,4 milhões de pessoas com 10 anos ou mais que eram alfabetizadas, o que correspondia a 91% da população nessa faixa etária. Determine o número de brasileiros com 10 anos ou mais em 2010.

38. Um relógio atrasa 5 segundos por semana.

a) Quantos minutos ele atrasa por ano?

b) Em quantos dias o atraso atinge um minuto?

39. Uma câmera tira fotos com 4896 pixels de largura por 3672 pixels de altura. Se quero imprimir uma fotografia com 15 cm de largura, que altura essa foto terá?

40. Um carro irá participar de uma corrida em que terá que percorrer 70 voltas em uma pista com 4,4 km de extensão. Como o carro tem um rendimento médio de 1,6 km/l e seu tanque só comporta 60 litros, o piloto terá que parar para reabastecer durante a corrida.

a) Supondo que o carro iniciará a corrida com o tanque cheio, quantas voltas completas ele poderá percorrer antes de parar para o primeiro reabastecimento?

b) Qual é o volume total de combustível que será gasto por esse carro na corrida?

41. Um carro bicombustível é capaz de percorrer 9 km com cada litro de álcool e 12,75 km com cada litro de gasolina pura. Suponha que a distância percorrida com cada litro de combustível seja igual à soma das distâncias relativas às quantidades de álcool e gasolina.

a) Quantos quilômetros esse carro consegue percorrer com cada litro de gasolina C (aquela que é vendida nos postos), que contém 80% de gasolina pura e 20% de álcool?

b) Em um determinado posto, o litro da gasolina C custa R$ 2,40 e o do álcool custa R$1,35. Abastecendo-se nesse posto, qual combustível proporcionará o menor custo por quilômetro rodado? Justifique.

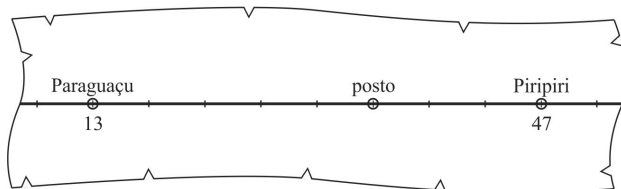
c) Suponha que, ao chegar a um posto, o tanque do carro já contivesse 1/3 de seu volume preenchido com gasolina C e que seu proprietário tenha preenchido os 2/3 restantes com álcool. Se a capacidade do tanque é de 54 litros, quantos quilômetros o carro poderá percorrer com essa quantidade de combustível?

42. Fernanda está poupando para comprar um carro. A mãe de Fernanda decidiu ajudar, pagando 20% do valor do veículo. Entretanto, Fernanda ainda precisa juntar R$ 1.600,00, que correspondem a 8% da parcela que ela irá pagar, descontada a contribuição materna. Quanto custa o veículo?

43. Uma padaria de Campinas vendia pães por unidade, a um preço de R$ 0,20 por pãozinho de 50 g. Atualmente, a mesma padaria vende o pão por peso, cobrando R$ 4,50 por quilograma do produto.

a) Qual foi a variação percentual do preço do pãozinho provocada pela mudança de critério de cálculo do preço?

b) Um consumidor comprou 14 pãezinhos de 50 g, pagando pelo peso, ao preço atual. Sabendo que os pãezinhos realmente tinham o peso previsto, calcule quantos reais o cliente gastou nessa compra.

44. A figura abaixo mostra um fragmento de mapa, em que se vê o trecho reto de estrada que liga as cidades de Paraguaçu e Piripiri. Os números apresentados no mapa representam as distâncias, em quilômetros, entre cada cidade e o ponto de início da estrada (que não aparece na figura). Os traços perpendiculares à estrada estão igualmente espaçados de 1 cm.

a) Para representar a escala de um mapa, usamos a notação 1: X, onde X é a distância real correspondente à distância de 1 unidade do mapa. Usando essa notação, indique a escala do mapa dado acima.

b) Repare que há um posto exatamente sobre um traço perpendicular à estrada. Em que quilômetro (medido a partir do ponto de início da estrada) encontra-se tal posto?

c) Imagine que você tenha que reproduzir o mapa dado usando a escala 1:500000. Se você fizer a figura em uma folha de papel, a que distância, em centímetros, desenhará as cidades de Paraguaçu e Piripiri?

45. Dois atletas largaram lado a lado em uma corrida disputada em uma pista de atletismo com 400 m de comprimento. Os dois atletas correram a velocidades constantes, porém diferentes. O atleta mais rápido completou cada volta em exatos 66 segundos. Depois de correr 17 voltas e meia, o atleta mais rápido ultrapassou o atleta mais lento pela primeira vez. Com base nesses dados, pergunta-se:

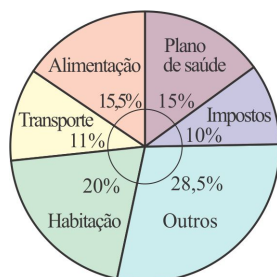
a) Quanto tempo gastou o atleta mais lento para percorrer cada volta?

b) Em quanto tempo o atleta mais rápido completou a prova, que era de 10.000 metros?

c) No momento em que o atleta mais rápido cruzou a linha de chegada, que distância o atleta mais lento havia percorrido?

46. Planos de saúde têm suas mensalidades estabelecidas por faixa etária. A tabela abaixo fornece os valores das mensalidades do plano "Geração Saúde".

Faixa etária	Mensalidade (R$)
até 15 anos	120,00
de 16 a 30 anos	180,00
de 31 a 45 anos	260,00
de 46 a 60 anos	372,00
61 anos ou mais	558,00

O gráfico em formato de pizza abaixo mostra o comprometimento do rendimento mensal de uma determinada pessoa que recebe 8 salários mínimos por mês e aderiu ao plano de saúde "Geração Saúde". Determine a que faixa etária pertence essa pessoa, supondo que o salário mínimo nacional valha R$ 465,00 (salário vigente em 2009).

47. Caminhando sempre com a mesma velocidade, a partir do marco zero, em uma pista circular, um pedestre chega à marca dos 2.500 metros às 8 h e aos 4.000 metros às 8 h 15.

a) Quantos metros o pedestre caminha por minuto?

b) Quantos metros tem a pista se o pedestre deu duas voltas completas em 1 h 40?

48. Uma pessoa possui R$ 7560,00 para comprar um terreno que custa R$ 15,00 por metro quadrado. Considerando que os custos para obter a documentação do imóvel oneram o comprador em 5% do preço do terreno, pergunta-se:

a) Qual é o custo final de cada metro quadrado do terreno?

b) Qual é a área máxima que a pessoa pode adquirir com o dinheiro que ela possui?

49. Supondo que a área média ocupada por uma pessoa em um comício seja de 2.500 cm^2, pergunta-se:

a) Quantas pessoas podem se reunir em uma praça retangular que meça 150 m de comprimento por 50 m de largura?

b) Se 3/56 da população de uma cidade são suficientes para lotar a praça, qual é a população da cidade?

50. A tabela abaixo fornece os valores diários de referência (VDR) de alguns nutrientes, de acordo com a Resolução RDC 360 da Agência Nacional de Vigilância Sanitária (ANVISA). Um explorador preso na Antártida possui apenas barras de cereais para se alimentar. Lendo a embalagem do produto, ele descobriu que cada barra contém 90 kcal, 24 g de carboidratos, 2,5% do valor de referência de proteínas e 4% do valor de referência de fibra alimentar. Para ingerir no mínimo os valores de referência dos nutrientes acima, quantas barras ele deverá comer por dia?

Nutriente	VDR
Valor energético	2000 kcal
Carboidratos	300 g
Proteínas	75 g
Fibra alimentar	25 g

51. Dois tanques, A e B, estão conectados, mas a válvula entre eles está fechada. No momento, o tanque A contém 20 litros de gás, à uma pressão de 3 atm, enquanto o tanque B está vazio. Se abrirmos a válvula, o gás se espalhará pelos dois tanques, e a pressão baixará para 2 atm. Nesse caso, qual é o volume do tanque B?

52. Uma determinada cidade registrou 2.500 casos de dengue em 2008, para uma população estimada de 350.000 habitantes.

a) Calcule o coeficiente de incidência de dengue na cidade nesse período, definido como o número de casos por 10.000 habitantes.

b) Em 2008, o coeficiente de incidência de dengue hemorrágica na cidade foi de 0,17 casos por 10.000 habitantes. Determine o número de casos de dengue hemorrágica detectados naquele ano.

c) Suponha que o coeficiente de incidência de dengue (em casos por 10.000 hab) tenha crescido 5% entre 2008 e 2010, e que, além disso, a população tenha crescido 4% no período. Determine o número de casos de dengue registrados em 2010.

53. Três agricultores formaram uma cooperativa para comprar um trator. Robson gastou R$ 40.000,00, Rodney investiu R$ 66.000,00, e Lúcio pagou os R$ 34.000,00 restantes. Pelo acordo feito entre os três, o número de dias de uso do trator deve ser proporcional ao valor gasto. Determine quantos dias por ano cada agricultor poderá usar o trator.

54. Segundo dados do Ministério do Trabalho e Emprego, no período de julho de 2000 a junho de 2001, houve 10.195.671 admissões ao mercado formal de trabalho no Brasil, e os desligamentos somaram 9.554.199. Sabendo-se que o número de empregos formais criados nesse período resultou em um acréscimo de 3% no número de pessoas formalmente empregadas em julho de 2000, qual era o número de pessoas formalmente empregadas em junho de 2001.

55. O transporte de carga ao porto de Santos é feito por meio de rodovias, ferrovias e dutovias. A tabela abaixo fornece alguns dados relativos ao transporte ao porto no primeiro semestre de 2007 e no primeiro semestre de 2008, indicando claramente o aumento da participação percentual do transporte ferroviário nesse período. Com base nos dados da tabela, responda às questões abaixo.

Meio de transporte	Participação no total transportado ao porto		Carga transportada (em milhões de toneladas)	
	2007	2008	2007	2008
Ferroviário	18%	24%	6,8	8,8
Rodoviário	77%		29,1	
Dutoviário				

a) Determine a carga total (em milhões de toneladas) transportada ao porto no primeiro semestre de 2007. Calcule também quantas toneladas foram transportadas por dutos no primeiro semestre de 2007.

b) Sabendo que, no primeiro semestre de 2008, foram transportadas por rodovias 2,7 milhões de toneladas a menos do que o valor registrado pelo mesmo meio de transporte no primeiro semestre de 2007, calcule a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008.

Respostas dos Exercícios 2.2

1. R$ 396,00
2. 124,2 kg
3. 80 funcionários
4. 800 mg
5. 28,571 litros
6. Pouco mais de 147 minutos
7. Ela consome 16,2 caixas por ano, e gasta 270 dias para consumir 12 caixas.
8. R$ 25,20
9. 16 m 9 s
10. 11,875 horas, ou 11h52m30s
11. 120 litros por pessoa por dia
12. R$ 84,00
13. 4,5 meses
14. 33,75 minutos, ou 33m45s
15. R$ 7,20
16. 15 marceneiros
17. 56 h
18. 2,4 h = 2 h 24 m
19. R$ 8,00
20. 12,5 min
21. 175 min
22. 5 dias
23. 22 viagens
24. 3500 kg
25. 2,560 kg
26. 12 dias
27. 65 baldes
28. 45 minutos
29. 4,25h, ou 4h15m
30. Em 17,14 minutos
31. 1 m 30,7 s
32. 5,76 litros
33. 30 funcionários
34. 495 litros
35. Em 26 m 15 s
36. 500 s, ou 8 m 20 s
37. Cerca de 162 milhões de habitantes
38. a) Cerca de 4 m 21 s b) 84 dias
39. 11,25 cm
40. a) 21 voltas b) 192,5 litros
41. a) 12 km/l b) O álcool c) 540 km
42. R$ 25.000,00
43. a) A variação de preço foi de 12,5% b) R$ 3,15
44. a) A escala é 1:425.000 b) No quilômetro 34 c) A uma distância de 6,8 cm
45. a) 70 s b) 1650 s c) 9428 m
46. 61 anos ou mais
47. a) 100 m por minuto b) 5000 m
48. a) R$ 15,75 b) 480 m^2
49. a) 30.000 pessoas b) 560.000 habitantes
50. 40 barras
51. 10 litros.
52. a) 71,43 casos por 10.000 habitantes b) 6 casos c) 2730 casos
53. Robson: 104 dias; Rodney: 172 dias; Lúcio: 89 dias.
54. 22.023.872 pessoas
55. a) A carga transportada foi de 37,8 milhões de toneladas, das quais 1,9 milhão foram transportadas por dutos. b) 72% da carga foi transportada por rodovias.

2.3 Regra de três composta

A regra de três que vimos até agora – chamada *regra de três simples* – é um método eficiente para solucionar problemas nos quais duas grandezas mantêm uma relação de proporcionalidade. Entretanto, há muitos problemas práticos que envolvem três ou mais grandezas, impedindo que sua solução seja obtida diretamente através da solução de apenas uma regra de três simples. Nesses casos, a solução costuma ser obtida através do que chamamos de *regra de três composta*.

Embora muitos textos matemáticos apresentem métodos diretos para a solução de problemas através da regra de três composta, é raro encontrar um estudante que, um ano após tê-lo aprendido, seja capaz de recordar tal método. Por esse motivo, veremos como resolver problemas nos quais há várias grandezas relacionadas aplicando sucessivas vezes a regra de três simples. Essa estratégia, apesar de mais demorada, é bastante confiável e não exige a memorização de um novo método.

Via de regra, a aplicação da regra de três composta a um problema com n grandezas é equivalente a $n-1$ aplicações da regra de três simples. Em cada um desses passos, relacionamos a grandeza associada à incógnita do problema a uma grandeza diferente, mantendo fixas as demais grandezas. Para compreender como isso é feito, acompanhe os exemplos abaixo.

Problema 1. Mais peixes

Uma piscicultora chamada Aline possui dois tanques de criação de carpas. O primeiro tanque contém 20 carpas, cada qual com cerca de 160 g. Por sua vez, as 24 carpas do segundo tanque têm apenas 125 g de peso médio.

Se, somadas, as carpas do primeiro tanque consomem 80 g de ração por dia, quantos gramas de ração Aline gasta diariamente para alimentar todas as carpas do segundo tanque? Suponha que o consumo de ração de cada peixe seja diretamente proporcional a seu peso.

Solução.

A incógnita do problema, x, corresponde à quantidade de ração (em g) gasta por dia para alimentar as carpas do segundo tanque. Entretanto, não há uma maneira direta de calcular o valor dessa variável, pois o problema envolve três grandezas diferentes: o número de carpas, o peso das carpas e a quantidade de ração, como mostra a Figura 2.1.

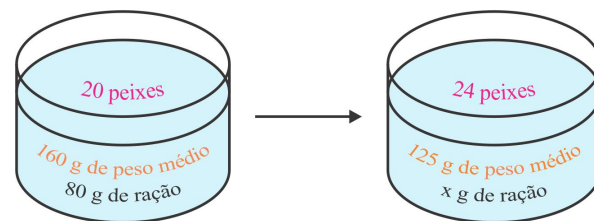



Figura 2.1: Dados do Problema 1.

Resolveremos o problema em duas etapas. Na primeira, vamos manter constante o número de carpas, e analisar como a quantidade de ração se relaciona ao peso dos peixes. Já na segunda etapa, manteremos constante o peso dos peixes, e relacionaremos a quantidade de ração ao número de carpas. O esquema que adotaremos está ilustrado na Figura 2.2.

Figura 2.2: Etapas de solução do Problema 1.

Etapa 1

Fixemos o número de carpas em 20 (o número de peixes do tanque cujos dados são conhecidos), e vejamos quanto é consumido de ração se as carpas têm um peso médio de 125 g.

Nesse caso, segundo o enunciado, o consumo de ração é diretamente proporcional ao peso médio dos peixes, de modo que podemos montar a Tabela 2.14. Com base nos dados dessa tabela, obtemos a equação

Tabela 2.14: Peso × ração

Peso dos peixes (g)	Ração (g)
160	80
125	y

$$\frac{160\,\text{g (peixe)}}{80\,\text{g (ração)}} = \frac{125\,\text{g (peixe)}}{y\,\text{g (ração)}}.$$

Aplicando, então, o produto cruzado, concluímos que

$$160y = 125 \cdot 80 \quad \Rightarrow \quad 160y = 10000 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10000}{160} = 62{,}5\,\text{g}.$$

Logo, 20 carpas de 125 g consomem 62,5 kg de ração por dia.

Etapa 2

Vejamos, agora, quanto consomem 24 carpas com o mesmo peso. Como é natural, vamos supor que o consumo de ração seja diretamente proporcional ao número de peixes no tanque.

Observando a Tabela 2.15, notamos que

Tabela 2.15: Peixes × ração

Peixes	Ração (g)
20	62,5
24	x

$$\frac{20\text{ peixes}}{62{,}5\,\text{g ração}} = \frac{24\text{ peixes}}{x\,\text{g ração}}.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$20x = 24 \cdot 62{,}5 \quad \Rightarrow \quad 20x = 1500 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1500}{20} = 75\,\text{g}.$$

Ou seja, as 24 carpas do segundo tanque consomem 75 g de ração por dia.

Problema 2. Correção de provas

No ano passado, uma banca de 16 professores de matemática corrigiu, em 9 dias úteis, as 48.000 provas do vestibular de uma universidade. Nesse ano, é necessário corrigir 50.000 provas, mas a banca só terá 8 dias úteis para efetuar o trabalho. Quantos professores devem ser contratados para essa tarefa?

Solução.

Esse problema também envolve três grandezas diferentes: o número de professores, o número de provas e o número de dias de correção. O objetivo é descobrir o valor da variável x, que corresponde ao número necessário de professores para corrigir as 50.000 provas em 8 dias. A Figura 2.3 fornece todas as informações relevantes do enunciado.

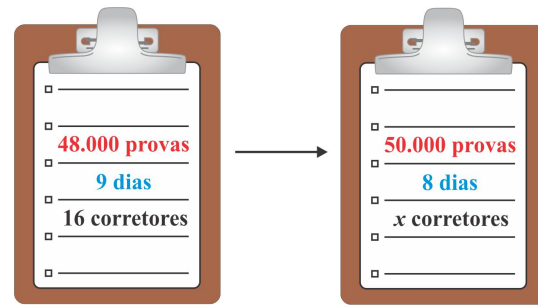



Figura 2.3: Dados do Problema 2.

Mais uma vez, a resolução do problema envolverá dois passos, como mostrado na Figura 2.4. No primeiro passo, manteremos constante o número de dias, e veremos quantos corretores serão necessários para corrigir as 50.000 provas. Em seguida, fixaremos o número de provas, e variaremos o número de dias de correção.

Figura 2.4: Etapas de solução do Problema 2.

Etapa 1

Tabela 2.16: Provas × pessoas

Provas	Corretores
48 mil	16
50 mil	y

Repare que, se fixarmos em 9 o número de dias de correção, o número de corretores será diretamente proporcional ao número de provas corrigidas, como mostra a Tabela 2.16. Assim, teremos

$$\frac{16 \text{ corretores}}{48 \text{ mil provas}} = \frac{y \text{ corretores}}{50 \text{ mil provas}}.$$

Aplicando o produto cruzado a essa equação, obtemos

$$48y = 16 \cdot 50 \quad \Rightarrow \quad 48y = 800 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{800}{48} \approx 16{,}67 \text{ corretores}.$$

Logo, para corrigir 50.000 provas em 9 dias são necessários cerca de 16,67 corretores. Não se preocupe com o fato de termos obtido um número fracionário de corretores, pois esse valor é apenas intermediário, não correspondendo à solução do problema.

Etapa 2

Tabela 2.17: Dias × pessoas

Dias de correção	Número de corretores
9	16,67
8	x

Suponhamos, agora, que o número de provas permaneça fixo em 50.000, mas o número de dias de correção seja reduzido de 9 para 8. Nesse caso, o número de pessoas deverá aumentar, pois será preciso corrigir mais provas por dia. Observamos, então, que o número de dias e o número de corretores são grandezas inversamente proporcionais, como indica a Tabela 2.17. Assim, temos

$$9 \text{ dias} \cdot 16{,}67 \text{ corretores} = 8 \text{ dias} \cdot x \text{ corretores},$$

o que nos leva a

$$x = \frac{9 \cdot 16{,}67}{8} \approx \frac{150}{8} = 18{,}75 \text{ corretores}.$$

Finalmente, como o número de corretores deve ser inteiro, concluímos que a banca de matemática deve ser composta por 19 pessoas.

Problema 3. Transporte de terra

Usando 9 caminhões basculantes por 10 horas, uma empresa costuma transportar 216 toneladas de terra por dia para a construção de uma enorme barragem.

Como a empreiteira que administra a obra está interessada em acelerar o trabalho, a empresa terá que passar a transportar 248 toneladas diárias. Por outro lado, em virtude de um acordo com o sindicato dos motoristas, a empresa não poderá operar os caminhões por mais que 8 horas diárias.

Quantos caminhões devem ser usados para transportar terra à barragem?

Solução.

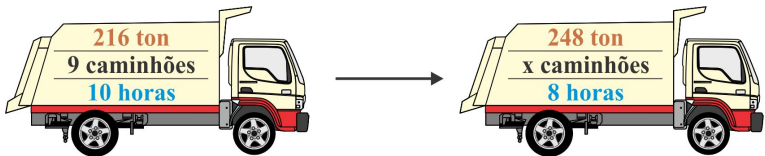



Figura 2.5: Dados do Problema 3.

A Figura 2.5 resume tanto o regime de trabalho atual como aquele que terá que ser adotado. Em resumo, queremos determinar o número de caminhões, x, que a empresa usará para transportar 248 toneladas de terra, trabalhando 8 horas diárias.

Como há três grandezas envolvidas (horas de trabalho, número de caminhões e quantidade de terra transportada), resolveremos o problema em duas etapas. A grandeza fixada em cada etapa é mostrada na Figura 2.6.

Figura 2.6: Etapas de solução do Problema 3.

Etapa 1

Tabela 2.18: Caminhões × jornada

Caminhões	Jornada (h)
↓ 9	10 ↑
y	8

Na primeira etapa, fixamos em 216 toneladas a quantidade de terra a ser transportada por dia. Nesse caso, queremos saber quantos caminhões serão necessários para o transporte se a jornada de trabalho for reduzida de 10 para 8 horas diárias. Os dados relevantes dessa etapa são mostrados na Tabela 2.18.

Como indica a tabela, o número de caminhões usados para o transporte é inversamente proporcional ao tempo diário de trabalho. Usando essa informação, escrevemos

$$9 \text{ caminhões} \cdot 10 \text{ horas} = y \text{ caminhões} \cdot 8 \text{ horas},$$

de modo que

$$y = \frac{90}{8} = 11{,}25 \text{ caminhões}.$$

Assim, teríamos que usar 11,25 caminhões para transportar 216 toneladas em 8 horas diárias. Para não incorrer em erros de aproximação, vamos manter o valor fracionário do número de caminhões até o final da segunda etapa, quando teremos o valor definitivo.

Etapa 2

Tabela 2.19: Caminhões × terra

Caminhões	Terra (ton)
11,25	216
x	248

Para terminar de resolver o problema, vamos fixar em 8 horas a jornada de trabalho diária, e relacionar o número de caminhões ao peso total de terra a ser transportada.

Sabemos que a quantidade de terra é diretamente proporcional ao número de caminhões, como indicam as setas da Tabela 2.19. Assim,

$$\frac{11{,}25 \text{ caminhões}}{216 \text{ toneladas}} = \frac{x \text{ caminhões}}{248 \text{ toneladas}},$$

donde obtemos

$$11{,}25 \cdot 248 = 216x \quad \Rightarrow \quad 216x = 2790 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2790}{216} \approx 12{,}92 \text{ caminhões}.$$

Como o número de caminhões não pode ser fracionário, concluímos que a meta diária de transporte de terra estabelecida pela empreiteira só será atingida se forem usados 13 caminhões.

Exercícios 2.3

1. Trabalhando 8 horas diárias, um operário produz 600 peças em cinco dias. Se trabalhasse 10 horas por dia, quantos dias ele gastaria para produzir 1200 peças?
2. Em uma casa com 3 moradores, o consumo de energia com o chuveiro atinge 67,5 kWh em 30 dias. Qual será o consumo energético da casa em uma semana na qual a casa recebeu dois parentes? Suponha que os visitantes tomem banho com duração equivalente à média da família.
3. Maristela é uma trabalhadora autônoma. Da última vez que prestou um serviço, ela trabalhou 10 horas por dia, durante 12 dias, e recebeu R$ 1.800,00. Agora, ela recebeu uma proposta para trabalhar 9 horas por dia, durante 21 dias. Quanto Maristela deve cobrar pelo serviço, se pretender receber, proporcionalmente, o mesmo que em seu último contrato?
4. Em uma fazenda de cana-de-açúcar, 140 trabalhadores são capazes de colher 2,52 km^2 em 18 dias. Quantos trabalhadores são necessários para efetuar a colheita de 2,75 km^2 em 22 dias, supondo que o rendimento médio do trabalho seja constante?
5. Em um escritório no qual havia 8 lâmpadas de 100 W, o consumo mensal de energia era de 176 kWh. Recentemente, as lâmpadas antigas foram substituídas por 14 lâmpadas econômicas, cada qual com 15 W. Qual é o consumo mensal atual do escritório?
6. Usando todas as suas seis máquinas (que são iguais), uma indústria produz cerca de 4 milhões de garrafas PET por semana. Se uma das máquinas está parada para manutenção, quantos dias serão necessários para que a empresa produza um lote de 3,5 milhões de garrafas?
7. Uma torneira que pinga 20 gotas por minuto desperdiça 1,44 litros por dia. Se minha mãe, inadvertidamente, deixou uma torneira pingando por 5 horas, a uma taxa de 32 gotas por minuto, qual foi o desperdício de água?
8. Para digitar as notas dos 72.000 candidatos de um concurso, uma equipe de 4 pessoas gasta 3 dias. Mantendo esse ritmo de trabalho, quantos dias serão gastos por uma equipe de 5 digitadores para processar as notas de 180.000 candidatos?
9. O dono de um aviário gastava cerca de 2,1 toneladas de ração por mês. Entretanto, uma doença rara o obrigou a sacrificar 2/7 de seus animais. Supondo que a média de peso das aves sobreviventes seja 20% superior à media de peso antes da doença, qual deve ser o consumo mensal atual de ração do aviário?
10. Um caminhoneiro costuma percorrer a distância que separa as cidades de Grumixama e Acajá em 3 dias, dirigindo 8 horas por dia. Com o número de encomendas aumentando, o caminhoneiro pretende passar a trabalhar 10 horas por dia, além de aumentar a velocidade média do caminhão de 60 para 72 km/h. Nesse caso, em quantos dias ele passará a fazer a mesma viagem entre Grumixama e Acajá?

Respostas dos Exercícios 2.3

1. 8 dias
2. 26,25 kWh
3. R$ 2.835,00
4. 125 trabalhadores
5. 46,2 kWh
6. 7,35 dias.
7. 0,48 litros
8. 6 dias
9. 1,8 toneladas
10. 2 dias

2.4 Equações lineares

Todas as equações que vimos até o momento foram, em algum passo de sua resolução, convertidas à forma $ax = b$. Equações assim são chamadas lineares.

> **Equação linear**
>
> Uma equação é dita **linear** ou **de primeiro grau** se é equivalente a
>
> $$ax = b,$$
>
> em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$.

Às vezes, a equação linear aparece de outras formas, exigindo algum trabalho para sua conversão à forma $ax = b$, como ocorre nos exemplos abaixo.

$$1 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 1$$

$$6 = \frac{x+4}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = 4$$

$$3(x-5) = 2(4-6x) \quad \Rightarrow \quad 15x = 23$$

As equações lineares sempre têm uma, e apenas uma, solução. Quando a equação está na forma $ax = b$, essa solução é $x = b/a$.

Algumas equações lineares contêm termos constantes, porém desconhecidos, como em

$$x(a+2) = c - 1.$$

Em casos assim, a equação é dita **literal**, pois sua solução envolve letras. Para o exemplo acima, a solução é

$$x = \frac{c-1}{a+2},$$

desde que $a \neq -2$.

■ Resolução de problemas

Além de ser útil para a fixação de conceitos matemáticos, e de permitir a aplicação desses conceitos a situações de nosso cotidiano, a resolução de problemas desperta o pensamento crítico e a engenhosidade, e nos proporciona alguma dose de organização e uma boa capacidade de abstração.

Infelizmente, não há uma receita única e simples para a solução de problemas, de modo que é preciso analisar cada caso em particular. Entretanto, é possível definir algumas linhas mestras às quais se pode seguir. Fazer desenhos, construir tabelas, testar várias alternativas, detectar as ferramentas matemáticas necessárias, não ignorar dados do enunciado, atentar para as unidades e conferir se os resultados fazem sentido são exemplos de passos necessários à obtenção das respostas.

Em 1945, o matemático George Pólya publicou um livro que ainda é uma referência na resolução de problemas matemáticos. Em seu livro, Pólya propôs um roteiro que, embora não seja o mais adequado em todos os casos, serve de guia para a organização do processo de solução de problemas. Uma versão adaptada desse roteiro é dada no quadro abaixo.

PÓLYA, George – *How to solve it*. Princeton, Princeton University, 1945.

Passos da resolução de problemas

1. Compreenda o problema.

- Leia o texto cuidadosamente, verificando se você entendeu todas as informações nele contidas.
- Identifique as incógnitas.
- Anote os dados relevantes e as condições nas quais eles se aplicam.
- Confira se os dados são suficientes para a resolução do problema, e se não são contraditórios.
- Escolha uma notação apropriada.
- Faça um desenho ou monte uma tabela que ilustre o problema.
- Eventualmente, escreva o problema de outra forma para torná-lo mais claro.

2. Defina uma estratégia para a solução do problema.

- Encontre as relações entre os dados e as incógnitas, usando como base problemas parecidos que você já tenha resolvido.
- Identifique as ferramentas matemáticas necessárias para a solução.
- Se o problema parece muito complicado, resolva um problema similar, porém mais simples.
- Eventualmente, faça um diagrama das etapas que você vai seguir.

3. Execute a sua estratégia, revisando-a se necessário.

- Mantenha o trabalho organizado, descrevendo com certo detalhamento todos os passos que você seguiu.
- Confira seus cálculos, de forma a não permitir a propagação de erros.
- Revise sua estratégia, voltando ao passo 2 se alguma etapa não estiver correta.

4. Confira e interprete os resultados.

- Verifique se seus resultados fazem sentido, conferindo os valores e as unidades.
- Se você encontrou mais de uma solução, despreze aquelas que não satisfazem as condições impostas pelo problema.
- Confira os valores de outra maneira que não aquela segundo a qual eles foram obtidos.
- Verifique a consistência dos resultados analisando casos particulares e situações limite.

Esses passos são genéricos e não explicam exatamente o que fazer em cada caso. Além disso, eles são mais ou menos intuitivos, de modo que geralmente os seguimos mesmo sem notar. Ainda assim, é conveniente ter em mente um plano geral quando vamos tratar de um problema novo.

Outra dica importante encontrada no livro de Pólya diz respeito à conferência das unidades. De fato, o emprego correto das unidades é de fundamental importância durante todo o processo de resolução de um problema, de forma que não é prudente ignorá-las durante a resolução e apenas adicioná-las à resposta.

Se você for efetuar uma soma, por exemplo, verifique se todos os termos têm a mesma unidade. Lembre-se de que é possível somar centímetros com centímetros,

mas não centímetros com quilômetros, ou litros com quilogramas. Além disso, as operações que efetuamos com medidas também se aplicam às suas unidades, de modo que, se a variável x é dada em metros, então a unidade de x^2 é m^2. Por outro lado, se y é dada em km e t é dada em horas, então y/t tem como unidade km/h.

Também é importante levar em conta que, frequentemente, é preciso despender muito esforço (e superar muitos fracassos) para se chegar à solução de um problema. Embora não pareça, para apresentar uma estratégia simples de resolução de um exercício em sala de aula, um professor gasta horas em seu escritório tentando encontrar a forma mais eficiente de resolver aquele problema.

Problema 1. Relógio que atrasa não adianta

No pátio do instituto de matemática há dois relógios. Um deles adianta 5 segundos por dia, enquanto o outro atrasa 3 segundos por dia. Se os dois relógios foram acertados no mesmo instante, quanto tempo deverá transcorrer, desde este instante, até que a diferença entre eles seja de um minuto?

Solução.

Compreensão do enunciado

O enunciado nos diz que

- o primeiro relógio adianta 5 segundos por dia (ou 5 segundos/dia);
- o segundo relógio atrasa 3 segundos por dia (ou 3 segundos/dia);
- os dois relógios foram acertados em um mesmo instante.

A incógnita do problema é o número de dias necessários para que a diferença entre os horários dos relógios seja igual a 1 minuto, partindo do momento em que os relógios foram acertados. Usaremos a letra t para representar essa incógnita.

Além disso, o erro do relógio é um fenômeno contínuo, ou seja, se um relógio erra 5 segundos em um dia, então ele erra 2,5 segundos em meio dia. Assim, a variável t pode assumir qualquer valor real (positivo).

Estratégia de solução

Para resolver o problema,

- calcularemos a diferença (em segundos) dos horários indicados nos relógios, a cada dia;
- escreveremos uma fórmula que relaciona a diferença dos relógios à variável t, que é dada em dias;
- obteremos o resultado desejado igualando o atraso obtido pela fórmula acima ao valor estipulado no enunciado (1 minuto);
- converteremos o resultado para a unidade mais adequada (dias, horas, minutos).

Resolução do problema

O primeiro relógio adianta 5 segundos/dia e o segundo atrasa 3 segundos/dia (ou seja, apresenta uma variação de -3 segundos/dia). Logo, a diferença entre eles é de

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8 \text{ segundos/dia.}$$

Após t dias, essa diferença é igual a

$$\frac{8 \text{ segundos}}{\text{dia}} \cdot t \text{ dias} = 8t \text{ segundos.}$$

Observe que, apesar de t ser dada em dias, a expressão $8t$ é medida em segundos.

Queremos descobrir um valor de t tal que essa diferença seja igual a 1 minuto, o que equivale a 60 segundos. Para tanto, escrevemos a equação

$$8t = 60.$$

Resolvendo essa equação, obtemos

$$t = \frac{60}{8} = 7{,}5 \text{ dias}.$$

Assim, os relógios terão um minuto de diferença passados 7 dias e 12 horas do momento em que foram acertados.

Conferência dos resultados

Intuitivamente, o resultado parece correto, já que não chegamos a valores absurdos como "$t = 5$ minutos" ou "$t = 22$ anos".

Para conferir a exatidão da resposta, podemos calcular o erro apresentado pelos relógios após 7,5 dias, para ter certeza de que há mesmo uma diferença de 1 minuto. Vejamos:

- Se o primeiro relógio adianta 5 segundos por dia, após 7,5 dias ele estará $5 \times 7{,}5 = 37{,}5$ segundos adiantado.
- Por outro lado, como o segundo relógio atrasa 3 segundos por dia, após 7,5 dias ele estará $3 \times 7{,}5 = 22{,}5$ segundos atrasado.
- Logo, a diferença entre os relógios será de

$$37{,}5 - (-22{,}5) = 37{,}5 + 22{,}5 = 60 \text{ segundos}. \qquad \text{Ok!}$$

■ Resolução de problemas com o uso de equações lineares

Uma grande quantidade de problemas cotidianos pode ser resolvida com o auxílio de equações lineares. Nesses casos, o maior trabalho recai na formulação de um modelo matemático que represente o problema, já que a solução é fácil de obter. Nessa seção, vamos explorar esse tipo de modelagem. Começaremos apresentando uma versão do roteiro de Pólya específica para o tipo de problema que vamos tratar.

Roteiro para a solução de problemas que envolvem equações

1. **Compreenda o enunciado.**
   Extraia os dados fornecidos pelo enunciado.
   Defina uma variável e atribua a ela um nome (uma letra, por exemplo).
   Se necessário, monte uma tabela ou faça um desenho.
2. **Relacione os dados do enunciado à variável.**
   Traduza as palavras em expressões matemáticas que envolvam a variável.
   Defina uma equação que relacione as expressões que você encontrou.
3. **Encontre o valor da variável.**
   Resolva a equação. Escreva a resposta na unidade apropriada.
4. **Confira o resultado.**
   Verifique se o valor obtido para a variável resolve a equação, e se a resposta faz sentido. Caso contrário, pode haver um erro em alguma conta, ou mesmo na formulação.

Tomando por base esses passos, tentemos, agora, resolver alguns problemas práticos.

Problema 2. Aluguel de um carro

Para alugar um carro pequeno, a locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R$ 40,00 por dia, além de R$ 0,75 por quilômetro rodado. Lucas alugou um carro e devolveu-o após dois dias, pagando R$185,00. Quantos quilômetros Lucas percorreu com o carro alugado?

Solução.

A primeira etapa da resolução de um problema é a definição da incógnita, ou seja, da informação que se pretende conhecer. Nesse caso, desejamos saber quantos quilômetros foram percorridos por Lucas, de modo que definimos

$$x = \text{distância percorrida por Lucas (em km)}.$$

De posse da variável, devemos extrair dados do problema e associá-los à variável que criamos. O enunciado desse problema nos informa que

- O custo do aluguel do carro é dividido em duas partes, uma fixa por dia, e outra que depende da distância percorrida.
- A parcela fixa do custo é definida pelo produto (custo por dia)×(número de dias). Como Lucas usou o carro por dois dias, essa parcela correspondeu a

$$40 \text{ (R\$/dia)} \cdot 2 \text{ (dias)} = \text{R\$ } 80.$$

- A parcela variável do aluguel é dada por (custo por km)×(distância em km), ou seja,

$$0{,}75 \text{ (R\$/km)} \cdot x \text{ (km)}.$$

- Lucas gastou, no total, R$ 185,00.

Reunindo essas informações, montamos a seguinte equação que relaciona o custo do aluguel ao valor pago por Lucas:

$$\underbrace{80}_{\text{custo fixo}} + \underbrace{0{,}75x}_{\text{custo variável}} = \underbrace{185}_{\text{valor pago}}$$

De posse da equação, resta-nos resolvê-la:

$$\begin{aligned} 80 + 0{,}75x &= 185 \\ 0{,}75x &= 105 \\ x &= 105/0{,}75 \\ x &= 140. \end{aligned}$$

Logo, Lucas percorreu 140 km com o carro alugado. Por segurança, conferimos o resultado obtido:

$$80 + 0{,}75 \cdot 140 = 185 \quad \Rightarrow \quad 80 + 105 = 185 \quad \Rightarrow \quad 185 = 185 \quad \text{Verdadeiro!}$$

Agora, tente o Exercício 17.

Problema 3. Divisão de um barbante

Um barbante com 50 m de comprimento foi dividido em duas partes. Se a primeira parte é 15 m menor que a outra, quanto mede cada parte?

Solução.

Como o objetivo do problema é a determinação dos comprimentos dos pedaços de barbante, vamos escolher um deles para ser a incógnita:

$$x = \text{comprimento do maior pedaço de barbante (em metros).}$$

O enunciado nos informa que

- somados, os dois pedaços têm 50 m de comprimento;
- um pedaço é 15 m menor que o outro.

Usando a segunda informação e o fato do maior pedaço medir x, concluímos que o pedaço menor tem comprimento igual a $x - 15$.

Agora, levando em conta o comprimento total do barbante, escrevemos

$$\underbrace{x}_{\text{pedaço maior}} + \underbrace{(x-15)}_{\text{pedaço menor}} = \underbrace{50}_{\text{comprimento total}}$$

Depois de reescrever essa equação como $2x - 15 = 50$, resolvemo-la seguindo os passos abaixo.

$$\begin{aligned} 2x - 15 &= 50 \\ 2x &= 65 \\ x &= 65/2 \\ x &= 32{,}5. \end{aligned}$$

Assim, o barbante maior tem 32,5 m. Como consequência, o barbante menor mede

$$50 - x = 50 - 32{,}5 = 17{,}5 \text{ m}.$$

Para garantir que a resposta está correta, verificamos que a diferença de comprimento entre os pedaços de barbante é igual a $32{,}5 - 17{,}5 = 15$ m, e que a soma deles equivale a $32{,}5 + 17{,}5 = 50$ m, como esperávamos.

Agora, tente o Exercício 2.

Problema 4. Divisão de uma conta

Três amigos levaram suas respectivas famílias para almoçar em um restaurante. Na hora de pagar a conta de R$ 192,00, Marta decidiu contribuir com R$ 10,00 a mais que Vítor, já que havia pedido uma sobremesa. Além disso, por ter uma família menor, Taís pagou apenas um terço do valor devido por Vítor. Quanto cada amigo desembolsou no almoço?

Solução.

Como muitas informações do problema tomam como base o valor pago por Vítor, definimos a variável

$$x = \text{valor gasto por Vítor (em reais).}$$

Os outros dados fornecidos no enunciado são:

- Valor gasto por Marta (em reais): $x + 10$.
- Valor gasto por Taís (em reais): $x/3$.
- Total da conta: R$ 192.

Com base nesses dados e no fato de que a conta foi repartida entre os três amigos, obtemos a equação

$$\underbrace{x}_{\text{Vítor}} + \underbrace{x+10}_{\text{Marta}} + \underbrace{x/3}_{\text{Taís}} = \underbrace{192}_{\text{total}}$$

A resolução dessa equação é dada abaixo.

$$\begin{aligned} 2x + \frac{x}{3} + 10 &= 192 \\ \frac{6x + x}{3} + 10 &= 192 \\ \frac{7x}{3} &= 182 \\ x &= 182 \cdot \frac{3}{7} \\ x &= 78. \end{aligned}$$

Portanto, Vítor gastou R$ 78,00. Por sua vez, Marta desembolsou $78 + 10 =$ R$ 88,00. Já Taís gastou apenas $78/3 =$ R$ 26,00. Observe que $78 + 88 + 26 = 192$, que corresponde ao total pago.

Agora, tente o Exercício 18.

Problema 5. Números consecutivos

Somando três números consecutivos, obtém-se 66. Quais são esses números?

Solução.

Embora não saibamos o valor dos números, sabemos que eles são consecutivos. Assim, se definimos a variável

$$x = \text{menor número}.$$

os outros dois números valerão $(x + 1)$ e $(x + 2)$.

Obteríamos um problema ainda mais simples se escolhêssemos x como o número intermediário.

Uma vez que os três números somam 66, temos a equação

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 66.$$

A resolução dessa equação é dada abaixo.

$$\begin{aligned} x + (x + 1) + (x + 2) &= 66 \\ 3x + 3 &= 66 \\ 3x &= 63 \\ x &= 63/3 \\ x &= 21. \end{aligned}$$

Assim, o menor dos três números é 21, e os demais são 22 e 23.

Agora, tente o Exercício 24.

Exercícios 2.4

1. O vencedor de um programa de TV é escolhido em uma eleição que envolve os votos de um júri e votos de espectadores, pela internet. Para calcular a nota de um candidato, multiplica-se a nota do júri por 3 e a nota média dos espectadores por 2. Em seguida, soma-se esses produtos e divide-se o resultado por 5.
   a) Escreva uma equação que forneça a nota final de um candidato, F, em relação à nota do júri, J, e à nota média dos espectadores, E.
   b) Sabendo que Jennifer recebeu 8,5 do júri e que ficou com nota final 8,9, determine quanto ela recebeu dos espectadores.
2. Um eletricista precisa cortar um fio de 6 m de comprimento em dois pedaços, de modo que um tenha 40 cm a menos que o triplo do outro. Qual deve ser o comprimento de cada pedaço de fio?
3. Somando os salários, um casal recebe R$ 1760 por mês. Se a mulher ganha 20% a mais que o marido, quanto cada um recebe mensalmente?
4. A largura (l) de um terreno retangular é igual a um terço da profundidade (p). Se o perímetro do terreno é igual a 120 m, determine suas dimensões. (Lembre-se que o perímetro do terreno é igual a $2l + 2p$).
5. Raul e Marcelo passaram alguns meses guardando dinheiro para comprar uma bicicleta de R$ 380,00. Ao final de 6 meses, os dois irmãos haviam juntado o mesmo valor, mas ainda faltavam R$ 20,00 para pagar a bicicleta. Determine quanto dinheiro cada um conseguiu poupar.
6. Quando nasci, minha mãe tinha 12 cm a mais que o triplo de minha altura. Se minha mãe tem 1,68 m, como àquela época, com que altura eu nasci?
7. Fernanda e Maria têm, respectivamente, 18 e 14 anos. Daqui a quantos anos a soma das idades das duas atingirá 60 anos?
8. Francisco, de 49 anos, é pai de Luísa, que tem apenas 13. Daqui a quantos anos Francisco terá o dobro da idade da filha?
9. Em um torneio de tênis, são distribuídos prêmios em dinheiro para os três primeiros colocados, de modo que o prêmio do segundo colocado é a metade do prêmio do primeiro, e o terceiro colocado ganha a metade do que recebe o segundo. Se são distribuídos R$ 350.000,00, quanto ganha cada um dos três premiados?
10. Às vésperas da páscoa, um supermercado cobrava, pelo ovo de chocolate com 500g, exatamente o dobro do preço do ovo de 200g. Se João pagou R$ 105,00 para levar 2 ovos de 500g e 3 ovos de 200g, quanto custava cada ovo?
11. Em uma partida de basquete, todos os 86 pontos de um time foram marcados por apenas três jogadores: Adão, Aldo e Amauri. Se Adão marcou 10 pontos a mais que Amauri e 9 pontos a menos que Aldo, quantos pontos cada jogador marcou?
12. Em uma sala há uma lâmpada, uma televisão [TV] e um aparelho de ar condicionado [AC]. O consumo da lâmpada equivale a 2/3 do consumo da TV e o consumo do AC equivale a 10 vezes o consumo da TV. Se a lâmpada, a TV e o AC forem ligados simultaneamente, o consumo total de energia será de 1,05 kWh. Qual é o consumo, em kWh, da TV?
13. Lúcio gastou R$ 12,00 comprando três bombons: um "clássico", um de amêndoas e um de cereja. Sabendo que o bombom de amêndoas custa 5/4 do preço do clássico e que o de cereja custa 3/2 do valor do clássico, determine o preço de cada bombom que Lúcio comprou.
14. Para se obter a nota final da disciplina Cálculo 1, multiplica-se por 3 as notas da primeira e da segunda prova, e por 4 a nota da terceira prova. Em seguida, esses produtos são somados e o resultado é dividido por 10. O aluno é aprovado se obtém nota final maior ou igual a 5.
   a) Escreva uma fórmula para a nota final de Cálculo 1, usando as variáveis p_1, p_2 e p_3 para indicar as notas das provas.
   b) Se Marilisa tirou 6 na primeira e 5 na segunda prova, que nota ela precisa tirar na última prova para ser aprovada na disciplina?
15. Em virtude da interdição de uma ponte, os motoristas que transitavam por um trecho de estrada tiveram que percorrer um desvio com 52 km. Se esse desvio era 8 km maior que o dobro do comprimento do trecho interditado, qual o comprimento do trecho original da estrada?
16. Uma pesquisa com 720 crianças visava determinar, dentre duas marcas de refrigerante sabor cola, qual era a favorita da garotada. Se a marca A teve apenas 3/5 dos votos da marca B. Quantos votos recebeu cada marca de refrigerante?
17. Uma companhia de telefonia móvel cobra R$ 4,50 por mês por um pacote de 100 torpedos. Para cada torpedo adicional enviado no mesmo mês, a companhia cobra R$ 0,07. Se a conta telefônica mensal de Alex inclui R$ 6,95 em torpedos, quantas mensagens ele enviou?
18. Mariana, Luciana e Fabiana gastaram, juntas, R$ 53,00 em uma lanchonete. Mariana, a mais faminta, comeu uma sobremesa, gastando R$ 5,00 a mais que Luciana. Por sua vez, Fabiana, de regime, pagou apenas 2/3 do valor gasto por Luciana. Quanto cada uma das amigas desembolsou na lanchonete?

19. Marisa gastou R$ 600 para comprar 14 cartuchos de tinta preta e 8 cartuchos coloridos. Sabendo que cada cartucho colorido custa 25% a mais que um cartucho preto, determine o preço de cada cartucho.

20. João pagava R$ 80,00 por mês por um "pacote" de acesso à internet. A partir de determinado dia do último mês, a assinatura do pacote teve um aumento de 5%. Supondo que o custo mensal do pacote tenha sido de R$ 82,40, e que o mês tenha 30 dias, determine a partir de que dia a conta ficou mais cara.

21. Lucas, Rafael e Pedro gastaram, juntos, R$ 386,00 comprando peças para seus skates. Quem mais gastou foi Lucas, que desembolsou R$ 50,00 a mais que Pedro. Por sua vez, Rafael, o mais econômico, só gastou 40% do valor pago por Pedro. Quanto gastou cada skatista nessa compra?

22. Roberto, Rogério e Renato compraram, juntos, 1000 kg de fertilizantes. Se Roberto comprou 50% a mais que Rogério e Renato comprou 50 kg a menos que Rogério, quantos quilos de fertilizante cada um comprou?

23. Ana, Lúcia e Teresa postaram 170 mensagens nas redes sociais no último mês. Teresa postou 20 mensagens a mais que Ana. Já Lúcia postou o triplo do número de mensagens de Ana. Quantas mensagens cada uma postou no mês?

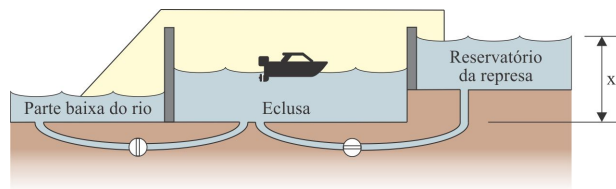
24. Somando três números pares consecutivos, obtemos 828. Quais são tais números?

25. Trabalhando em uma loja de roupas, Gláucia recebe R$ 1200,00 de salário fixo, além de uma comissão de R$ 0,08 para cada real vendido. Se, no mês passado, Gláucia recebeu R$ 2146,00 de salário, quantos reais em roupas ela conseguiu vender?

26. Joana ganha R$5,00 por hora para trabalhar 44 horas por semana. Para cada hora extra trabalhada, Joana recebe 50% a mais que em seu horário regular. Em uma determinada semana, Joana recebeu R$ 280,00. Determine quantas horas extras Joana trabalhou nessa semana.

27. Ao adquirir um produto importado, Joel pagou 10% de seu valor para cobrir despesas de transporte. Sobre o custo (incluindo o transporte), o governo ainda cobrou 60% de imposto de importação. Se Joel pagou R$ 484,00 e o dólar estava cotado a R$ 2,20, qual era o preço em dólares do produto?

28. Mariana gastou 1/4 do dinheiro que possuía comprando um telefone celular. Do dinheiro que restou, Mariana gastou 16% adquirindo livros escolares. Sabendo que, depois das compras, ela ainda possuía R$ 1134,00, determine o montante que Mariana tinha antes das compras, bem como o montante gasto com os livros.

29. Uma eclusa é um "elevador" de navios, como mostra a figura abaixo.

Ao lado de uma barragem do rio Tietê, existe uma eclusa que permite que navios que estão na parte baixa do rio, cuja profundidade média naquele ponto é de 3 metros, subam ao nível d'água do reservatório, e vice-versa. Sabendo que a eclusa tem o formato de um paralelepípedo com 145 metros de comprimento e uma largura de 12 metros, e que são adicionados 41760 m^3 de água para que um navio suba da parte baixa do rio ao nível do reservatório da barragem, calcule

a) A altura do nível d'água no reservatório da represa, com relação ao fundo do rio em sua parte baixa (ou seja, a altura x indicada na figura). Dica: o volume do paralelepípedo é o produto da altura pela largura pela profundidade.

b) O tempo gasto, em minutos, para "levantar" um navio, sabendo que a eclusa é enchida a uma taxa de 46,4 m^3 por segundo.

30. Ao fabricar 80 litros de *polpalact*, um engenheiro de alimentos utilizou 90% de *purapolpa*, completando o volume com o derivado de leite *lactosex*.

a) Quantos litros de purapolpa e de lactosex foram usados pelo engenheiro?

b) Após testar a concentração, o engenheiro resolveu acrescentar apenas lactosex ao produto, a fim de que a quantidade de purapolpa ficasse reduzida a 60% da mistura final. Quantos litros de lactosex foram acrescentados e qual a quantidade de litros finalmente produzida com esse acréscimo?

Respostas dos Exercícios 2.4

1. $F = \frac{3J+2E}{5}$. $E = 9{,}5$

2. 1,6 m e 4,4 m

3. A mulher recebe R$ 960,00, e o marido R$ 800,00.

4. O terreno tem 15 m × 45 m.

5. Cada um poupou R$ 180,00.

6. Nasci com 52 cm.

7. Daqui a 14 anos.

8. Daqui a 23 anos.

9. O terceiro colocado ganha R$ 50.000,00, o segunda ganha R$ 100.000,00 e o campeão leva R$ 200.000,00.

10. O ovo de 200g custava R$ 15,00 e o de 500g custava R$ 30,00.

11. Adão marcou 29, Amauri 19 e Aldo 38 pontos.

12. 0,09 kWh

13. Lucas pagou R$ 3,20 pelo bombom clássico, R$ 4,00 pelo de amêndoas e R$ 4,80 pelo de cereja.

14. $\frac{3p_1+3p_2+4p_3}{10}$. Marilisa precisa tirar 4,25.

15. 22 km

16. A marca A obteve 270 votos e a marca B alcançou 450 votos.

17. 35 mensagens

18. Fabiana gastou R$ 12,00, Luciana gastou R$ 18,00 e Mariana gastou R$ 23,00.

19. Cartucho preto: R$25,00. Cartucho colorido: R$ 31,25.

20. A partir do dia 13.

21. Pedro gastou R$ 140,00, Lucas gastou R$ 190,00 e Rafael gastou R$ 56,00.

22. Rogério comprou 300 kg, Roberto comprou 450 kg e Renato comprou 250 kg.

23. Ana enviou 30 mensagens, Lúcia outras 90 e Teresa mais 50 mensagens.

24. 274, 276 e 278

25. R$ 11.825,00

26. Joana trabalhou 8 horas extras.

27. US$ 125

28. Mariana possuía R1800,00$egastouR$ 216,00 comprando livros.

29. a) 27 m b) 15 min

30. a) 72 l de purapolpa e 8 l de lactosex.
b) 48 l de lactosex, perfazendo um volume de 120 l de polpalact.

2.5 Sistemas de equações lineares

Quando afirmamos que

"os alunos e alunas da turma de matemática básica somam 120 pessoas,"

estamos relacionando duas quantidades: o número de homens e o número de mulheres da turma. Vejamos como é possível expressar matematicamente a relação que existe entre esses números.

Como nenhuma das quantidades é conhecida, associamos a elas as incógnitas

$$x = \text{número de alunas;}$$
$$y = \text{número de alunos.}$$

De posse dessas variáveis, podemos converter a frase acima na equação

$$x + y = 120.$$

Observe que, diferentemente do que vimos até agora, a equação acima tem duas variáveis, embora ainda seja linear. Façamos uma definição mais formal desse tipo de equação.

Você sabia?
Como veremos na Seção 3.2, também é comum apresentar equações lineares na forma $y = mx + d$.

Equação linear em duas variáveis

Uma equação nas variáveis x e y é dita **linear** se é equivalente a

$$ax + by = c,$$

em que a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Outros exemplos de equações lineares em duas variáveis são dados abaixo.

Converta as equações ao lado à forma $ax + by = c$, para comprovar que são, de fato, equações lineares.

$$2x = 12 + 3y \qquad -1{,}6x + 4{,}5y = -3{,}2$$

$$35 - 7y = 10x \qquad 12 - 8y + 5x = 0$$

$$\frac{x}{2} - \frac{5y}{3} = 4 \qquad -y = \frac{6x - 9}{4}$$

Voltando aos alunos e alunas da turma de matemática, observamos que, sozinha, a equação $x + y = 120$ não nos permite determinar os valores de x e y, uma vez que a turma poderia ter 100 alunas e 20 alunos, ou 60 alunas e 60 alunos, ou qualquer outra combinação de números inteiros não negativos cuja soma fosse 120.

Para que x e y tenham valores únicos, é necessário definir outra relação entre essas quantidades. Por exemplo, se soubermos que a diferença entre o número de alunas e alunos da turma é igual a 8, então também podemos escrever

$$x - y = 8,$$

de modo que, agora, temos o **sistema de duas equações lineares**

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

A solução de um sistema como esse é o par de valores reais, x e y, que satisfaz as duas equações. Para o sistema acima, a solução é dada por $x = 64$ e $y = 56$, o que pode ser comprovado substituindo-se esses valores nas equações, conforme descrito abaixo.

$$\begin{aligned} x + y &= 120 && \text{Equação 1.} \\ 64 + 56 &= 120 && \text{Substituição dos valores de } x \text{ e } y. \\ 120 &= 120 && \text{Ok. A equação foi satisfeita.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 8 && \text{Equação 2.} \\ 64 - 56 &= 8 && \text{Substituição dos valores de } x \text{ e } y. \\ 8 &= 8 && \text{Ok. A equação foi satisfeita.} \end{aligned}$$

Há várias formas de se obter a solução de um sistema de equações lineares. A mais simples delas é o método da substituição, que apresentamos a seguir.

■ O método da substituição

Consideremos, mais uma vez, o sistema associado ao problema dos alunos e alunas de matemática:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

Vamos imaginar, por um momento, o que aconteceria se conhecêssemos o valor de y. Nesse caso, poderíamos obter o valor de x isolando essa variável na primeira equação:

$$\begin{aligned} x + y &= 120 && \text{Equação 1.} \\ x + y - y &= 120 - y && \text{Subtração de } y \text{ dos dois lados.} \\ x &= 120 - y && x \text{ isolado.} \end{aligned}$$

Embora essa equação tenha sido escrita imaginando que conhecemos y, podemos usá-la para substituir o valor encontrado para x na segunda equação do sistema:

$$\begin{aligned} x - y &= 8 && \text{Equação 2.} \\ (120 - y) - y &= 8 && \text{Substituição de } x \text{ por } 120 - y. \\ 120 - 2y &= 8 && \text{Equação que só depende de } y. \end{aligned}$$

Pronto! Obtivemos uma equação que só depende de y, de modo que podemos resolvê-la usando a estratégia apresentada na Seção 2.4:

$$\begin{aligned} 120 - 2y &= 8 && \text{Equação em } y. \\ 120 - 120 - 2y &= 8 - 120 && \text{Subtração de 120.} \\ -2y &= -112 && \text{Equação simplificada.} \\ \frac{-2y}{-2} &= \frac{-112}{-2} && \text{Divisão por } -2. \\ y &= 56 && \text{Solução da equação.} \end{aligned}$$

Agora que conhecemos y, podemos voltar à equação em que x foi isolado, para obter o valor dessa variável:

$$x = 120 - y \qquad \text{Equação com } x \text{ isolado.}$$

$$x = 120 - 56 \qquad \text{Substituição de } y \text{ por 56.}$$

$$x = 64 \qquad \text{Solução da equação.}$$

Portanto, a turma tem 64 meninas e 56 meninos. Vamos resumir em um quadro os passos que adotamos para encontrar a solução do sistema de equações lineares.

Método da substituição

1. Escolha uma das equações e isole nela uma das variáveis.
Ex: $x = 120 - y$.

2. Na outra equação, substitua a variável que foi isolada no Passo 1 pela expressão encontrada nesse mesmo passo.
Ex: $x - y = 8 \quad \Rightarrow \quad (120 - y) - y = 8$.

3. Resolva a equação resultante para encontrar o valor da segunda variável.
Ex: $120 - 2y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 56$.

4. Substitua o valor encontrado no Passo 3 na expressão obtida no Passo 1, para determinar a primeira variável.
Ex: $x = 120 - y \quad \Rightarrow \quad x = 120 - 56 = 64$.

5. Confira se a solução encontrada satisfaz as duas equações.
Ex: $64 + 56 = 120$ e $64 - 56 = 8$. Ok!

Problema 1. Produção de bolos

Uma confeitaria produz dois tipos de bolos de festa. Cada quilograma do bolo do tipo A consome 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg de farinha. Por sua vez, o bolo do tipo B exige 0,2 kg de açúcar e 0,3 kg de farinha para cada quilograma produzido. Sabendo que, no momento, a confeitaria dispõe de 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha, responda às questões abaixo.

a) Será que é possível produzir 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B?

b) Quantos quilogramas de bolo do tipo A e de bolo do tipo B devem ser produzidos se a confeitaria pretende gastar toda a farinha e todo o açúcar de que dispõe?

Solução.

a) Para produzir 7 kg de bolo do tipo A é preciso dispor de $7 \times 0{,}4 = 2{,}8$ kg de açúcar e $7 \times 0{,}2 = 1{,}4$ kg de farinha.

Já os 18 kg de bolo do tipo B exigem $18 \times 0{,}2 = 3{,}6$ kg de açúcar e $18 \times 0{,}3 = 5{,}4$ kg de farinha.

Assim, na produção dos dois tipos de bolo são consumidos $2{,}8 + 3{,}6 = 6{,}4$ kg de açúcar e $1{,}4 + 5{,}4 = 6{,}8$ kg de farinha. Como a confeitaria só dispõe de 6 kg de farinha, não é possível produzir a quantidade desejada dos bolos.

b) Definamos as variáveis

x = quantidade produzida do bolo A (em kg);

y = quantidade produzida do bolo B (em kg).

O consumo de açúcar com a produção dos dois tipos de bolo é dado pela expressão

$$\underbrace{0{,}4}_{\substack{\text{kg açúcar}\\ \text{p/ kg bolo A}}} \cdot \underbrace{x}_{\text{kg bolo A}} + \underbrace{0{,}2}_{\substack{\text{kg açúcar}\\ \text{p/ kg bolo B}}} \cdot \underbrace{y}_{\text{kg bolo B}}$$

Da mesma forma, o gasto de farinha é fornecido por

$$\underbrace{0{,}2}_{\substack{\text{kg farinha}\\ \text{p/ kg bolo A}}} \cdot \underbrace{x}_{\text{kg bolo A}} + \underbrace{0{,}3}_{\substack{\text{kg farinha}\\ \text{p/ kg bolo B}}} \cdot \underbrace{y}_{\text{kg bolo B}}$$

Supondo que a confeitaria gastará todo o açúcar e toda a farinha que possui, podemos igualar as expressões acima às quantidades disponíveis, obtendo o sistema

$$\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}2y = 10 \\ 0{,}2x + 0{,}3y = 6. \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, começamos isolando x na primeira equação:

$$0{,}4x + 0{,}2y = 10 \quad \text{Primeira equação.}$$

$$0{,}4x + 0{,}2y - 0{,}2y = 10 - 0{,}2y \quad \text{Subtração de } 0{,}2y.$$

$$0{,}4x = 10 - 0{,}2y \quad \text{Equação simplificada.}$$

$$\frac{0{,}4x}{0{,}4} = \frac{10 - 0{,}2y}{0{,}4} \quad \text{Divisão por } 0{,}4.$$

$$x = 25 - 0{,}5y \quad x \text{ isolado.}$$

Agora, substituímos a expressão encontrada para x na segunda equação:

$$0{,}2x + 0{,}3y = 6 \quad \text{Segunda equação.}$$

$$0{,}2(25 - 0{,}5y) + 0{,}3y = 6 \quad \text{Substituição de } x \text{ por } 25 - 0{,}5y.$$

$$5 - 0{,}1y + 0{,}3y = 6 \quad \text{Propriedade distributiva.}$$

$$5 + 0{,}2y = 6 \quad \text{Equação em } y.$$

Tendo obtido uma equação que só depende de y, determinamos essa variável:

$$5 - 5 + 0{,}2y = 6 - 5 \quad \text{Subtração de 5.}$$

$$0{,}2y = 1 \quad \text{Equação simplificada.}$$

$$\frac{0{,}2y}{0{,}2} = \frac{1}{0{,}2} \quad \text{Divisão por } 0{,}2.$$

$$y = 5 \quad \text{Valor de } y.$$

De posse de y, encontramos o valor de x usando a equação encontrada no primeiro passo:

$$x = 25 - 0{,}5y \quad \text{Equação obtida no Passo 1.}$$

$$x = 25 - 0{,}5(5) \quad \text{Substituição de } y.$$

$$x = 22{,}5 \quad \text{Valor de } x.$$

Portanto, a confeitaria deve produzir 22,5 kg de bolo do tipo A e 5 kg de bolo do tipo B. Entretanto, ainda precisamos nos certificar de que o resultado está correto substituindo os valores de x e y nas duas equações do sistema:

Atenção
Não deixe de conferir suas respostas. Uma pequena distração, como uma troca de sinal, é suficiente para produzir falsos resultados.

$$
\begin{aligned}
0{,}4x + 0{,}2y &= 10 && \text{Primeira equação.}\\
0{,}4(22{,}5) + 0{,}2(5) &= 10 && \text{Substituição de } x \text{ e } y.\\
9 + 1 &= 10 && \text{Cálculo dos termos.}\\
10 &= 10 && \text{Ok! A primeira equação foi satisfeita.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0{,}2x + 0{,}3y &= 6 && \text{Segunda equação.}\\
0{,}2(22{,}5) + 0{,}3(5) &= 6 && \text{Substituição de } x \text{ e } y.\\
4{,}5 + 1{,}5 &= 6 && \text{Cálculo dos termos.}\\
6 &= 6 && \text{Ok! A segunda equação foi satisfeita.}
\end{aligned}
$$

Agora, tente os Exercícios 2 e 4.

Vários exercícios propostos na Seção 2.4 podem ser modelados com o emprego de sistemas lineares. Vejamos como isso pode ser feito para o Exercício 2, no qual um eletricista precisa cortar um fio.

Problema 2. Corte de fio

Um eletricista precisa cortar um fio de 6 m de comprimento em dois pedaços, de modo que um tenha 40 cm a menos que o triplo do outro. Qual deve ser o comprimento de cada pedaço de fio?

Solução.

O objetivo do problema é a determinação do comprimento dos dois pedaços de fio, que representaremos por meio das variáveis x e y, para as quais adotaremos como unidade o metro (m).

Observe que, como o fio possui 6 m de comprimento total, podemos escrever

$$x + y = 6.$$

Além disso, para que um pedaço fio tenha 40 cm (ou 0,4 m) a menos que o triplo do outro, é preciso que

$$x = 3y - 0{,}4.$$

Assim, podemos determinar x e y resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x = 3y - 0{,}4 \end{cases}$$

Esse sistema de equações lineares difere dos sistemas vistos até aqui apenas pelo fato de que a variável x já está isolada, de modo que podemos substituí-la diretamente na primeira equação. Desta forma, temos

$$(3y - 0{,}4) + y = 6 \quad \Rightarrow \quad 4y = 6{,}4 \quad \Rightarrow \quad y = 1{,}6.$$

Uma vez conhecido o valor de y, encontramos x usando a segunda equação:

$$x = 3y - 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \cdot 1{,}6 + 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}4.$$

Logo, um pedaço de fio deve medir 1,6 m, e o outro deve ter 4,4 m.

Conferindo a resposta
Substituindo $x = 4{,}4$ e $y = 1{,}6$ nas equações, obtemos

$$
\begin{aligned}
4{,}4 + 1{,}6 &= 6\\
6 &= 6 \quad \text{Ok!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4{,}4 &= 3(1{,}6) - 0{,}4\\
4{,}4 &= 4{,}8 - 4{,}4\\
4{,}4 &= 4{,}4 \quad \text{Ok!}
\end{aligned}
$$

Para terminar essa seção, resolveremos um exemplo numérico de uma vez, ou seja, sem pausas.

Exemplo 3. Sistema com duas equações

Vamos aplicar o método da substituição à solução do sistema

$$\begin{cases} 6x + 5y = 24 \\ 8x - y = 9 \end{cases}$$

A título de ilustração, adotaremos uma estratégia diferente daquela empregada até o momento, e iniciaremos a resolução isolando y na segunda equação.

$8x - y = 9$	Equação 2.
$8x - y + y = 9 + y$	Adição de y dos dois lados.
$8x = 9 + y$	Equação simplificada.
$8x - 9 = 9 - 9 + y$	Subtração de 9.
$8x - 9 = y$	y isolado.
$6x + 5(8x - 9) = 24$	Substituição de y na Equação 1.
$6x + 40x - 45 = 24$	Propriedade distributiva.
$46x - 45 = 9$	Equação simplificada.
$46x - 45 + 45 = 24 + 45$	Adição de 45.
$46x = 69$	Equação simplificada.
$\frac{46x}{46} = \frac{69}{46}$	Divisão por 46.
$x = \frac{3}{2}$	Valor de x.
$y = 8\left(\frac{3}{2}\right) - 9$	Substituição de x.
$y = 3$	Valor de y.

Conferindo a resposta

Substituindo $x = 3/2$ e $y = 3$ nas equações, obtemos

$$6(3/2) + 5(3) = 24$$
$$9 + 15 = 24$$
$$24 = 24 \quad \text{Ok!}$$

$$8(3/2) - (3) = 9$$
$$12 - 3 = 9$$
$$9 = 9 \quad \text{Ok!}$$

A solução do sistema é dada por $x = 3/2$ e $y = 3$.

Agora, tente o Exercício 1.

Nem todo sistema de equações lineares possui uma solução única, como os que vimos nessa seção. Há desde sistemas insolúveis até sistemas com infinitas soluções. Retornaremos a esse assunto no segundo volume, no qual apresentaremos, inclusive, outras formas de resolução de sistemas, como o método gráfico e o processo de eliminação de Gauss.

Exercícios 2.5

1. Resolva os sistemas abaixo usando o método da substituição.

a)

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 6x + 2y = 19 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ -3x + 4y = 8 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} -7x + y = 8 \\ 8x - 2y = -4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} -4x + 5y = -12 \\ 3x - 8y = -8 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x/2 + y/4 = 2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 4x - 6y = 20 \\ x/3 - 3y/2 = 1 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} x/3 + y/2 = 3/2 \\ 3x/2 - 5y/6 = 16 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 0{,}5x + 3{,}6y = 12 \\ -2{,}5x + 2{,}0y = 0 \end{cases}$$

2. Em um sistema de piscicultura superintensiva, uma grande quantidade de peixes é cultivada em tanques com alta densidade populacional e alimentação à base de ração. Suponha que um conjunto de tanques contenha 600 peixes de duas espécies e que, juntos, os peixes consumam 800 g de ração por refeição. Sabendo que um peixe da espécie A consome 1,5 g de ração por refeição e que um peixe da espécie B consome 1,0 g por refeição, calcule quantos peixes de cada espécie os tanques abrigam.

3. Uma banda juvenil conseguiu vender todos os 5.000 ingressos de seu próximo show, que será realizado em um ginásio de esportes. Os preços dos ingressos foram definidos de acordo com a distância ao palco. Para os fãs mais tranquilos, a cadeira numerada custou R$ 160,00. Já quem queria ver a banda realmente de perto teve que desembolsar R$ 360,00 por um cadeira de pista. Sabendo que a renda do show alcançou R$ 900.000,00; determine quantos ingressos de cada tipo foram vendidos.

4. Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme descrito na tabela abaixo.

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.

5. Robson pretende investir R$ 6.500,00 em duas aplicações financeiras. A primeira, embora mais arriscada, fornece um retorno anual de 8%. Já a segunda é mais segura, mas tem taxa de retorno de apenas 5% ao ano. Quanto Robson deve investir em cada aplicação, se pretende lucrar exatos R$ 400,00 ao ano? Dica: escreva um sistema no qual a primeira equação esteja relacionada ao valor total investido, e a segunda descreva como obter o retorno desejado por Robson.

6. Uma doceira vende dois tipos de bombons: o normal e o trufado. Cada bombom normal custa R$ 2,00, enquanto o trufado sai por R$ 3,00 a unidade. Ontem, a doceira vendeu 200 bombons e obteve R$ 460,00. Quantos bombons de cada tipo foram vendidos?

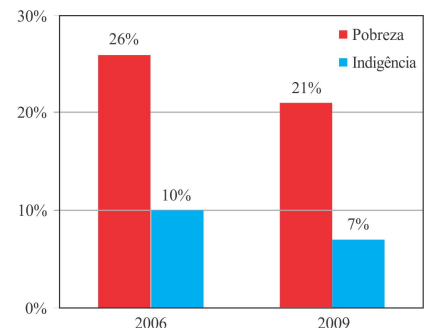
7. Um desinfetante é vendido em embalagens de 5 e 8 litros. Se João comprou 27 embalagens, totalizando 174 litros, quantas embalagens de cada tipo ele comprou?

8. Em um complexo de salas de cinema, há um dia da semana em que os ingressos têm preços reduzidos, conforme a tabela.

Categoria	Preço (R$)
Inteira	15,00
Meia	7,50

Sabendo que, em uma determinada sessão desse dia, foram ocupados 240 lugares e foram arrecadados R$ 2370,00, calcule o número de espectadores de cada categoria de ingresso.

9. Um joalheiro produziu 10 g de uma liga composta por x gramas de ouro e y gramas de prata. Sabe-se que cada grama de ouro custou R$ 120,00, cada grama de prata custou R$ 16,00, e que o joalheiro gastou R$ 940,00 para comprar os dois metais. Escreva um sistema linear que permita determinar x e y e, resolvendo o sistema, determine quanto o joalheiro comprou de ouro e prata.

10. Um órgão governamental de pesquisa divulgou que, entre 2006 e 2009, cerca de 5,2 milhões de brasileiros saíram da condição de indigência. Nesse mesmo período, 8,2 milhões de brasileiros deixaram a condição de pobreza. Observe que a faixa de pobreza inclui os indigentes. O gráfico abaixo mostra os percentuais da população brasileira enquadrados nessas duas categorias, em 2006 e 2009.

Resolvendo um sistema linear, determine a população brasileira em 2006 e em 2009.

11. A lanchonete NatureBar oferece dois tipos de lanches com acompanhamento: o casadinho A, que é um lanche quente acompanhado de uma lata de refrigerante, e o casadinho B, que é um sanduíche natural acompanhado de um suco de frutas. Três casadinhos A mais quatro

casadinhos B custam R$33,90 e quatro casadinhos A mais três casadinhos B custam R$33,30. Resolvendo um sistema linear, determine o custo de cada casadinho.

12. Ao fazer o cálculo do custo dos casadinhos, a lanchonete do exercício anterior considerou que o preço do refrigerante equivalia a 7/8 do preço do suco e que o preço do sanduíche natural correspondia a 9/8 do preço do lanche quente. Se mantiver as mesmas proporções e os mesmos preços, quanto a lanchonete cobrará por um novo casadinho composto pelo lanche quente e pelo suco?

13. Ana e Beatriz têm a mesma profissão, mas trabalham em empresas diferentes. Ana recebe R$ 2024,00 de salário fixo mensal, além de R$ 17,00 por hora-extra trabalhada. Já Beatriz tem um salário fixo de R$ 2123,00 pela mesma jornada de Ana, mas recebe apenas R$ 15,00 por hora-extra. No mês passado, Ana trabalhou 3 horas a mais que Beatriz, mas as duas receberam o mesmo valor no fim do mês. Resolvendo um sistema linear, determine quantas horas extras Ana e Beatriz fizeram no mês.

14. Um químico dispõe de duas soluções de água oxigenada, uma a 30% e outra a 3%, e deseja produzir 6 litros de uma solução a 12% (ou seja, haverá 0,72 l de água oxigenada nos 6 l de solução). Quantos litros devem ser usados de cada solução disponível?

Respostas dos Exercícios 2.5

1.
a) $x = 3/2,\ y = 5$
b) $x = 4,\ y = 5$
c) $x = -2,\ y = -6$
d) $x = 8,\ y = 4$
e) $x = 3,\ y = 2$
f) $x = 6,\ y = 2/3$
g) $x = 9,\ y = -3$
h) $x = 2{,}4;\ y = 3$

2. 400 peixes da espécie A e 200 peixes da espécie B.

3. 4.500 ingressos para as cadeiras numeradas e 500 ingressos para as cadeiras de pista.

4. 36 cebolas pequenas e 4 cebolas grandes.

5. Robson deve investir R$ 2.500,00 na primeira e R$ 4.000,00 na segunda aplicação.

6. 140 bombons normais e 60 trufados.

7. 14 embalagens de 5 litros e 13 de 8 litros.

8. 164 pessoas compraram a meia entrada e 76 pessoas compraram a inteira.

9. 7,5 g de outro e 2,5 g de prata.

10. 185 milhões em 2006 e 190 milhões em 2009.

11. O casadinho A custa R$ 4,50 e o casadinho B custa R$ 5,10.

12. A lanchonete cobrará R$ 4,80 pelo novo casadinho.

13. Ana trabalhou 27 horas além de seu expediente normal, enquanto Beatriz fez 24 horas-extras.

14. 2 litros da solução a 30% e 4 litros da solução a 3%.

2.6 Conjuntos

Nessa seção, apresentamos algumas definições associadas a conjuntos. Não é nosso objetivo esgotar o assunto, ou empregar o formalismo da teoria moderna de conjuntos, mas apenas descrever os conceitos práticos e intuitivos de que necessitaremos nesse e nos próximos capítulos.

> **Você sabia?**
> A definição de conjunto que adotamos nesse livro segue a *teoria ingênua dos conjuntos*, ou teoria Cantoriana, que teve início com o trabalho de Georg Cantor, em fins do século XIX. Essa teoria, embora menos formal que a *teoria axiomática dos conjuntos* desenvolvida no século XX, utiliza conceitos que parecem mais naturais e que são particularmente úteis para a compreensão dos tópicos que estudaremos.

Segundo a teoria Cantoriana, um **conjunto** nada mais é que uma coleção de membros, ou **elementos**, que compartilham certas características. Essa noção está de acordo com o conceito de conjunto empregado fora da matemática. De fato, definimos cotidianamente conjuntos, tais como:

- O conjunto dos pontos cardeais: Norte, Sul, Leste e Oeste.
- O conjunto dos planetas do sistema solar: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.
- O conjunto das cores primárias aditivas: azul, vermelho e amarelo.
- O conjunto das letras do alfabeto: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.
- O conjunto dos signos do zodíaco: Áries, Touro, Gêmeos, Câncer, Leão, Virgem, Libra, Escorpião, Sagitário, Capricórnio, Aquário e Peixes.
- O conjunto dos nomes de mulheres: Abigail, Acácia, Adalgisa, Adelaide, ...
- O conjunto das frequências audíveis pelo ser humano: de 20 Hz a 20.000 Hz.

Doravante, trataremos apenas dos conjuntos nos quais os elementos são números, como o último exemplo acima. Apesar de já termos mencionado os conjuntos numéricos no inicio do livro, só agora, ao tratarmos das soluções de equações e inequações, o significado de conjunto será realmente explorado.

Conjuntos são usualmente representados por letras maiúsculas. Quando o conjunto é enumerável, costuma-se descrevê-lo arrolando seus elementos entre chaves, como nos exemplos a seguir.

Alguns conjuntos, apesar de enumeráveis, são infinitos. Essa característica é indicada pela presença de reticências ao final da lista de elementos.

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (Conjunto dos cinco primeiros números naturais)
- $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ (Conjunto dos números ímpares)
- $C = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$ (Conjunto das potências de 2 maiores ou iguais a 1)
- $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (Conjunto dos divisores naturais de 12)

Observe que o número 4 é membro do conjunto A. Nesse caso, dizemos que 4 **pertence** a A, e representamos matematicamente esse fato usando a notação $4 \in A$. Por outro lado, também escrevemos $7 \notin A$, o que significa que o número 7 **não pertence** ao conjunto A, ou seja, que não é membro de A.

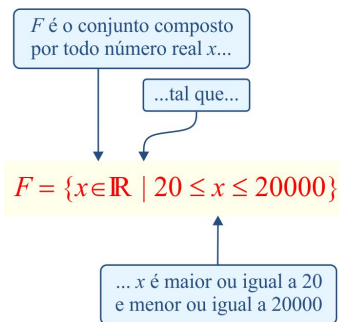
A maior parte dos conjuntos com os quais trabalhamos nesse livro não é enumerável, o que significa que não é possível representá-los como listas de elementos entre chaves. Felizmente, também podemos definir conjuntos com base nas propriedades que seus elementos devem satisfazer. Como exemplo, o conjunto A, cujos elementos são números naturais menores ou iguais a 5, pode ser definido por

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}.$$

Por sua vez, um conjunto F que forneça as frequências sonoras (em Hertz) audíveis pelo ser humano (que são números reais) é representado por

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x \leq 20.000\}.$$

Figura 2.7

A Figura 2.7 mostra a forma usual de se ler a definição do conjunto F. Note que todos os elementos do conjunto F são números reais. Entretanto, nem todo número real faz parte do conjunto, mas somente aqueles números que possuem uma característica adicional – são maiores ou iguais a 20 e menores ou iguais a 20.000. Nesse caso, dizemos que F é um **subconjunto** de $\mathbb{R}$.

Subconjunto

Um conjunto B é um **subconjunto** de um conjunto A se todo elemento de B for elemento de A. Nesse caso, dizemos que B *está contido* em A, ou que A *contém* B. Essa relação de continência é representada por

$$B \subset A \qquad \text{ou} \qquad A \supset B.$$

Exemplo 1. Subconjuntos

a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
O conjunto dos números inteiros é um subconjunto dos números reais.

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\} \subset \mathbb{Z}$
O conjunto dos números naturais ímpares é um subconjunto dos números inteiros.

c) $\{a, e, i, o, u\} \subset \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$
O conjunto das vogais é um subconjunto do alfabeto.

d) Se E é o conjunto dos estados brasileiros, então $\{RS, SC, PR\} \subset E$
Os estados da região sul formam um subconjunto dos estados brasileiros.

e) Se T é o conjunto dos triângulos e P é o conjunto dos polígonos, então $T \subset P$
Os triângulos formam um subconjunto dos polígonos.

Propriedades dos subconjuntos

Dados os conjuntos A, B e C, são válidas as seguintes propriedades:

1. $A \subset A$

2. $\varnothing \subset A$

3. Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$

4. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$

Exemplo 2. Enumerando subconjuntos

Dado o conjunto $\{a,b,c\}$, podemos escrever

$$\{a\} \subset \{a,b,c\} \qquad \{a,b\} \subset \{a,b,c\} \qquad \{a,b,c\} \subset \{a,b,c\}$$
$$\{b\} \subset \{a,b,c\} \qquad \{a,c\} \subset \{a,b,c\} \qquad \varnothing \subset \{a,b,c\}$$
$$\{c\} \subset \{a,b,c\} \qquad \{b,c\} \subset \{a,b,c\}$$

Você sabia?
Se C é um conjunto finito contendo n elementos, então C tem exatamente 2^n subconjuntos.

Observamos, assim, que o conjunto $\{a,b,c\}$ tem oito subconjuntos, dos quais três têm uma letra apenas e três têm duas letras. Os dois subconjuntos da coluna à direita são aqueles associados às propriedades 1 e 2 acima.

Agora, tente os Exercícios 5 e 7.

Exemplo 3. Propriedade antissimétrica

A terceira propriedade apresentada no quadro acima é denominada **propriedade antissimétrica**. Para dar um exemplo de como aplicá-la, vamos considerar os seguintes conjuntos de animais:

O neocórtex é uma área desenvolvida do córtex cerebral.

$$M = \{ \text{ Mamíferos } \},$$
$$N = \{ \text{ Animais com neocórtex } \}.$$

Os biólogos sabem que, se um animal é mamífero, então ele possui neocórtex. Em notação matemática, representamos essa relação por

$$M \subset N.$$

Os mamíferos fazem parte do conjunto de animais com neocórtex.

Por outro lado, todos os animais que têm neocórtex são maníferos, o que implica que

$$N \subset M.$$

Os animais com neocórtex fazem parte do conjunto de mamíferos.

Dessas duas afirmações, podemos concluir que o conjunto dos animais mamíferos é o mesmo conjunto formado pelos animais que possuem neocórtex, ou seja,

$$M = N.$$

"Mamíferos" e "Animais com neocórtex" formam o mesmo conjunto.

Logo, a classe dos mamíferos (animais com glândulas mamárias) também poderia ser conhecida como a classe dos animais que têm neocórtex.

Exemplo 4. Propriedade transitiva

Usemos novamente a biologia para ilustrar a propriedade 4 acima, também conhecida como **propriedade transitiva**.

Segundo os taxonomistas, a família dos Hominídeos – que inclui os seres humanos, os chimpanzés e os gorilas, dentre outros animais – faz parte da ordem dos Primatas. Por sua vez, a ordem dos Primatas faz parte da classe dos Mamíferos.

Usando, então, a notação

$$H = \{ \text{ Hominídeos } \};$$
$$P = \{ \text{ Primatas } \},$$
$$M = \{ \text{ Mamíferos } \},$$

podemos dizer que

$$H \subset P.$$

A família dos Hominídeos é um subconjunto da ordem dos Primatas.

$$P \subset M.$$

A ordem dos Primatas é um subconjunto da classe dos Mamíferos.

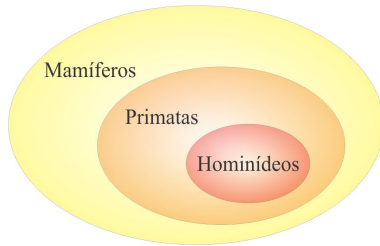



Figura 2.8: A classe dos Mamíferos contém a ordem dos Primatas, que contém a família dos Hominídeos.

Assim, se todo Hominídeo é Primata e todo Primata é Mamífero, é fácil concluir que todo Hominídeo é Mamífero, ou seja,

$$H \subset M.$$

A família dos Hominídeos é um subconjunto da classe dos Mamíferos.

A Figura 2.8 mostra a relação de continência entre M, P e H.

Para encerrar essa subseção, vamos definir a notação

$$B \not\subset A \qquad \text{ou} \qquad A \not\supset B,$$

que é usada para indicar que B não é um subconjunto de A, ou seja, que B *não está contido* em A, ou ainda que A *não contém* B.

Assim, supondo que H seja o conjunto dos Hominídeos e R seja o conjunto dos Répteis, podemos dizer que

$$H \not\subset R.$$

■ União e interseção de conjuntos

Imagine que, para preencher um posto no exterior, uma empresa queira contratar pessoas que saibam falar inglês. No processo de seleção, a empresa exige que os interessados na vaga tenham feito ao menos cinco anos de curso de inglês **ou** tenham morado um ano em países de lingua inglesa.

Nesse caso, o conjunto de candidatos é formado por dois grupos: o das pessoas que fizeram cinco anos de curso e o das pessoas que moraram um ano no exterior. Podemos reunir esses grupos usando o conceito de união de conjuntos.

União de conjuntos

A **união** de dois conjuntos, A e B, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A *ou a* B. Essa união é representada por

$$A \cup B.$$

Logo, se definirmos os conjuntos

$$A = \{ \text{ Candidatos que fizeram cinco anos de curso de inglês } \};$$
$$B = \{ \text{ Candidatos que moraram um ano em países de língua inglesa } \};$$

Note que o conjunto $A \cup B$ contém todos os candidatos que fizeram curso de inglês ou moraram no exterior, incluindo as pessoas que têm as duas qualificações.

o conjunto de todos os candidatos à vaga na empresa será descrito por $A \cup B$.

Mudando de exemplo, consideremos agora que uma empresa deseje contratar engenheiros com disponibilidade para viajar a serviço. Nesse caso, o grupo de candidatos

será formado por pessoas que tenham, ao mesmo tempo, dois atributos: um diploma de engenheiro e disponibilidade para viajar. Para descrever o conjunto de pessoas aptas a assumir o cargo, usamos o conceito de interseção de conjuntos.

Interseção de conjuntos

A **interseção** de dois conjuntos, A e B, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem, ao mesmo tempo, a A *e a* B. Essa interseção é representada por

$$A \cap B.$$

Definindo, então, os conjuntos

$$A = \{\text{ Engenheiros }\};$$
$$B = \{\text{ Pessoas com disponibilidade para viajar }\};$$

o conjunto dos candidatos à vaga será definido por $A \cap B$.

Finalmente, vamos supor que queiramos encontrar o conjunto dos atletas que tenham sido, ao mesmo tempo, jogadores da seleção tahitiana e campeões mundiais de futebol. Nesse caso, infelizmente, como a seleção tahitiana jamais foi campeã mundial, e como um atleta não pode atuar por duas seleções diferentes, não há jogadores que satisfaçam as duas condições.

Quando dois conjuntos não têm elementos em comum, dizemos que sua interseção é vazia, ou que a interseção é o conjunto vazio.

Conjunto vazio

Um conjunto que não possui elementos é chamado **conjunto vazio**, e é representado pelo símbolo $\varnothing$.

A união e a interseção de conjuntos possuem algumas propriedades, as quais descrevemos no quadro abaixo.

Propriedades da união e da interseção

Suponha que A, B e C sejam conjuntos quaisquer.

	União	**Interseção**
1.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
3.	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
4.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Problema 5. União e interseção de conjuntos

Dados os conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 9\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad e \quad C = \{1, 3, 5, 7, 10\},$$

determine $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$.

Solução.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$
- $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
- $A \cap B = \{2, 4\}$
- $A \cap C = \{1, 3\}$
- $B \cap C = \varnothing$

Agora, tente os Exercícios 8 e 11.

Você sabia?
O diagrama de Venn recebe esse nome por ter sido criado pelo inglês John Venn, em 1880.

É comum representarmos a relação entre conjuntos finitos usando o **diagrama de Venn**. Nesse diagrama, cada conjunto é representado por uma região fechada do plano (por exemplo, uma circunferência), dentro da qual os elementos são apresentados. Além disso, os conjuntos que possuem interseção não vazia incluem uma região comum. A Figura 2.9 mostra o diagrama de Venn associado aos conjuntos do Problema 5.

Figura 2.9: Conjuntos do Problema 5.

Observando a Figura 2.9, reparamos que existem elementos do conjunto A que não pertencem a B. O conjunto de tais elementos é $\{1, 3, 9\}$. Conjuntos desse tipo recebem o nome de complemento relativo.

Complemento relativo

O complemento de um conjunto B com relação a um conjunto A é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. Em notação matemática, o **complemento relativo** (também chamado de diferença) é o conjunto definido por

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplo 6. Complemento relativo

Dados os conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6\} \quad e \quad C = \{1, 3\},$$

temos

a) $A \backslash B = \{1, 3\}$

b) $B \backslash A = \{6\}$

c) $A \backslash C = \{2, 4\}$

d) $C \backslash A = \varnothing$

e) $B \backslash C = \{2, 4, 6\}$

f) $C \backslash B = \{1, 3\}$

Agora, tente os Exercícios 14 e 15.

Algumas propriedades interessantes dos complementos relativos são dadas abaixo. A Figura 2.10 ilustra essas propriedades.

Algumas propriedades dos complementos relativos

Se A, B e C são conjuntos quaisquer, então

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$$

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

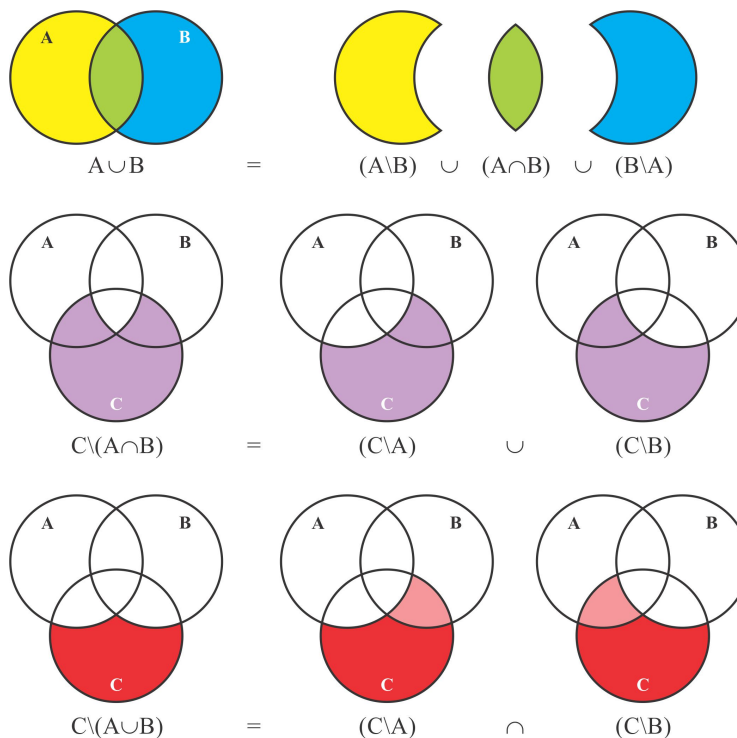



Figura 2.10: Propriedades dos complementos relativos.

Problema 7. Gosto musical

Seiscentos ouvintes de uma rádio sertaneja foram entrevistados, com o objetivo de descobrir seus subgêneros musicais favoritos. Dentre as pessoas consultadas, 360 disseram-se fãs do "sertanejo de raiz", e 320 afirmaram adorar o gênero "sertanejo universitário". Quantos ouvintes têm grande apreço por esses dois ramos da música?

Solução.

Nesse problema, vamos definir como T o conjunto de todos os entrevistados, R o conjunto dos ouvintes que gostam de música sertaneja de raiz e U o conjunto das pessoas a quem agrada o sertanejo universitário.

Observe que nada impede que algumas pessoas sejam fãs dos dois subgêneros da música sertaneja, de modo que a interseção dos conjuntos R e U pode não ser vazia. Vamos, então, dividir os ouvintes em três grupos distintos:

- $S = T \backslash U$ (aqueles que só gostam de música sertaneja de raiz);
- $V = T \backslash R$ (as pessoas que só ouvem o sertaneja universitário);

Figura 2.11: Conjuntos do Problema 7.

- $A = R \cap U$ (os ouvintes que gostam dos dois subgêneros).

A Figura 2.11 mostra um diagrama de Venn para esse problema, identificando os conjuntos R e U e seus subconjuntos S, V e A. Doravante, usaremos as letras minúsculas r, s, t, u, v, e a para representar o número de membros dos conjuntos R, S, T, U, V e A, respectivamente. Assim, nosso objetivo será encontrar o valor de a, o número de pessoas que gostam de ambos os tipos de música sertaneja.

Segundo o enunciado, há 360 ouvintes que gostam do "sertanejo de raiz", ou seja,

$$s + a = 360.$$

Da mesma forma, como 320 ouvintes gostam do "sertanejo universitário", escrevemos

$$v + a = 320.$$

Finalmente, sabemos que o total de ouvintes é igual a 600, de modo que

$$s + v + a = 600.$$

Isolando s na primeira e v na segunda equação, obtemos

$$s = 360 - a$$
$$v = 320 - a$$

Substituindo, agora, essas variáveis na terceira equação, concluímos que

$$(360 - a) + (320 - a) + a = 600,$$

que é equivalente a

$$680 - a = 600.$$

Resolvendo essa equação, obtemos $a = 80$, o que significa que 80 ouvintes gostam dos dois tipos de música sertaneja. Assim,

$$s = 360 - 80 = 280 \qquad \text{e} \qquad v = 320 - 80 = 260,$$

de modo que 280 pessoas só gostam de sertanejo de raiz e 260 pessoas só ouvem o sertanejo universitário.

Agora, tente os Exercícios 17 e 20.

Problema 8. Pesquisa eleitoral

A cidade de Cafundó está em polvorosa com a proximidade da eleição para prefeito, cargo que é desejado por três candidatos, que chamaremos de A, B e C para preservar suas identidades.

Segundo a pesquisa eleitoral mais recente, das 3000 pessoas entrevistadas,

i) 1506 declararam que votariam no candidato A;

ii) 1169 disseram que votariam no candidato B;

iii) 880 se dispuseram a votar no candidato C.

A pesquisa também indicou que, desses eleitores que declararam o voto,

iv) 324 votariam em A ou B;

v) 279 votariam em B ou C;

vi) 306 votariam em A ou C;

vii) 184 votariam em qualquer um dos candidatos.

Com base nesses dados, desejamos saber

a) Quantos eleitores estão decididas a votar no candidato A.

b) Quantos eleitores votariam em A ou B, mas não em C.

c) Quantos eleitores não votarão no candidato B.

d) Quantas pessoas já decidiram em quem votarão.

e) Quantas pessoas não pretendem votar em nenhum dos três candidatos.

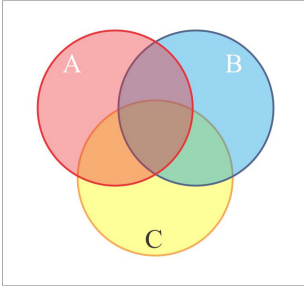



Figura 2.12: Conjuntos do Problema 8.

Solução.

A Figura 2.12 mostra os conjuntos dos eleitores de A, B e C. O retângulo em torno do diagrama de Venn representa o conjunto total de entrevistados, que inclui os eleitores que não pretendem votar em nenhum dos candidatos.

Note que os conjuntos dos eleitores de A, B e C têm interseção não vazia, já que há pessoas que ainda não se decidiram por um único candidato. Por esse motivo, vamos definir também

- n_A = número de eleitores que votariam exclusivamente em A;
- n_B = número de eleitores que votariam exclusivamente em B;
- n_C = número de eleitores que votariam exclusivamente em C;
- n_{AB} = número de eleitores que votariam somente em A ou B;
- n_{BC} = número de eleitores que votariam somente em B ou C;
- n_{AC} = número de eleitores que votariam somente em A ou C;
- n_{ABC} = número de eleitores que votariam em qualquer candidato;
- n_N = número de eleitores que não votariam em nenhum candidato.

Figura 2.13: Subconjuntos do diagrama de Venn e valores a eles associados.

Nosso objetivo é calcular os valores de todas essas oito variáveis, cada qual associada a um subconjunto de eleitores, conforme indicado na Figura 2.13.

Comparando as Figuras 2.12 e 2.13, notamos que o número de eleitores que se dispõem a votar no candidato A é igual a

$$n_A + n_{AB} + n_{AC} + n_{ABC},$$

sendo possível definir expressões análogas para os eleitores dos candidatos B e C. Da mesma forma, o número de eleitores que podem votar em A ou B é dado por

$$n_{AB} + n_{ABC}.$$

Identificar esses conjuntos é importante, pois eles estabelecem a relação entre os dados fornecidos pelo problema e as variáveis que queremos determinar. Recorrendo, então, ao item (vii) do enunciado, podemos concluir que

Para simplificar a resolução do problema, marcamos o valor de n_{ABC} no diagrama de Venn, como mostrado na Figura 2.14a.

$$n_{ABC} = 184.$$

Recorrendo, agora, aos itens (iv), (v) e (vi) do enunciado, descobrimos também que

$$n_{AB} + n_{ABC} = 324,$$
$$n_{BC} + n_{ABC} = 279,$$
$$n_{AC} + n_{ABC} = 306.$$

Seguindo a nossa estratégia, incluímos n_{AB}, n_{BC} e n_{AC} no diagrama de Venn (Figura 2.14b).

Substituindo, então, n_{ABC} por 184, obtemos

$$n_{AB} = 140, \qquad n_{NC} = 95 \qquad \text{e} \qquad n_{AC} = 122.$$

(a)

(b)

(c)

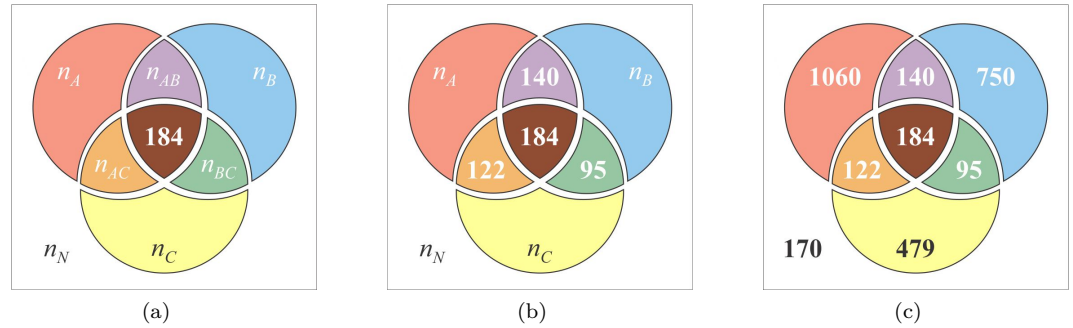



Figura 2.14: Três etapas de preenchimento do diagrama de Venn do Problema 8.

Para encontrar os valores de n_A, n_B e n_C, empregamos os itens (i), (ii) e (iii) do enunciado, que afirmam que

$$n_A + n_{AB} + n_{AC} + n_{ABC} = 1506,$$
$$n_B + n_{AB} + n_{BC} + n_{ABC} = 1169,$$
$$n_A + n_{AC} + n_{BC} + n_{ABC} = 880.$$

Assim, usando os valores conhecidos de n_{AB}, n_{BC}, n_{AC} e n_{ABC} (dados na Figura 2.14b), obtemos

$$n_A = 1060, \qquad n_B = 750 \qquad \text{e} \qquad n_C = 479.$$

Finalmente, usando o fato de que 3000 pessoas foram entrevistadas, determinamos n_N usando a equação

$$n_A + n_B + n_C + +n_{AB} + n_{BC} + n_{AC} + n_{ABC} + n_N = 3000.$$

Logo

$$n_N = 3000 - 1060 - 750 - 479 - 140 - 95 - 122 - 184 = 170.$$

Fdescreva

A Figura 2.14c mostra o diagrama de Venn com o número de membros de cada subconjunto. Com base nessa figura, concluímos que:

a) Dentre os eleitores de Cafundó, o número de pessoas que estão decididas a votar em A é dado por $n_A = 1060$.

b) Por sua vez, o número de eleitores que votariam em A ou B, mas não em C, corresponde a $n_{AB} = 140$.

c) Já as pessoas que não pretendem votar em B somam

$$3000 - 1169 = 1831,$$

que é a diferença entre o total de eleitores e o número de pessoas com disposição de votar em B.

Observe que esse valor também poderia ser obtido a partir da soma $n_A + n_C + n_{AC} + n_N$.

d) O número de pessoas que já decidiram em quem votarão é igual a

$$n_A + n_B + n_C = 1060 + 750 + 479 = 2289.$$

e) Por fim, não estão dispostas a votar nesses candidatos exatas $n_N = 170$ pessoas.

Agora, tente os Exercícios 21 e 23.

Problema 9. Funcionários especializados

Uma empresa tem 5000 funcionários. Desses, 48% têm mais de 30 anos, 36% são especializados e 1400 têm mais de 30 anos e são especializados. Quantos funcionários têm até 30 anos e não são especializados?

Solução.

Para resolver esse problema, vamos começar calculando o número de funcionários a que corresponde cada percentual do enunciado. Como a firma é composta por 5000 pessoas, constatamos que

$$0{,}48 \times 5000 = 2400 \text{ funcionários têm mais de 30 anos;}$$
$$0{,}36 \times 5000 = 1800 \text{ funcionários são especializados.}$$

Dividamos, agora, os funcionários em quatro conjuntos:

Observe que os conjuntos A, B, C e D têm interseção nula, ou seja, cada funcionário só pode pertencer a um desses conjuntos.

- A: pessoas com mais de 30 anos e especializadas;
- B: pessoas com mais de 30 anos e não especializadas;
- C: pessoas com, no máximo, 30 anos e especializadas;
- D: pessoas com, no máximo, 30 anos e não especializadas.

A Tabela 2.20 resume as informações do problema. Nela, o número de funcionários de cada grupo está indicado em vermelho. Valores desconhecidos são representados por $n(Conj)$.

Tabela 2.20: Número de funcionários dos conjuntos do Problema 9.

Idade	**Especialização**		**Total**
	Sim	**Não**	
$>$ **30**	A 1400	B $n(B)$	$A \cup B$ 2400
$\leq$ **30**	C $n(C)$	D $n(D)$	$C \cup D$ $n(C \cup D)$
Total	$A \cup C$ 1800	$B \cup D$ $n(B \cup D)$	$A \cup B \cup C \cup D$ 5000

Repare que, como A, B, C e D têm interseção nula, a última coluna da tabela fornece a soma dos valores das colunas anteriores. Da mesma forma, a última linha fornece a soma das linhas anteriores.

Nosso objetivo é calcular $n(D)$, o número de funcionários que pertencem ao conjunto D. Para determinar esse valor, vamos efetuar três passos:

1. Cálculo do número de membros do conjunto C:

$$n(C) = n(A \cup C) - n(A) = 1800 - 1400 = 400.$$

2. Cálculo do número de membros do conjunto $C \cup D$:

$$n(C \cup D) = N(A \cup B \cup C \cup D) - N(A \cup B) = 5000 - 2400 = 2600.$$

3. Cálculo do número de membros do conjunto D:

$$n(D) = N(C \cup D) - N(C) = 2600 - 400 = 2200.$$

Logo, a empresa tem 2200 funcionários sem especialização e com até 30 anos.

Agora, tente o Exercício 24.

O conjunto com o qual trabalharemos mais frequentemente nesse livro envolve números reais e é chamado de intervalo. Exploraremos esse tipo de conjunto na próxima seção.

Exercícios 2.6

1. Dado $S = \{0; -1; 3; \frac{2}{3}; 0{,}621; \sqrt{2}; -\frac{1}{5}; \pi\}$, encontre o conjunto formado

a) pelos números naturais de S;
b) pelos números inteiros de S;
c) pelos números racionais de S;
d) pelos números irracionais de S.

2. Forneça os conjuntos descritos pelas propriedades abaixo.

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é menor ou igual a $10\}$
b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é um divisor de $18\}$
c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é um múltiplo de $3\}$
d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ é maior que -6 e menor que $6\}$

3. Descreva cada um dos conjuntos abaixo por meio de uma propriedade.

a) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
b) $\{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$
c) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
d) $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 999\}$

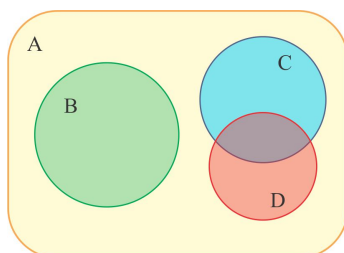
4. Dados os conjuntos

$$M = \{-10, 0, 10, 20\},\ N = \{10, 20\} \ \text{ e } \ P = \{0, 5, 10\}$$

verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras.

a) $-10 \in N$
b) $\frac{100}{5} \in M$
c) $5 \notin P$
d) $N \subset M$
e) $M \subset N$
f) $P \subset P$

5. Dados os conjuntos A, B, C e D da figura abaixo, indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

a) $A \subset B$
b) $A \supset B$
c) $\varnothing \subset B$
d) $\varnothing \supset B$
e) $A \supset C$
f) $B \subset C$
g) $D \subset D$
h) $D \subset C$
i) $C \not\supset A$
j) $B \not\subset A$
k) $D \not\supset B$
l) $D \not\supset \varnothing$

6. Tomando novamente por base a figura do Exercício 5, verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras.

a) $(C \cup D) \subset C$
b) $(C \cap D) \subset D$
c) $(C \cup D) \subset A$
d) $(C \cap B) \subset A$
e) $(C \cup A) \subset A$
f) $(C \cap A) = C$
g) $(D \cap B) = \varnothing$
h) $(D \cup B) \supset A$
i) $(C \cap D) \supset D$

7. Dados os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 2 e menor que } 100\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 3 e menor que } 100\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 6 e menor que } 100\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 9 e menor que } 100\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é menor que } 100\}$$

substitua o símbolo $\boxdot$ por $\subset$ ou $\not\subset$ em cada item abaixo, para que a afirmação correspondente seja verdadeira.

a) $A \ \boxdot \ B$
b) $A \ \boxdot \ C$
c) $A \ \boxdot \ D$
d) $A \ \boxdot \ E$
e) $B \ \boxdot \ C$
f) $B \ \boxdot \ D$
g) $B \ \boxdot \ E$
h) $C \ \boxdot \ D$
i) $C \ \boxdot \ E$

8. Dados os conjuntos

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},\ B = \{-3, -1, 1, 5\}$$

$$\text{e} \quad C = \{-9, -3, 1, 3, 9\},$$

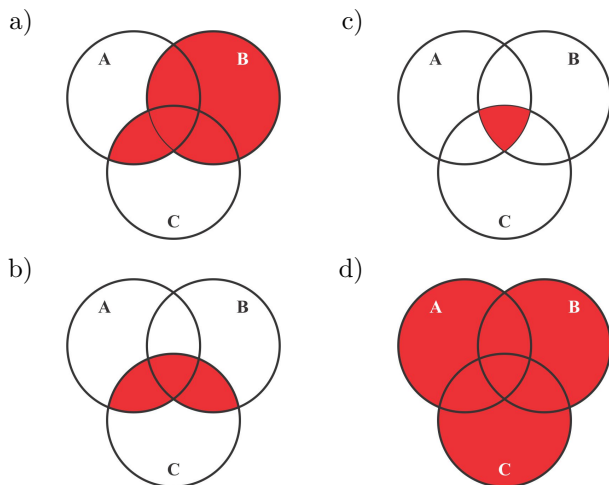
encontre

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $A \cap B$
d) $A \cap C$
e) $A \cup B \cup C$
f) $A \cap B \cap C$
g) $(A \cup B) \cap C$
h) $(A \cup C) \cap B$
i) $(A \cap B) \cup C$
j) $(A \cap C) \cup B$
k) $A \cup (B \cap C)$
l) $A \cap (B \cup C)$

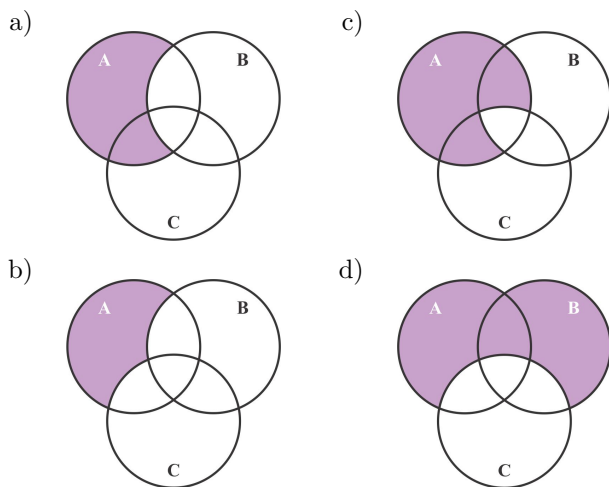
9. Desenhe o diagrama de Venn associado ao Exercício 8.

10. Determine se são verdadeiras as afirmações abaixo.

a) $A \subset (A \cup B)$
b) $(A \cup B) \subset B$
c) $(A \cap B) \subset B$
d) $A \subset (A \cap B)$
e) $\varnothing \subset (A \cap B)$
f) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

11. Para cada um dos diagramas abaixo, represente a parte destacada usando a notação de união e interseção de conjuntos.

12. Dados os conjuntos U, V e W, determine

a) $W \cap (V \cup W)$.
b) $(U \cap V) \cup U$.
c) $(U \cap V) \cap (V \cap W)$.

13. Para cada um dos diagramas abaixo, represente a parte destacada usando a notação de união, interseção e complemento relativo de conjuntos.

14. Dados os conjuntos

$$A = \{b, c, d, f, g, h\}, \quad B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$\text{e} \quad C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\},$$

encontre

a) $C \backslash A$ c) $B \backslash C$ e) $(C \backslash A) \cap B$
b) $C \backslash B$ d) $C \backslash (A \cup B)$ f) $(A \cup B) \backslash C$

15. Dados os conjuntos

$$A = \{2, 4, 8, 16, 32\}, \quad B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

$$\text{e} \quad C = \{8, 16, 32, 64\},$$

encontre

a) $A \backslash B$ c) $C \backslash (A \cup B)$ e) $C \cap (B \backslash A)$
b) $B \backslash C$ d) $C \backslash (A \cap B)$ f) $C \cup (A \backslash B)$

16. Dados os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 3 e menor que 20}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 6 e menor que 20}\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar e menor que 20}\}$$

encontre

a) $A \backslash B$ c) $A \backslash (B \cup C)$
b) $C \backslash A$ d) $(B \cup C) \backslash (A \cap C)$

17. Em um grupo de 30 jovens, 20 pessoas bebem Bidu cola e 15 bebem Bidu uva. Se 9 pessoas bebem tanto Bidu cola quanto Bidu uva, quantos jovens não gostam de nenhum dos dois refrigerantes?

18. Dos funcionários de uma firma, 56 falam inglês, 34 falam espanhol e 145 não falam nem uma nem outra dessas línguas. Se 18 pessoas falam tanto inglês quanto espanhol, quantos funcionários tem a firma? Quantas pessoas falam exatamente uma das duas línguas estrangeiras?

19. Três candidatos A, B e C concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato A, 70 votariam apenas em B, e 100 votariam apenas no candidato C. Além disso, 190 disseram que não votariam em A, 110 disseram que não votariam em C, e 10 sócios estão na dúvida e podem votar tanto em A como em C, mas não em B. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato.

a) Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não votariam em A?
b) Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em B?
c) Quantos sócios participaram da pesquisa?

20. Um grupo de pessoas resolveu encomendar cachorros-quentes para o lanche. Entretanto, a lanchonete enviou apenas 15 sachês de mostarda e 17 de catchup, o que não é suficiente para que cada membro do grupo receba um sachê de cada molho. Desta forma, podemos considerar que há três subgrupos: um formado pelas pessoas que ganharão apenas um sachê de mostarda, outro por aquelas que ganharão apenas um sachê de catchup, e o terceiro pelas que receberão um sachê de cada molho. Sabendo que, para que cada pessoa ganhe ao menos um sachê, 14 delas devem receber apenas um dos molhos, determine o número de pessoas do grupo.

21. Uma pesquisa de opinião com 1000 espectadores da TV aberta revelou que 390 pessoas assistem à programação do canal A, 480 assistem ao canal B e 457 assistem ao canal C. Além disso, a pesquisa indicou que 151 pessoas assistem aos canais A e B, 167 espectadores assistem aos canais A e C, 188 pessoas assistem aos canais B e C, e 63 pessoas assistem a todos os três canais.

a) Quantos entrevistados não assistem a nenhum dos três canais?
b) Quantos espectadores assistem exclusivamente ao canal A?
c) Quantas pessoas não assistem aos canais A ou C?
d) Quantos espectadores assistem aos canais A e B, mas não assistem ao canal C?
e) Quantas pessoas assistem a ao menos dois canais?

22. Uma empresa de propaganda fez um levantamento sobre o consumo de três marcas de sabão em pó. Dos 1800 entrevistados,

- 90 pessoas usam sabão de qualquer uma das marcas A, B ou C;
- dos 486 indivíduos que usam o sabão C, 180 o fazem com exclusividade, enquanto 216 também podem usar o sabão da marca A;
- o público que usa apenas o sabão da marca A é o triplo do público que usa apenas o sabão C;
- o público que usa exclusivamente a marca B é o dobro do que só consome a marca C;
- metade dos entrevistados usa (sempre ou eventualmente) o sabão da marca A.

Usando um diagrama de Venn, determine o número de entrevistados que não consomem sabão de nenhuma das três marcas.

23. Um clube de futebol criou um site para que seus associados escolhessem o mascote do time. Três animais foram sugeridos: tigre, jacaré e cobra. Os internautas podiam votar em mais de um animal, assim como indicar que não gostaram de nenhum dos mascotes propostos. A apuração do resultado revelou que 26 % dos eleitores votaram apenas no tigre, 28% escolheram apenas o jacaré, 10% votaram apenas na cobra e 2% recusaram os três animais. Além disso, 12% dos internautas escolheram somente o tigre e o jacaré, 6% votaram apenas no jacaré e na cobra, e 9% votaram exclusivamente no tigre e na cobra.

a) Qual percentual dos votos cada animal recebeu?
b) Qual percentual dos internautas votou em todos os três animais?
c) Qual animal foi escolhido para mascote, por ter recebido o maior número de votos?

24. Alguns exames de sangue efetuados para detectar doenças (ou mesmo gravidez) retornam apenas dois resultados: positivo, quando a pessoa que fez o exame tem a doença, ou negativo, quando a pessoa não tem a doença. Entretanto, raramente esses exames são 100% confiáveis, o que significa que é possível encontrar casos em que

- o exame deu positivo, mas a pessoa não está doente (falso positivo);
- o exame deu negativo, mas a pessoa está doente (falso negativo).

Considere um exame realizado por 1000 pessoas, das quais 180 receberam um resultado positivo. Se 20 pessoas receberam um falso positivo e 45 receberam um falso negativo, determine

a) Quantas pessoas receberam resultado negativo.
b) Quantas pessoas realmente estavam doentes.
c) Quantas pessoas receberam corretamente a informação de que não estavam doentes.

25. Em uma cidade, todos os homens andam barbeados. Além disso, nela há um único barbeiro (homem), que barbeia todos os homens que não se barbeiam e não barbeia nenhum homem que se barbeia. Quem barbeia o barbeiro da cidade?

Respostas dos Exercícios 2.6

1. a) $\{3\}$
b) $\{-1, 0, 3\}$
c) $\{-1; -\frac{1}{5}; 0; 0{,}621; \frac{2}{3}; 3\}$
d) $\{\sqrt{2}, \pi\}$

2. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
b) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
c) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$
d) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

3. a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$
b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 5}\}$
c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e menor que 30}\}$
d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é menor que 1000}\}$

4. a) F c) F e) F
b) V d) V f) V

5. a) F e) V i) V
b) V f) F j) F
c) V g) V k) V
d) F h) F l) F

6. a) F d) V g) V
b) V e) V h) F
c) V f) V i) F

7. a) $\not\subset$ d) $\subset$ g) $\subset$
b) $\subset$ e) $\subset$ h) $\not\subset$
c) $\not\subset$ f) $\subset$ i) $\subset$

8. a) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\{-9, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 9\}$
c) $\{-1, 1\}$
d) $\{1, 3\}$
e) $\{-9, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$
f) $\{1\}$
g) $\{-3, 1, 3\}$
h) $\{-3, -1, 1\}$
i) $\{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$
j) $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$
k) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
l) $\{-1, 1, 3\}$

9.

A, B, C; 2, 0, -2, 4, -1, 1, 5, 3, -3, -9, 9

10. a) V c) V e) V
b) F d) F f) V

11. a) $(A \cup B) \cap C$ c) $A \cap B \cap C$
b) $(A \cap C) \cup B$ d) $A \cup B \cup C$

12. a) W b) U c) V

13. a) $A \backslash B$ c) $A \backslash (B \cap C)$
b) $A \backslash (B \cup C)$ d) $(A \cup B) \backslash C$

14. a) $\{a, e, i, j\}$ b) $\{b, c, d, f, g, h, j\}$ c) $\{o, u\}$ d) $\{j\}$ e) $\{a, e, i\}$ f) $\varnothing\}$

15. a) $\{2, 32\}$ b) $\{4, 12, 20\}$ c) $\{64\}$ d) $\{32, 64\}$ e) $\varnothing$ f) $\{2, 8, 16, 32, 64\}$

16. a) $\{3, 9, 15\}$ b) $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ c) $\varnothing$ d) $\{1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19\}$

17. 4 jovens

18. A firma tem 217 funcionários, dos quais 54 falam exatamente uma das duas línguas.

19. a) 20 sócios b) 150 sócios c) 400 sócios

20. 23 pessoas

21. a) 116 espectadores b) 135 espectadores c) 320 espectadores d) 88 espectadores e) 380 espectadores

22. 270 entrevistados.

23. a) Tigre: 54% Jacaré: 53% Cobra: 32% b) 7% c) O tigre

24. a) 820 pessoas b) 205 pessoas c) 775 pessoas

25. Esse problema, que é insolúvel, ilustra o paradoxo de Russell, que mostra as contradições da teoria Cantoriana dos conjuntos.

2.7 Intervalos

Muitos problemas de álgebra têm um conjunto infinito de soluções reais, que corresponde a um ou mais intervalos da reta real. Um **intervalo** (real) é o conjunto de números (reais) compreendidos entre dois valores a e b. A inclusão ou exclusão dos valores extremos a e b permite-nos definir vários tipos de intervalo.

Intervalo aberto

Dados dois números reais a e b, tais que $a < b$, definimos o **intervalo aberto** (a, b) como o conjunto de números reais maiores que a e menores que b, ou seja,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Figura 2.15: O intervalo (−2,5).

A Figura 2.15 mostra o intervalo aberto $(-2, 5)$ na reta real. Observe que os extremos -2 e 5 são representados por círculos vazados, para indicar que esses pontos não fazem parte do conjunto.

Intervalo fechado

Dados dois números reais a e b, tais que $a \le b$, definimos o **intervalo fechado** $[a, b]$ como o conjunto de números reais maiores ou iguais a a e menores ou iguais a b, ou seja,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}.$$

Figura 2.16: O intervalo [−3,3].

A Figura 2.16 mostra o intervalo fechado $[-3, 3]$ na reta real. Nesse caso, os círculos preenchidos que aparecem no -3 e no 3 indicam que esses pontos fazem parte do conjunto.

Intervalos mistos

Dados dois números reais a e b, tais que $a < b$, também definimos intervalos que são abertos em uma extremidade e fechados em outra:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \qquad \text{e} \qquad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}.$$

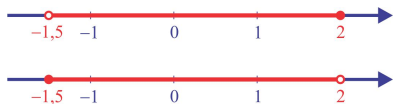



Figura 2.17: Os intervalos (−1,5; 2] e [−1,5; 2).

A Figura 2.17 mostra os dois tipos possíveis de intervalos mistos.

Finalmente, podemos ter intervalos que não são limitados em alguma extremidade. Nesse caso, usamos o símbolo de **infinito**, ∞, para indicar que não há extremo direito, e $-\infty$ para indicar que não há limite esquerdo.

Intervalos ilimitados

Dado o número real a, definimos

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \qquad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \qquad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Também podemos usar $(-\infty, \infty)$ para representar o conjunto $\mathbb{R}$.

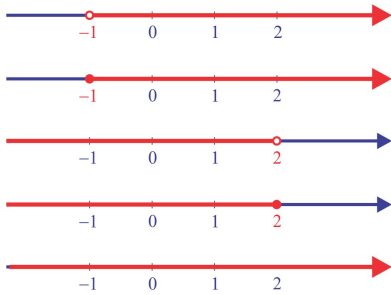



Figura 2.18: Os intervalos $(-1, \infty)$, $[-1, \infty)$, $(-\infty, 2)$, $(-\infty, 2]$ e $(-\infty, \infty)$.

Note que sempre combinamos ∞ com um parêntese, e não um colchete, já que não há um limite superior estrito para o intervalo. De forma análoga, $-\infty$ também é acompanhado por parêntese. A Figura 2.18 mostra exemplos de intervalos ilimitados.

O uso de ∞ e $-\infty$

O símbolo ∞ não é usado para representar um número real específico. Empregamos o símbolo de infinito para indicar que um certo intervalo não tem limite superior, ou para discutir o que ocorre quando o valor de uma variável (como x) cresce ilimitadamente. Como ∞ não é um número, não deve fazer parte de operações que envolvem números reais. Em particular, as expressões $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ não estão definidas.

Argumentação análoga vale para $-\infty$, que usamos apenas para indicar que um intervalo não tem limite inferior, ou para analisar o que ocorre com uma variável que decresce ilimitadamente.

Problema 1. Intervalos

Reescreva os intervalos abaixo usando desigualdades e represente-os na reta real.

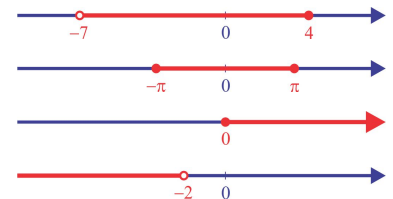
a) $(-7, 4]$ b) $[-\pi, \pi]$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, -2)$.

Solução.

a) $(-7, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq 4\}$

b) $[-\pi, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$

c) $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

d) $(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

Agora, tente o Exercício 1.

■ União e interseção de intervalos

Como os intervalos nada mais são que conjuntos de números reais, a eles podemos aplicar os conceitos de união e interseção vistos na Seção 2.6. Uma maneira prática de determinar a união ou interseção de dois intervalos consiste em desenhar cada um desses intervalos na reta real e, em seguida, traçar uma terceira reta que contenha o conjunto solução.

Para não cometer algum erro nesse processo, é preciso ficar atento à inclusão ou exclusão dos extremos dos intervalos. Observe que, quando se trata da união

de conjuntos, o extremo será incluído na solução se aparecer em qualquer um dos intervalos originais. Por outro lado, ao se determinar a interseção de conjuntos, o extremo só fará parte da solução se aparecer nas retas referentes aos dois intervalos.

Problema 2. Determinação da união e da interseção de intervalos

Reescreva os conjuntos abaixo usando desigualdades e represente-os na reta real.

a) $(-2,1) \cup [3{,}5]$

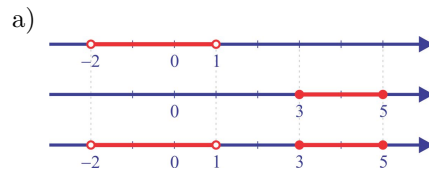
b) $(-3,1) \cup (0,2)$

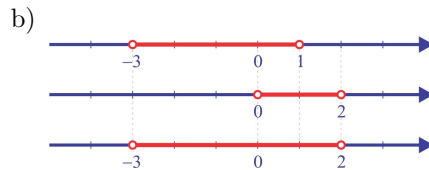
c) $(-2,2] \cap (0,4]$

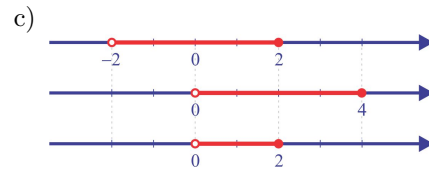
d) $[-3,1] \cap [2;\infty)$.

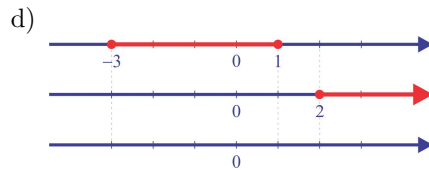
e) $(-\infty; 3{,}75) \cap (-1; 3{,}75]$.

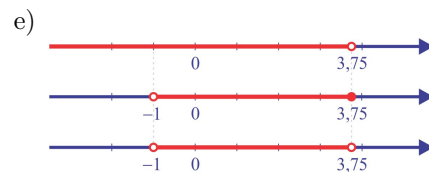
Solução.

a)

Como se observa na figura ao lado, a união dos intervalos disjuntos $(-2,1)$ e $[3{,}5]$ resulta no conjunto definido por $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 5\}$.

b)

Note que, apesar de não pertencerem ao mesmo tempo aos dois intervalos, os pontos 0 e 1 fazem parte do conjunto solução, que é dado por $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}$.

c)

Nesse exemplo, o ponto 0 não foi incluído na solução, pois não pertence ao segundo intervalo. Já o ponto 2 faz parte da interseção, dada por $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$.

d)

Nesse caso, os intervalos não possuem pontos em comum, Portanto, sua interseção é vazia, ou seja, é dada por $\varnothing$.

e)

Aqui, o ponto 3,75 não pertence ao primeiro intervalo, assim como −1 não pertence ao segundo intervalo. A interseção é dada por $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3{,}75\}$.

Agora, tente o Exercício 6.

Exercícios 2.7

1. Descreva os intervalos abaixo usando desigualdades e desenhe-os na reta real.

a) $(-2{,}0)$

b) $[1{,}6)$

c) $(-3,\infty)$

d) $(-\infty; 12{,}5]$

e) $[-4{,}5]$

f) $(-5,-2]$

2. Escreva os conjuntos abaixo na forma de intervalos e desenhe-os na reta real.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0{,}17\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{100} \leq x < 100\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x > 5\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{3}\}$

3. Indique se são verdadeiras as afirmações abaixo.

a) $-\sqrt{5} \in (-3,-1)$
b) $5 \in (3,5)$
c) $1-\sqrt{3} \notin (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$
d) $[-2,3] \subset [-1,7]$
e) $(-4,-1) \subset (-\infty,-1]$
f) $[-1,2] \subset [-3,0] \cup [1,4]$

4. Considerando os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\},$$

determine

a) $A \cup C$
b) $B \cup C$
c) $A \cup B$
d) $A \cap C$
e) $B \cap C$
f) $A \cap B$

5. Reescreva os intervalos abaixo na forma mais simples e compacta possível.

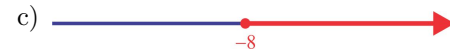
a) $[-4,5] \cup [-2,1]$
b) $[-2,3] \cup [3,4]$
c) $(0,2) \cup [2,8]$
d) $(-1,4) \cup (4,6)$
e) $[-4,1) \cup (-2,2]$
f) $[-4,-\frac{5}{2}) \cup (-3,-2)$
g) $(-\infty,6) \cup (4,7)$
h) $(-\infty,5) \cup (-1,\infty)$

6. Escreva os conjuntos abaixo usando desigualdades e represente-os na reta real.

a) $(-3,1) \cup (-1,2)$
b) $[-2,2) \cap (\frac{1}{2},4]$
c) $[1,4) \cup (1,6]$
d) $(-\infty,2] \cap (-2,0]$
e) $(-\infty,-2] \cup [3,\infty)$
f) $(-\infty,8) \cap (8,\infty)$

7. Descreva os conjuntos abaixo usando a notação de intervalo.

a) b)
c)
d) 1/2

e)
f) −3 0

g) h)
8. Descreva os conjuntos do Exercício 7 usando desigualdades.

9. Considerando os conjuntos

$$A = (-\infty,-3], \quad B = (-1,7), \quad \text{e} \quad C = [-5,6],$$

determine

a) $A \cup C$
b) $B \cup C$
c) $A \cap C$
d) $B \cap C$
e) $A \cup B \cup C$
f) $A \cap B \cap C$
g) $(A \cup B) \cap C$
h) $A \cup (B \cap C)$
i) $(A \cap B) \cup C$

Respostas dos Exercícios 2.7

1. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 6\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12{,}5\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 5\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -2\}$

2. a) $[0{,}17;\infty)$
b) $(-\infty,4]$
c) $(-3,-1)$
d) $[-1,0]$
e) $[\frac{1}{100},100)$
f) $(-\infty,-2] \cup (5,\infty)$
g) $(-4,\infty)$
h) $(-\infty,\sqrt{3})$

3. a) V c) F e) V
b) F d) F f) F

4. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
c) $\mathbb{R}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 2\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

5. a) $[-4,5]$
b) $[-2,4]$
c) $(0,8]$
d) $(-1,4) \cup (4,6)$
e) $[-4,2]$
f) $[-4,-2)$
g) $(-\infty,7)$
h) $\mathbb{R}$

6. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3\}$
f) $\varnothing$

7. a) $[1,7]$
b) $(-2,5)$
c) $[-8,\infty)$
d) $(-\infty,\frac{1}{2})$
e) $(-4,-1]$
f) $[-3,0)$
g) $(-\infty,-5] \cup [1,\infty)$
h) $[-1,0] \cup [2,3]$

8. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 7\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -8\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -1\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 0\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x \geq 1\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$

9. a) $(-\infty,6]$
b) $[-5,7)$
c) $[-5,-3]$
d) $(-1,6]$
e) $(-\infty,7)$
f) $\varnothing$
g) $[-5,-3] \cup (-1,6]$
h) $(-\infty,-3] \cup (-1,6]$
i) $[-5,6]$

2.8 Inequações

As equações são úteis quando queremos que dois valores coincidam, como no Problema 4 da Seção 2.4, no qual era preciso dividir uma conta de restaurante. É claro que, quanto se trata de pagar contas, queremos que o valor gasto seja igual ao devido, para não desembolsarmos mais que o estritamente necessário.

Entretanto, há muitas aplicações práticas que não se enquadram nesse modelo, como aquelas nas quais é preciso comparar alternativas. Em problemas desse tipo, o objetivo é descobrir, dentre várias opções, qual possui o **menor** custo, ou fornece o **maior** benefício. Para resolver esse tipo de problema, substituímos o símbolo = das equações por um dos símbolos "≤", "<", ">" ou "≥". Obtemos, assim, uma **inequação**, ou **desigualdade**.

Lembrete
Se você deseja revisar o significado dos símbolos ≤, <, > e ≥, e a relação deles com a reta real, não deixe de visitar a Seção 1.5.

São exemplos de inequações:

a) $4x \leq 12$;

b) $2 \leq |x-3| < 5$;

c) $x(3x-10) \geq 2(17-6x)$;

d) $\frac{x-6}{1-5x} > 11$.

Não é difícil descobrir se um número real é ou não solução de uma inequação. Para tanto, basta substitui-lo nas expressões envolvidas e verificar se a desigualdade é satisfeita. Tomando como exemplo a inequação (a) apresentada acima, observamos que $x = -5$ e $x = 2{,}5$ são soluções, mas que $x = 6$ não é solução, já que

$$\begin{aligned} 4\cdot(-5) &\leq 12 && \text{Substituindo } x \text{ por } -5.\\ -20 &\leq 12 && \text{Ok! A desigualdade foi satisfeita.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\cdot 2{,}5 &\leq 12 && \text{Substituindo } x \text{ por } 2{,}5.\\ 10 &\leq 12 && \text{Ok! A desigualdade é válida.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\cdot 6 &\leq 12 && \text{Substituindo } x \text{ por } 6.\\ 24 &\leq 12 && \text{Falso! A desigualdade não foi satisfeita.} \end{aligned}$$

Entretanto, geralmente não queremos saber apenas se um número é solução de uma desigualdade, mas resolvê-la, ou seja, encontrar todos os valores da variável que fazem com que a desigualdade seja verdadeira.

Para descobrir **todas** as soluções de uma inequação, não é possível recorrer à substituição de valores. A melhor estratégia, nesse caso, consiste na transformação da inequação em outra equivalente, mas mais simples. Aplicando essa ideia sucessivas vezes, chega-se à solução do problema.

Assim como foi feito no caso das equações, a obtenção de inequações equivalentes deve ser feita com base em algumas propriedades, as quais são apresentadas na tabela abaixo para o caso em que o símbolo "≤" aparece.

Propriedades das inequações

Sejam dadas as expressões A, B, C e D.

	Propriedade	Exemplo
1.	Se $A \leq B$, então $B \geq A$	Se $-5 \leq x$, então $x \geq -5$
2.	Se $A \leq B$ e $B \leq C$, então $A \leq C$	Se $x \leq y$ e $y \leq 64$, então $x \leq 64$

Propriedades das inequações (cont.)

3. Se $A \le B$, então $A + C \le B + C$	Se $x - 3 \le 7$, então $x - 3 + 3 \le 7 + 3$
4. Se $C > 0$ e $A \le B$, então $CA \le CB$	Se $0{,}5x \le 12$, então $2 \cdot 0{,}5x \le 2 \cdot 24$
5. Se $C < 0$ e $A \le B$, então $CA \ge CB$	Se $-3x \le 9$, então $-\frac{1}{3} \cdot (-3x) \ge -\frac{1}{3} \cdot 9$
6. Se $A \le B$ e $C \le D$, então $A+C \le B+D$	Se $x \le 8$ e $y \le 5$, então $x + y \le 8 + 5$

As propriedades acima são intuitivas, com exceção da de número 4. Além disso, sente-se a falta de regras que envolvam a subtração e a divisão, bem como outros símbolos, como "≥". Gastemos, então, algum tempo analisando cada um desses casos em separado.

Análise das regras do produto

Observe que há duas propriedades relativas ao produto, dependendo do sinal de C. A primeira delas, a Propriedade 4, parece natural. Já a Propriedade 5 sempre suscita muitas dúvidas, pois envolve a inversão de sinal da desigualdade. Para aqueles que relutam em aceitar essa inversão, o melhor remédio é verificar o que acontece quando multiplicamos uma desigualdade óbvia, como $-2 \le 0$, por um número negativo. O que aconteceria se não trocássemos "≤" por "≥" nesse caso?

Nesse exemplo, como sabemos que $2 \ge 0$, é necessária a inversão de sinal da desigualdade.

-2	$\le$	0	Inequação original com "≤".
$(-1) \cdot (-2)$	**?**	$(-1) \cdot (0)$	Usamos "≤" ou "≥" ao multiplicar os dois lados por -1?
2	$\ge$	0	Devemos trocar o sinal para "≥".

Subtração de uma expressão

Analogamente ao que foi observado no caso das equações, a Propriedade 3 pode ser usada para a subtração de uma expressão C, já que $A - C = A + (-C)$. Logo,

$$\text{Se } A \le B, \text{ então } A - C \le B - C.$$

Divisão por uma expressão

Como o produto $\frac{1}{C} \cdot A$ é equivalente à divisão $\frac{A}{C}$, as Propriedades 4 e 5 implicam que

No exemplo apresentado para a Propriedade 5 na tabela, poderíamos ter escrito simplesmente $\frac{-3x}{-3} \ge \frac{9}{-3}$.

$$\text{Se } C > 0 \text{ e } A \le B, \text{ então } \frac{A}{C} \le \frac{B}{C}.$$
$$\text{Se } C < 0 \text{ e } A \le B, \text{ então } \frac{A}{C} \ge \frac{B}{C}.$$

Inequações do tipo "maior ou igual"

Mutatis mutandis, as propriedades acima também valem nos casos em que a desigualdade inclui "<" e ">".

Usando a Propriedade 1, fica fácil converter as demais propriedades para os casos em que a desigualdade envolve o símbolo "≥". Assim, por exemplo, considerando que $A \le B$ é equivalente a $B \ge A$, a Propriedade 3 pode ser escrita como

$$\text{Se } B \ge A, \text{ então } B + C \ge A + C.$$

Isso corresponde a ler da direita para a esquerda as desigualdades que aparecem na tabela. De forma semelhante, a Propriedade 5 pode ser convertida em

$$\text{Se } C < 0 \text{ e } B \ge A, \text{ então } CB \le CA.$$

Observando as duas versões da Propriedade 5, concluímos que *ao multiplicarmos uma desigualdade por um número negativo, devemos inverter o sinal da desigualdade.* Essa ideia está ilustrada nos exemplos abaixo.

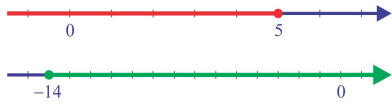



Figura 2.19: As soluções dos exemplos (a) e (b) na reta real.

a) Se $-x \geq -5$, então $(-1)(-x) \leq (-1)(-5)$, de modo que $x \leq 5$.

b) Se $-2x \leq 28$, então $\frac{-2x}{-2} \geq \frac{28}{-2}$, de modo que $x \geq -14$.

Note que, nesses exemplos, usamos a Propriedade 5 para isolar a variável x. Dessa forma, qualquer número real menor ou igual a 5 é solução da inequação do Exemplo (a). Da mesma forma, o conjunto solução da inequação do Exemplo (b) é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$. A Figura 2.19 mostra esses conjuntos na reta real.

Inequações lineares

Nessa subseção, veremos como aplicar as propriedades dadas na tabela acima à resolução de inequações lineares, que são definidas abaixo.

Inequação linear

Uma inequação é dita **linear** ou **de primeiro grau** se é equivalente a

$$ax \leq b \qquad \text{ou} \qquad ax < b \qquad \text{ou} \qquad ax > b \qquad \text{ou} \qquad ax \geq b,$$

em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$.

As inequações lineares sempre têm infinitas soluções, que podem ser apresentadas usando a notação de conjunto introduzida na Seção 2.6. A obtenção das soluções de uma inequação linear envolve a mesma estratégia apresentada para as equações lineares, ou seja, a aplicação sucessiva das propriedades até o isolamento da variável. Os problemas resolvidos abaixo ilustram esse procedimento.

Problema 1. Inequações lineares

Resolva as desigualdades

a) $5x - 12 \leq 0$

b) $7 - 3x < 10$

c) $51 \leq 6x + 15$

d) $16 - 4x \geq 11x - 29$

e) $\dfrac{2x}{3} + 6 \geq \dfrac{x}{5} + 9$

f) $3(x - 8) > 9x - 24$

g) $\dfrac{7x - 4}{4} + \dfrac{1 - 3x}{2} > \dfrac{x - 1}{3} - 1$

Solução.

a)

$$\begin{aligned}
5x - 12 &\leq 0 && \text{Inequação original.}\\
5x - 12 + 12 &\leq 0 + 12 && \text{Propriedade 3.}\\
5x &\leq 12 && \text{Inequação simplificada.}\\
\frac{5x}{5} &\leq \frac{12}{5} && \text{Propriedade 4.}\\
x &\leq \frac{12}{5} && \text{Solução da inequação.}
\end{aligned}$$

Figura 2.20: Solução do item a.

b)

$$
\begin{array}{rcll}
7 - 3x & < & 10 & \text{Equação original.} \\
7 - 7 - 3x & < & 10 - 7 & \text{Propriedade 3.} \\
-3x & < & 3 & \text{Inequação simplificada.} \\
\frac{-3x}{-3} & > & \frac{3}{-3} & \text{Propriedade 5.} \\
x & > & -1 & \text{Solução da inequação.}
\end{array}
$$

Figura 2.21: Solução do item b.

c)

$$
\begin{array}{rcll}
51 & \leq & 6x + 15 & \text{Equação original.} \\
51 - 15 & \leq & 6x + 15 - 15 & \text{Propriedade 3.} \\
36 & \leq & 6x & \text{Inequação simplificada.} \\
6x & \geq & 36 & \text{Propriedade 1.} \\
\frac{6x}{6} & \geq & \frac{36}{6} & \text{Propriedade 4.} \\
x & \geq & 6 & \text{Solução da inequação.}
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{rcll}
16 - 4x & \geq & 11x - 29 & \text{Equação original.} \\
16 - 16 - 4x & \geq & 11x - 29 - 16 & \text{Propriedade 3.} \\
-4x & \geq & 11x - 45 & \text{Inequação simplificada.} \\
-4x - 11x & \geq & 11x - 11x - 45 & \text{Propriedade 3.} \\
-15x & \geq & -45 & \text{Inequação simplificada.} \\
\frac{-15x}{-15} & \leq & \frac{-45}{-15} & \text{Propriedade 5.} \\
x & \leq & 3 & \text{Solução da inequação.}
\end{array}
$$

e)

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{2x}{3} + 6 & \geq & \frac{x}{5} + 9 & \text{Equação original.} \\
\frac{2x}{3} - \frac{x}{5} + 6 & \geq & \frac{x}{5} - \frac{x}{5} + 9 & \text{Propriedade 3.} \\
\frac{10x - 3x}{15} + 6 & \geq & 9 & \text{Subtração de frações.} \\
\frac{7x}{15} + 6 & \geq & 9 & \text{Inequação simplificada.} \\
\frac{7x}{15} + 6 - 6 & \geq & 9 - 6 & \text{Propriedade 3.} \\
\frac{7x}{15} & \geq & 3 & \text{Inequação simplificada.} \\
\left(\frac{15}{7}\right) \cdot \left(\frac{7x}{15}\right) & \geq & \left(\frac{15}{7}\right) \cdot 3 & \text{Propriedade 4.} \\
x & \geq & \frac{45}{7} & \text{Solução da inequação.}
\end{array}
$$

f)

$3(x-8)$	$>$	$9x-24$	Equação original.
$3x-24$	$>$	$9x-24$	Propriedade distributiva.
$3x-24+24$	$>$	$9x-24+24$	Propriedade 3.
$3x$	$\geq$	$9x$	Inequação simplificada.
$3x-9x$	$>$	$9x-9x$	Propriedade 3.
$-6x$	$>$	0	Inequação simplificada.
$\dfrac{-6x}{-6}$	$<$	$\dfrac{0}{-6}$	Propriedade 5.
x	$<$	0	Solução da inequação.

g)

$\dfrac{7x-4}{4}+\dfrac{1-3x}{2}$	$>$	$\dfrac{x-1}{3}-1$	Equação original.
$12\cdot\dfrac{7x-4}{4}+12\cdot\dfrac{1-3x}{2}$	$>$	$12\cdot\dfrac{x-1}{3}-12\cdot 1$	Propriedade 3, usando o mmc dos denominadores.
$3(7x-4)+6(1-3x)$	$>$	$4(x-1)-12$	Equação simplificada.
$21x-12+6-18x$	$>$	$4x-4-12$	Propriedade distributiva.
$3x-6$	$>$	$4x-16$	Equação simplificada.
$3x-4x-6$	$>$	$4x-4x-16$	Propriedade 3.
$-x-6$	$>$	-16	Equação simplificada.
$-x-6+6$	$>$	$-16+6$	Propriedade 3.
$-x$	$>$	-10	Equação simplificada.
$(-1)\cdot(-x)$	$<$	$(-1)\cdot(-10)$	Propriedade 5.
x	$<$	10	Solução da inequação.

Agora, tente o Exercício 3.

Em alguns casos, é possível reunir duas desigualdades em uma **inequação dupla**. Assim, por exemplo, se quisermos satisfazer, ao mesmo tempo, as desigualdades

$$2x-5\leq 9 \qquad \text{e} \qquad 2x-5\geq -11,$$

podemos escrever simplesmente

$$-11\leq 2x-5\leq 9.$$

Apesar de podermos resolver as desigualdades $2x-5\leq 9$ e $2x-5\geq -11$ em separado, é preferível resolver a desigualdade dupla $-11\leq 2x-5\leq 9$ de uma só vez, usando os mesmos procedimentos apresentados no Problema 1:

$$\begin{array}{rcccll} -11 & \le & 2x-5 & \le & 9 & \text{Inequação original.} \\ -11+5 & \le & 2x-5+5 & \le & 9+5 & \text{Somando 5 a todos os termos.} \\ -6 & \le & 2x & \le & 14 & \text{Inequação simplificada.} \\ \frac{-6}{2} & \le & \frac{2x}{2} & \le & \frac{14}{2} & \text{Dividindo os termos por 2.} \\ -3 & \le & x & \le & 7 & \text{Solução da inequação.} \end{array}$$

Figura 2.22: Solução da desigualdade dupla.

Observe que o conjunto solução é composto pelos valores reais entre -3 e 7, incluindo os extremos. Esse conjunto também pode ser representado na forma $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 7\}$, ou simplesmente por $x \in [-3, 7]$. Ainda é possível apresentar a solução usando a reta real, como mostrado na Figura 2.22.

Problema 2. Desigualdades duplas

Resolva as desigualdades

a) $-2 \le \frac{x+3}{2} \le 4$

b) $34 \le 13 - 3(4x-7) \le 58$

c) $\frac{1}{6} \le \frac{8}{3} - \frac{5x}{2} \le \frac{13}{6}$

Solução.

a)

$$\begin{array}{rcccll} -2 & \le & \frac{x+3}{2} & \le & 4 & \text{Inequação original.} \\ 2\cdot(-2) & \le & 2\cdot\frac{x+3}{2} & \le & 2\cdot 4 & \text{Multiplicando por 2.} \\ -4 & \le & x+3 & \le & 8 & \text{Inequação simplificada.} \\ -4-3 & \le & x+3-3 & \le & 8-3 & \text{Subtraindo 3.} \\ -7 & \le & x & \le & 5 & \text{Solução da inequação.} \end{array}$$

b)

Observe que, ao dividir as inequações por -3, invertemos os sinais das desigualdades.

$$\begin{array}{rcccll} 34 & \le & 13-3(4x-7) & \le & 58 & \text{Inequação original.} \\ 34-13 & \le & 13-13-3(4x-7) & \le & 58-13 & \text{Subtraindo 13.} \\ 21 & \le & -3(4x-7) & \le & 45 & \text{Inequação simplificada.} \\ \frac{21}{-3} & \ge & \frac{-3(4x-7)}{-3} & \ge & \frac{45}{-3} & \text{Dividindo por } -3. \\ -7 & \ge & 4x-7 & \ge & -15 & \text{Inequação simplificada.} \\ -15 & \le & 4x-7 & \le & -7 & \text{Voltando a usar "}\le\text{".} \\ -15+7 & \le & 4x-7+7 & \le & -7+7 & \text{Somando 7.} \\ -8 & \le & 4x & \le & 0 & \text{Inequação simplificada.} \\ \frac{-8}{4} & \le & \frac{4x}{4} & \le & \frac{0}{4} & \text{Dividindo por 4.} \\ -2 & \le & x & \le & 0 & \text{Solução da inequação.} \end{array}$$

c)

$$\frac{1}{6} \leq \frac{8}{3} - \frac{5x}{2} \leq \frac{13}{6}$$ Inequação original.

$$6 \cdot \frac{1}{6} \leq 6 \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{5x}{2}\right) \leq 6 \cdot \frac{13}{6}$$ Multiplicando por 6 (o mmc entre os denominadores 2, 3 e 6)

$$1 \leq 16 - 15x \leq 13$$ Inequação simplificada.

$$1 - 16 \leq 16 - 16 - 15x \leq 13 - 16$$ Subtraindo 16.

$$-15 \leq -15x \leq -3$$ Inequação simplificada.

$$-(-15) \geq -(-15x) \geq -(-3)$$ Multiplicando por -1.

$$15 \geq 15x \geq 3$$ Inequação simplificada.

$$3 \leq 15x \leq 15$$ Voltando a usar "$\leq$".

$$\frac{3}{15} \leq \frac{15x}{15} \leq \frac{15}{15}$$ Dividindo por 15.

$$\frac{1}{5} \leq x \leq 1$$ Solução da inequação.

Mais uma vez, invertemos os sinais das desigualdades trocando de lado os números -15 e -3.

Agora, tente o Exercício 4.

Resolução de problemas com o uso de inequações lineares

Para concluir esse capítulo, vamos resolver alguns problemas práticos que envolvem o uso de desigualdades lineares.

Problema 3. Dimensões de um terreno

João deseja construir uma casa em seu terreno retangular que tem 12 m de largura e 25 m de comprimento. Entretanto, as normas municipais impedem que a área construída exceda 2/3 da área total do terreno. Se João decidiu que sua casa terá 10 m de largura, qual será o comprimento máximo da construção?

Figura 2.23: O lote de João.

Solução.

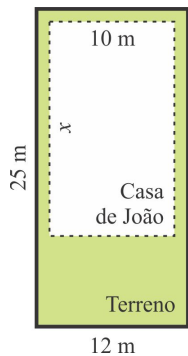
A Figura 2.23 mostra os dados do problema, considerando como incógnita o comprimento da casa de João, em metros, que representamos pela variável x.

Sabendo que a área de um retângulo é igual ao produto *comprimento* × *largura*, concluímos que o terreno de João tem $12 \times 25 = 300$ m^2 de área. Como só 2/3 do terreno podem ser ocupados, a área da casa não pode ultrapassar $\frac{2}{3} \cdot 300 = 200$ m^2.

A área da casa é dada pelo produto das dimensões, que equivale a $10x$. Como esse valor não pode ultrapassar 200 m^2, chegamos à desigualdade

$$10x \leq 200.$$

Para resolver essa desigualdade, fazemos

$$10x \leq 200 \quad \Rightarrow \quad \frac{10x}{10} \leq \frac{200}{10} \quad \Rightarrow \quad x \leq 20 \text{ m}.$$

Logo, o comprimento da casa não pode ser superior a 20 m.

Problema 4. Dimensões de uma mala

As companhias aéreas costumam impor restrições ao número, peso e dimensões das malas que cada passageiro pode transportar. Uma tradicional companhia brasileira não permite que, em voos domésticos, a soma das dimensões de cada mala (altura, largura e profundidade) ultrapasse 158 cm.

Suponha que uma mala grande tenha 30 cm de profundidade, e que sua altura corresponda a 2/3 da largura. Nesse caso, qual é a largura máxima que a mala pode ter, segundo a companhia aérea?

Figura 2.24: As dimensões de uma mala.

Solução.

A incógnita desse problema é a largura da mala, a qual denominaremos x. Nesse caso, a altura da mala será igual a $2x/3$. Somando, então, as dimensões e impondo o limite da companhia aérea, obtemos a desigualdade

$$\underbrace{x + \frac{2x}{3} + 30}_{\text{Soma das dimensões}} \quad \leq \quad \underbrace{158 \text{ cm}}_{\text{Limite}}.$$

Acompanhe abaixo os passos da resolução dessa inequação.

$$\frac{5x}{3} + 30 \leq 158 \qquad \text{Inequação após soma dos termos que envolvem } x.$$

$$\frac{5x}{3} + 30 - 30 \leq 158 - 30 \qquad \text{Subtraindo 30 dos dois lados.}$$

$$\frac{5x}{3} \leq 128 \qquad \text{Inequação simplificada.}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5x}{3} \leq \frac{3}{5} \cdot 128 \qquad \text{Multiplicando os dois lados por } \tfrac{3}{5}.$$

$$x \leq 76{,}8 \qquad \text{Inequação resultante.}$$

Logo, a mala poderá ter, no máximo, 76,8 cm de largura e $\frac{2}{3} \cdot 76{,}8 = 51{,}2$ cm de altura.

Problema 5. Corrida de táxi

O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,90, determine que distância pode-se percorrer com um valor entre R$ 20,00 e R$ 30,00.

Solução.

A incógnita desse problema, denominada x, é a distância percorrida pelo táxi, em quilômetros. Se pagamos R$ 3,44 para entrar no carro e mais R$ 0,90 por quilômetro, o custo da corrida é dado por $3{,}44 + 0{,}9x$.

Como foi estabelecido um limite mínimo e um limite máximo para o valor a ser gasto, temos a seguinte desigualdade dupla:

$$20 \leq 3{,}44 + 0{,}9x \leq 30.$$

A resolução dessa inequação é dada a seguir.

$$20 - 3{,}44 \le 0{,}9x \le 30 - 3{,}44$$

$$16{,}56 \le 0{,}9x \le 26{,}56$$

$$\frac{16{,}56}{0{,}9} \le x \le \frac{26{,}56}{0{,}9}$$

$$18{,}4 \le x \le 29{,}51.$$

Portanto, o táxi poderá percorrer uma distância que vai de 18,4 a 29,5 km.

Exercícios 2.8

1. Escreva na forma de desigualdades as frases abaixo, explicando o significado das variáveis que você usar.

a) Em Campinas, o preço da gasolina varia de R$ 2,39 a R$ 2,79.

b) O maior preço dos produtos dessa loja é R$ 4,99.

c) Rosana tem, no mínimo 1,50 m de altura.

d) O meu saldo bancário é positivo.

2. Resolva as inequações.

a) $2x > 3$

b) $8x \ge -5$

c) $x - 4 \le 5$

d) $\frac{a}{2} < 7$

e) $3z - \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

f) $x + 1 \ge -1$

g) $-x \le 6$

h) $3 \ge -9x$

i) $-\frac{w}{4} > \frac{5}{8}$

j) $-2y + 3 < 7$

3. Resolva as inequações.

a) $1 - 2(x - 1) < 2$

b) $2 - 3x \ge x + 14$

c) $5v - 32 \le 4 - 7v$

d) $2 - z > 3(z + 3)$

e) $2(3x + 1) < 4(5 - 2x)$

f) $8(x + 3) > 12(1 - x)$

g) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \ge \frac{1}{6} + x$

h) $3(3x - 2) + 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \le 19 - x$

i) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} > 0$

j) $\frac{1}{3} + \frac{x}{2} < \frac{5}{6} - \frac{2x}{3}$

k) $\frac{3x+1}{4} - 1 \ge \frac{1}{2} - 2x$

l) $\frac{1-2x}{3} + \frac{x-2}{6} > \frac{x+3}{2} - 1$

m) $\frac{2}{5}x + 1 \le \frac{1}{5} - 2x$

n) $\frac{x+2}{3} + \frac{2-3x}{2} < \frac{4x}{3}$

o) $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{1-x}{4}$

p) $3(1 - 2x) < 2(x + 1) + x - 7$

q) $\frac{x+10}{5} > -x + 6$

r) $\frac{3x-1}{4} + \frac{1-4x}{2} < 1$

s) $\frac{2}{5}x + 1 \le 2\left(x + \frac{3}{5}\right)$

t) $\left(\frac{1-2x}{3}\right) - \left(\frac{1+3x}{2}\right) \ge 2$

4. Resolva as inequações.

a) $1 < 2x < 3$

b) $-3 \le 4x \le 8$

c) $-1 \le x + 2 \le 5$

d) $0 \le 2x - 2 \le 6$

e) $-6 \le -2(x - 1) \le 0$

f) $2 \le \frac{x}{3} < 4$

g) $-3 < \frac{3x}{2} \le 6$

h) $-\frac{1}{4} \le \frac{3x-4}{7} \le \frac{1}{2}$

i) $\frac{1}{6} < \frac{2x-13}{12} < \frac{2}{3}$

j) $-6 \le 15 - 3(4x+7) \le 18$

k) $-4 \le \frac{5x-4}{6} \le 1$

l) $-1 \le \frac{4x-3}{5} \le \frac{3}{15}$

m) $-9 \le \frac{5-8x}{3} \le 1$

n) $-\frac{5}{4} \le \frac{2x-3}{2} \le \frac{7}{2}$

o) $-\frac{3}{2} \le \frac{2x-5}{3} < \frac{1}{6}$

5. Represente na reta real as soluções dos itens (g) e (h) do Exercício 4.

Nos exercícios 6 a 18, escreva uma inequação e resolva-a para determinar as respostas desejadas.

6. Se um terreno retangular deve ter perímetro de 120 m e um dos lados deve medir ao menos o dobro do outro, quanto deve medir o lado menor? Lembre-se de que o perímetro de um retângulo é igual à soma dos comprimentos de seus lados.

7. João poupou R$1.250,00 para sua viagem de férias. Desse montante, R$ 375,00 serão gastos com passagens. O resto será usado no pagamento de refeições e diárias de hotel. Supondo que João pretenda gastar R$30,00 por dia com refeições, por quantos dias ele pode se hospedar em um hotel com diária de R$ 75,00?

8. A nota final de uma disciplina de pós-graduação é obtida segundo a fórmula $NF = (2P_1 + 3P_2)/5$, em que P_1 e P_2 são, respectivamente, as notas que o aluno obteve na primeira e na segunda prova. Posteriomente, a nota final é convertida em uma "menção", que é divulgada no histórico escolar do aluno. A tabela abaixo fornece a menção relativa a cada faixa de notas.

Intervalo	Menção
$0 \leq NF < 3$	E
$3 \leq NF < 5$	D
$5 \leq NF < 7$	C
$7 \leq NF < 9$	B
$9 \leq NF \leq 10$	A

Se Ivete tirou 7,5 em sua primeira prova, quanto deve tirar na segunda para ficar com menção B?

9. Vanda pretende se aventurar na produção de camisetas. Para tanto, ela precisa adquirir uma máquina que custa R$ 600,00. Além disso, Vanda estima que gastará R$ 12,00 para comprar e estampar cada camiseta, que será vendida a R$ 20,00. Quantas camisetas Vanda terá que vender para começar a ter lucro com seu empreendimento (o que ocorrerá quando o valor obtido com as camisetas suplantar o custo de produção)?

10. Carminha recebeu duas propostas de emprego como vendedora de cosméticos porta-a-porta. A primeira indústria se propôs a pagar 16% do valor dos produtos que Carminha vender. A outra empresa ofereceu um salário fixo de R$ 720,00 ao mês, além de 7% do valor das vendas. Determine o valor dos produtos que Carminha deve vender mensalmente para que cada plano seja o mais vantajoso.

11. Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo.

Plano	**Custo fixo mensal**	**Custo adicional por minuto**
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	–	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utiliza 25 minutos por mês?

b) Para quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

12. Uma lâmpada incandescente de 100 W custa R$ 2,00. Já uma lâmpada fluorescente de 24 W, que é capaz de iluminar tão bem quanto a lâmpada incandescente de 100 W, custa R$ 13,40. Responda às questões abaixo, lembrando que, em uma hora, uma lâmpada de 100 W consome 100 Wh, ou 0,1 kWh. Em seus cálculos, considere que 1 kWh de energia custa R$ 0,50.

a) Levando em conta apenas o consumo de energia, ou seja, desprezando o custo de compra da lâmpada, determine quanto custa manter uma lâmpada incandescente de 100 W acesa por 750 horas. Faça o mesmo cálculo para uma lâmpada fluorescente de 24 W.

b) Para iluminar toda a sua casa, João comprou e instalou apenas lâmpadas fluorescentes de 24 W. Fernando, por sua vez, instalou somente lâmpadas incandescentes de 100 W em sua casa. Considerando o custo de compra de cada lâmpada e seu consumo de energia, determine em quantos dias Fernando terá gasto mais com iluminação que João. Suponha que cada lâmpada fica acesa 3 h por dia e que as casas possuem o mesmo número de lâmpadas.

13. Uma empresa possui 500 toneladas de grãos em seu armazém e precisa transportá-los a um cliente. O transporte pode ser feito por caminhões ou por trem.

Para cada tonelada transportada por trem paga-se R$ 8,00 de custo fixo e R$ 0,015 por quilômetro rodado.

O transporte rodoviário exige 25 caminhões. Para cada caminhão utilizado paga-se R$ 125,00 de custo fixo, além de R$ 0,50 por quilômetro rodado.

Supondo que x seja a distância entre o armazém e o cliente, para que intervalo de x o transporte por trem é mais vantajoso que o transporte por caminhões?

14. O Índice de Massa Corporal (IMC) é uma medida usada para determinar se a massa (ou o peso) de uma pessoa está dentro da faixa recomendada para sua altura. Sua fórmula é

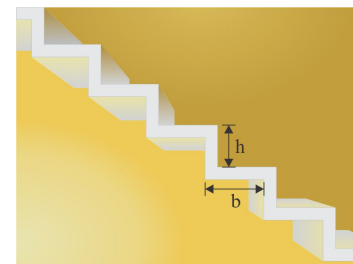
$$IMC = \frac{m}{h^2},$$

em que m é a massa (em quilos) e h é a altura (em metros) do indivíduo. Para ser considerada saudável, uma pessoa deve ter ICM entre 18,5 e 25. Determine em que faixa de peso um indivíduo de 1,80 m de altura deve se manter para ser considerado saudável.

15. Depois de encontrar uma iguana verde (*iguana iguana*) seriamente ferida, um biólogo faz o possível para mantê-la viva, começando pelo controle da temperatura ambiente (já que a iguana não regula a temperatura de seu corpo). Consultando um livro em inglês, o biólogo descobriu que a iguana deve ser mantida entre $79°F$ e $95°F$. Ajude o biólogo a converter para graus Celsius a faixa de temperatura correta para a iguana, usando a relação $F = \frac{9}{5}C + 32$, em que F é a temperatura em graus Fahrenheit e C a temperatura em graus Celsius.

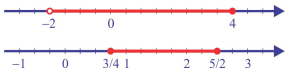
16. Segundo a norma, os degraus de uma escada devem ter entre 16 e 18 cm de altura (h). Já a largura (b) do degrau deve satisfazer a fórmula de Blondel

$$63 \text{ cm} \leq 2h + b \leq 64 \text{ cm}.$$

Determine o intervalo admissível da largura do degrau.

17. O perfil lipídico é um exame médico que avalia a dosagem dos quatro tipos principais de gordura no sangue: colesterol total (CT), colesterol HDL (conhecido como "bom colesterol"), colesterol LDL (o "mau colesterol")

e triglicérides (TG). Os valores desses quatro indicadores estão relacionados pela fórmula de Friedewald: CT = LDL + HDL + TG/5. A tabela abaixo mostra os valores normais dos lipídios sanguíneos para um adulto, segundo o laboratório SangueBom.

Indicador	Valores normais
CT	Até 200 mg/dl
LDL	Até 130 mg/dl
HDL	Entre 40 e 60 mg/dl
TG	Até 150 mg/dl

O perfil lipídico de Pedro revelou que sua dosagem de colesterol total era igual a 198 mg/dl, e que a de triglicérides era igual a 130 mg/dl. Sabendo que todos os seus indicadores estavam normais, qual o intervalo possível para o seu nível de LDL?

18. A linguiça calabresa belprato é vendida em duas embalagens, uma com 2,5 kg e outra com 1,75 kg. Se a embalagem de 1,75 kg custa R$16,00, quanto deve custar a embalagem de 2,5 kg para que seja vantajoso comprá-la?

Respostas dos Exercícios 2.8

1. a) Chamando de p o preço da gasolina (em reais), temos $2{,}39 \le p \le 2{,}79$.
b) Chamando de p o preço (em reais) de algum produto da loja, temos $p \le 4{,}99$.
c) Usando A para representar a altura de Rosana, em metros, temos $A \ge 1{,}5$.
d) Chamando de s o saldo bancário, temos $s > 0$.

2. a) $x > 3/2$ b) $x \ge -5/8$ c) $x \le 9$ d) $a < 14$ e) $z > 1/4$ f) $x \ge -2$ g) $x \ge -6$ h) $x \ge -1/3$ i) $w < -5/2$ j) $y > -2$

3. a) $x > 1/2$ b) $x \le -3$ c) $v \le 3$ d) $z < -7/4$ e) $x < 9/7$ f) $x > -3/5$ g) $x \le 1/3$ h) $x \le 2$ i) $x > 0$ j) $x < 3/7$ k) $x \ge 5/11$ l) $x < -1/2$ m) $x \le -1/3$ n) $x > 2/3$ o) $x < 9$ p) $x > 8/9$ q) $x > 10/3$ r) $x > -\frac{3}{5}$ s) $x \ge -\frac{1}{8}$ t) $x \le -1$

4. a) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{4} \le x \le 2$ c) $-3 \le x \le 3$ d) $1 \le x \le 4$ e) $1 \le x \le 4$ f) $6 \le x < 12$ g) $-2 < x \le 4$ h) $\frac{3}{4} \le x \le \frac{5}{2}$ i) $\frac{15}{2} < x < \frac{21}{2}$ j) $-2 \le x \le 0$ k) $-4 \le x \le 2$ l) $-\frac{1}{2} \le x \le 1$ m) $\frac{1}{4} \le x \le 4$ n) $\frac{1}{4} \le x \le 5$ o) $\frac{1}{4} \le x < \frac{11}{4}$

5.

−2 0 4

−1 0 3/4 1 2 5/2 3

6. O lado menor deve medir 20 m ou menos.

7. João pode ficar hospedado por um número de dias menor ou igual a 25/3. Como esse valor não é inteiro, João pode passar, no máximo, 8 dias hospedado no hotel.

8. $6{,}7 \le x < 10$

9. Ela terá que produzir mais de 75 camisetas.

10. A oferta da primeira empresa só é vantajosa se Carminha conseguir vender mais de R$ 8000,00 por mês. Caso contrário, a segunda proposta é a mais atraente.

11. a) O plano C é mais vantajoso.
b) o plano A é o mais vantajoso a partir de 50 minutos.

12. a) O gasto com a lâmpada incandescente atinge R$ 37,50, enquanto o gasto com a lâmpada fluorescente é igual a R$ 9,00
b) Depois de 100 dias, Fernando terá gasto mais com iluminação do que João.

13. $x > 175$ km

14. 59,94 kg $\le m \le$ 81 kg.

15. A iguana deve permanecer a uma temperatura entre 26,1°C e 35°C.

16. 27 cm $\le b \le$ 32 cm

17. 112 mg/dl $\le LDL \le$ 130 mg/dl

18. A embalagem de 2,5 kg deve custar não mais que R$ 22,86.

2.9 Polinômios e expressões algébricas

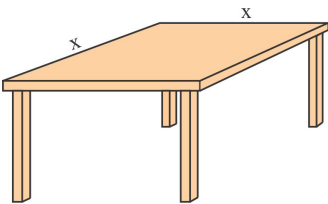



Figura 2.25: Uma mesa quadrada.

Apesar de terem grande utilidade na modelagem de situações práticas, as equações e inequações lineares não são suficientes para representar todos os problemas com os quais lidamos em nosso dia-a-dia. Para ilustrar esse fato, suponhamos que um marceneiro queira determinar o comprimento do lado de uma mesa quadrada para que a superfície do tampo da mesa tenha uma área equivalente a 2,5 m^2.

Como observamos na Figura 2.25, uma mesa quadrada tem lados com o mesmo comprimento, ao qual associamos a incógnita x. Nesse caso, a área do tampo é dada simplesmente por x^2. Tendo em vista que o marceneiro deseja que essa área seja igual a 2,5 m^2, obtemos a equação

$$x^2 = 2{,}5.$$

Note que a equação acima não é linear, pois a variável está elevada ao quadrado. Expressões que envolvem potências inteiras de uma variável são chamadas **polinômios**.

Polinômio

Um **polinômio** na variável x é uma expressão na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

em que n é um número inteiro não negativo e $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são coeficientes reais, com $a_n \neq 0$.

Cada termo na forma a_ix^i é conhecido como **monômio**. O **grau** do polinômio é n, o maior expoente de seus monômios. O monômio a_0 (que é equivalente a a_0x^0) é chamado **termo constante**.

Problema 1. Polinômios

Indique quais das expressões abaixo são polinômios.

a) $3x - 2$

b) $y^6 - 3y^4 + 4y$

c) $8 + 2b^2 - 5b - b^3$

d) $\sqrt{x} + 8$

e) $y^{2/3} + y - 1$

f) 3

g) $4x - \frac{1}{x}$

h) $2w^3 - \sqrt{3}w + \frac{1}{2}$

Solução.

a) $3x - 2$ é um polinômio de grau 1, com coeficientes $a_1 = 3$ e $a_0 = -2$.

b) $y^6 - 3y^4 + 4y$ é um polinômio de grau 6 na variável y. Seus coeficientes são $a_6 = 1$, $a_5 = 0$, $a_4 = -3$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 4$ e $a_0 = 0$.

Em um polinômio de grau 6, qualquer coeficiente a_i pode ser zero, com exceção de a_6.

c) $8 + 2b^2 - 5b - b^3$ é um polinômio de grau 3 na variável b. Colocando os monômios em ordem decrescente de grau, obtemos $-b^3 + 2b^2 - 5b + 8$. Logo, os coeficientes são $a_3 = -1$, $a_2 = 2$, $a_1 = -5$ e $a_0 = 8$.

d) $\sqrt{x} + 8$ não é um polinômio, pois a variável x aparece dentro de uma raiz.

e) $y^{2/3} + y - 1$ não é um polinômio, já que, em um dos termos da expressão, a variável y está elevada ao expoente $2/3$, que não é inteiro.

f) 3 é um polinômio de grau 0, composto apenas pelo termo constante $a_0 = 3$.

g) $4x - \frac{1}{x}$ não é um polinômio, já que a variável aparece no denominador do segundo termo.

h) $2w^3 - \sqrt{3}w + \frac{1}{2}$ é um polinômio de grau 3 na variável w, com coeficientes $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = -\sqrt{3}$ e $a_0 = \frac{1}{2}$.

Observe que, por serem número reais quaisquer, os coeficientes podem envolver raízes e frações. No exemplo (h), só não teríamos um polinômio se a variável aparecesse dentro da raiz ou no denominador da fração.

Agora, tente o Exercício 1.

Damos os nomes de **binômio** e **trinômio** aos polinômios que têm dois e três termos, respectivamente. Assim, o polinômio do item (a) do Problema 1 é um binômio de grau 1. Já o polinômio do item (b) é um trinômio de grau 6.

O restante dessa seção é dedicado à manipulação de expressões algébricas, com ênfase nos polinômios.

■ Soma e subtração de expressões algébricas

Para somar (ou subtrair) polinômios ou outras expressões algébricas, devemos somar (ou subtrair) os termos semelhantes, ou seja, os termos com as mesmas potências. Isso é feito com o auxílio da propriedade associativa, que vimos no Capítulo 1.

Exemplo 2. Soma e subtração de expressões

a)

$$\begin{aligned}(-6x^2-2x+3)\ +\ (x^3+2x^2+3x+1) \\ &= x^3+(-6x^2+2x^2)+(-2x+3x)+(3+1) \\ &= x^3+(-6+2)x^2+(-2+3)x+(3+1) \\ &= x^3-4x^2+x+4.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(2x^4-3x^3+5x^2+x-5)\ -\ (-3x^3+x^2+2x-8) \\ &= 2x^4-3x^3+5x^2+x-5+3x^3-x^2-2x+8 \\ &= 2x^4+(-3x^3+3x^3)+(5x^2-x^2)+(x-2x)+(-5+8) \\ &= 2x^4+(-3+3)x^3+(5-1)x^2+(1-2)x+(-5+8) \\ &= 2x^4+4x^2-x+3.\end{aligned}$$

Atenção
Lembre-se de que

$$-(a-b)=-a+b.$$

c)

$$\begin{aligned}(x^2-4xz+z^2-x+10)\ -\ (3x^2+2xz-5z^2-2z) \\ &= x^2-4xz+z^2-x+10-3x^2-2xz+5z^2+2z \\ &= (x^2-3x^2)+(-4xz-2xz)+(z^2+5z^2)-x+2z+10 \\ &= (1-3)x^2+(-4-2)xz+(1+5)z^2-x+2z+10 \\ &= -2x^2-6xz+6z^2-x+2z+10.\end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 2.

■ Produto de expressões algébricas

Para calcular o produto de expressões algébricas, aplicamos a propriedade distributiva tantas vezes quanto for necessário.

Suponha, por exemplo, que a, b, c e d representem quatro expressões algébricas quaisquer. Nesse caso, para calcular o produto $(a+b)(c+d)$, fazemos

$$(a+b)(c+d) = a(c+d)+b(c+d) \qquad \text{Fazendo } (c+d)=e, \text{ temos } (a+b)e=ae+be.$$

$$= ac+ad+bc+bd \qquad \text{Propriedade distributiva: } a(c+d)=ac+ad.$$

Repare que, como resultado desse produto, obtivemos quatro termos, cada qual contendo o produto de uma expressão de $(a+b)$ por outra expressão de $(c+d)$:

$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Exemplo 3. Produto de binômios

As expressões envolvidas nesse primeiro exemplo são os monômios $a = x$, $b = 5$, $c = x^2$ e $d = 3x$.

a)

$$\begin{aligned}(x+5)(x^2+3x) &= x\cdot x^2 + x\cdot 3x + 5\cdot x^2 + 5\cdot 3x && \text{Propriedade distributiva.}\\ &= x^3+3x^2+5x^2+15x && \text{Cálculo dos produtos.}\\ &= x^3+8x^2+15x && \text{Soma dos termos semelhantes.}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(2x-6)(3x+4) &= 2x\cdot 3x + 2x\cdot 4 - 6\cdot 3x - 6\cdot 4 && \text{Propriedade distributiva.}\\ &= 6x^2+8x-18x-24 && \text{Cálculo dos produtos.}\\ &= 6x^2-10x-24 && \text{Soma dos termos semelhantes.}\end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 3.

É bom lembrar que a regra acima vale não apenas para binômios, mas para o produto de quaisquer expressões algébricas com dois termos. Ainda assim, depois de calcular o produto, é possível agrupar termos semelhantes. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4. Produto de expressões algébricas

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}-3)\left(4-\frac{2}{x}\right) &= \sqrt{x}\cdot 4 + \sqrt{x}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right) - 3\cdot 4 - 3\cdot\left(-\frac{2}{x}\right) && \text{Propriedade distributiva.}\\ &= 4\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} - 12 + \frac{6}{x} && \text{Cálculo dos produtos.}\end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 4.

Para calcular o produto expressões que envolvem polinômios com mais de dois termos, também recorremos à propriedade distributiva, como mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 5. Produto de polinômios

$$\begin{aligned}(x^2-2x)\cdot(x^3-4x+2) &= x^2\cdot x^3 + x^2\cdot(-4x) + x^2\cdot 2 - 2x\cdot x^3 - 2x\cdot(-4x) - 2x\cdot 2\\ &= x^5-4x^3+2x^2-2x^4+8x^2-4x\\ &= x^5-2x^4-4x^3+10x^2-4x.\end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 5.

Nesse exemplo, após multiplicarmos cada termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo polinômio, somamos os monômios obtidos, agrupando os termos semelhantes.

Produtos notáveis

Alguns produtos de expressões algébricas são encontrados tão frequentemente, que são chamados **produtos notáveis**. Embora possamos calcular esses produtos usando a propriedade distributiva, acabamos, com o uso, decorando as fórmulas empregadas em sua obtenção.

Não se sinta obrigado a decorar as fórmulas ao lado. Se você não se lembrar de alguma, recorra à propriedade distributiva para deduzi-la, em lugar de correr o risco de escrever um resultado errado.

Produtos notáveis

Suponha que a e b sejam números reais, variáveis ou expressões algébricas.

Produto	Exemplo
1. Quadrado da soma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(7+3)^2 = 7^2 + 2\cdot7\cdot3 + 3^2 = 100$
2. Quadrado da diferença $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(5-4)^2 = 5^2 - 2\cdot5\cdot4 + 4^2 = 1$
3. Produto da soma pela diferença $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(5+3)(5-3) = 5^2 - 3^2 = 16$
4. Cubo da soma $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(6+4)^3 = 6^3+3\cdot6^2\cdot4+3\cdot6\cdot4^2+4^3 = 1000$
5. Cubo da diferença $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(9-7)^3 = 9^3 - 3\cdot9^2\cdot7 + 3\cdot9\cdot7^2 - 7^3 = 8$

É fácil provar as fórmulas dos produtos notáveis. Como exercício, vamos deduzir a expressão obtida para o produto da soma pela diferença de duas expressões:

$$(a+b)(a-b) = a\cdot a + a\cdot(-b) + b\cdot a + b\cdot(-b)$$ Propriedade distributiva.

$$= a^2 - ab + ab - b^2$$ Cálculo dos produtos.

$$= a^2 - b^2$$ Simplificação do resultado.

Lembre-se de que, pela propriedade comutativa da multiplicação, $ba = ab$.

Agora, você pode usar a propriedade distributiva para provar as demais fórmulas.

Problema 6. Produtos notáveis

Calcule os produtos.

a) $(2x+5)^2$

b) $(x^3+\sqrt{5})^2$

c) $(3x+4y)^2$

d) $(x-2)^2$

e) $\left(5-\frac{4}{y}\right)^2$

f) $\left(3x^2-\frac{3}{2}y\right)^2$

g) $(x-2)(x+2)$

h) $(4x-6y)(4x+6y)$

i) $\left(x^3-\frac{1}{2}\right)\left(x^3+\frac{1}{2}\right)$

j) $(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})$

k) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)$

l) $(y+4)^3$

m) $(5-2w)^3$

n) $(\sqrt[3]{x}-1)^3$

Solução.

Se você sentir dificuldade para compreender algum cálculo feito nesses exercícios, dê uma olhadela no Capítulo 1.

a)

$$\begin{aligned}(2x+5)^2 &= (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 5 + 5^2\\ &= 4x^2 + 20x + 25\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(x^3+\sqrt{5})^2 &= (x^3)^2 + 2\cdot x^3\cdot\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2\\ &= x^6 + 2\sqrt{5}x^3 + 5\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(3x+4y)^2 &= (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 4y + (4y)^2\\ &= 9x^2 + 24xy + 16y^2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2\\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\left(5-\frac{4}{y}\right)^2 &= 5^2 - 2\cdot 5\cdot\frac{4}{y} + \left(\frac{4}{y}\right)^2\\ &= 25 - \frac{40}{y} + \frac{16}{y^2}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\left(3x^2-\frac{3}{2}y\right)^2 &= (3x)^2 - 2\cdot 3x^2\cdot\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}y\right)^2\\ &= 9x^4 - 9x^2y + \frac{9y^2}{4}\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}(x-2)(x+2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}(4x-6y)(4x+6y) &= (4x)^2 - (6y)^2\\ &= 16x^2 - 36y^2\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}\left(x^3-\frac{1}{2}\right)\left(x^3+\frac{1}{2}\right) &= (x^3)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= x^6 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2}) &= (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2\\ &= x - 2 \quad \text{(supondo que } x \geq 0)\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right) &= x^2-\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\\ &= x^2-\frac{1}{x^4}\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}(y+4)^3 &= y^3+3\cdot y^2\cdot 4+3\cdot y\cdot 4^2+4^3\\ &= y^3+12y^2+48y+64\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}(5-2w)^3 &= 5^3-3\cdot 5^2\cdot 2w+3\cdot 5\cdot (2w)^2-(2w)^3\\ &= 125-150w+60w^2-8w^3\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x}-1)^3 &= (\sqrt[3]{x})^3-3\cdot(\sqrt[3]{x})^2\cdot 1+3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot 1^2-1^3\\ &= x^{(1/3)\cdot 3}-3x^{(1/3)\cdot 2}+3\cdot x^{1/3}-1\\ &= x^{3/3}-3x^{2/3}+3\cdot x^{1/3}-1\\ &= x-3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}-1\end{aligned}$$

Agora, tente os Exercícios 6 e 7.

■ Fatoração

Nas duas últimas subseções, vimos como a propriedade distributiva pode ser usada para expandir uma expressão algébrica que havia sido expressa como o produto de fatores. Agora, usaremos novamente a propriedade distributiva para percorrer o caminho inverso, ou seja, para **fatorar** uma expressão. Nesse novo processo, tomamos um expressão algébrica expressa na forma expandida e a reescrevemos como o produto de fatores mais simples.

A fatoração de polinômios é importante para a simplificação de expressões, bem como para a solução de equações polinomiais, como veremos adiante.

Exemplo 7. Pondo termos em evidência

Para fatorar o polinômio $3x^2 - 6x$, vamos decompor cada um de seus dois termos no produto de fatores irredutíveis:

$$3x^2 - 6x = 3\cdot x\cdot x - 2\cdot 3\cdot x.$$

Agora que cada termo do polinômio foi escrito como o produto de fatores simples, observamos que os fatores 3 e x aparecem nos dois termos, de modo que temos

$$3x^2 - 6x = 3x\cdot x - 3x\cdot 2.$$

Colocando, então, o termo $3x$ em evidência, obtemos

$$3x^2 - 6x = 3x\cdot(x-2),$$

que é a forma fatorada do polinômio.

Também podemos fatorar passo a passo uma expressão, identificando um fator comum de cada vez. Veja como essa estratégia poderia ser usada para fatorar o polinômio do exemplo acima:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x &= x \cdot 3x - x \cdot 6 && \text{Identificando o termo comum } x. \\ &= x(3x-6) && \text{Pondo } x \text{ em evidência.} \\ &= x(3 \cdot x - 3 \cdot 2) && \text{Identificando o termo comum 3.} \\ &= 3x(x-2) && \text{Pondo 3 em evidência também.} \end{aligned}$$

Observe que $x(x^2-2x)$ e $3x(x-2)$ são formas alternativas de se escrever o polinômio $3x^2 - 6x$ como o produto de dois fatores. Apesar de as duas formas estarem corretas, normalmente preferimos a última, já que ele contém o maior número possível de termos em evidência.

Fatoração de expressões

Suponha que a, b e c sejam números reais, variáveis ou expressões algébricas.

	Fatoração	Exemplo
1.	$ab + ac = a(b+c)$	$10x + 20 = 10 \cdot x + 10 \cdot 2 = 10(x+2)$
2.	$ab - ac = a(b-c)$	$5 - 20x^2 = 5 \cdot 1 - 5 \cdot 4x^2 = 5(1-x^2)$

Problema 8. Fatoração de expressões

Fatore as expressões.

a) $7x^2 - 21x^3$

b) $3x^2 - 18x + 39$

c) $2xy^4 - 8xy^2z - 6xy^3z^2$

d) $(3x-5)^2 - (3x-5)2x$

e) $\dfrac{4x^2 - 20x}{2x}$

f) $\dfrac{6(x^2-3) - x(x^2-3)}{6-x}$

g) $(5x^2+1)(x-2) + (x-1)(x-2)$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} 7x^2 - 21x^3 &= 7 \cdot x \cdot x - 3 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot x && \text{Decomposição dos termos.} \\ &= 7x^2 \cdot 1 - 7x^2 \cdot 3x && 7x^2 \text{ é um fator comum.} \\ &= 7x^2(1-3x) && \text{Expressão fatorada.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 39 &= 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 13 && 3 \text{ é um fator comum.} \\ &= 3(x^2 - 6x + 13) && \text{Expressão fatorada.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2xy^4 - 8xy^2z - 6xy^3z^2 &= 2xy^2 \cdot y^2 - 2xy^2 \cdot 4z - 2xy^2 \cdot 3yz^2 && 2xy^2 \text{ é um fator comum.} \\ &= 2xy^2(y^2 - 4z - 3yz^2) && \text{Expressão fatorada.} \end{aligned}$$

d)

$$(3x-5)^2 - (3x-5)2x = (3x-5)\cdot(3x-5-2x) \quad 3x-5 \text{ é um fator comum.}$$
$$= (3x-5)(x-5) \quad \text{Expressão fatorada.}$$

e)

$$\frac{4x^2-20x}{2x} = \frac{4x\cdot x - 4x\cdot 5}{2x} \quad 4x \text{ é um fator comum do numerador.}$$
$$= \frac{4x(x-5)}{2x} \quad \text{Numerador fatorado.}$$
$$= \frac{2x}{2x}\cdot\frac{2(x-5)}{1} \quad 2x \text{ é comum ao numerador e ao denominador.}$$
$$= 2(x-5) \quad \text{Expressão simplificada.}$$

f)

$$\frac{6(x^2-3)-x(x^2-3)}{6-x} = \frac{(6-x)\cdot(x^2-3)}{6-x} \quad x^2-3 \text{ é um fator comum do numerador.}$$
$$= \frac{6-x}{6-x}\cdot\frac{x^2-3}{1} \quad 6-x \text{ é comum ao numerador e ao denominador.}$$
$$= x^2-3 \quad \text{Expressão simplificada.}$$

g)

Repare que, nesse problema, escrevemos a expressão como o produto de três fatores.

$$(5x^2+1)(x-2)+(x-1)(x-2) = (x-2)(5x^2+1+x-1) \quad x-2 \text{ é um fator comum.}$$
$$= (x-2)(5x^2+x) \quad \text{Expressão simplificada.}$$
$$= (x-2)(x\cdot 5x + x\cdot 1) \quad x \text{ é um novo fator comum.}$$
$$= (x-2)x(5x+1) \quad \text{Expressão fatorada.}$$

Agora, tente o Exercício 12.

■ Reconhecendo produtos notáveis

A **expansão** e a **fatoração** têm propósitos opostos, como indicado abaixo.

$$(x+1)^2 \underset{\text{Fatoração}}{\overset{\text{Expansão}}{\rightleftharpoons}} x^2+2x+1.$$

Além de serem úteis para a expansão de expressões, as fórmulas de produtos notáveis apresentadas acima são frequentemente usadas para fatorar polinômios.

Fatoração usando produtos notáveis

Suponha que a e b sejam números reais, variáveis ou expressões algébricas.

Forma fatorada	**Exemplo**
1. Quadrado perfeito da soma $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$	$x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2$
2. Quadrado perfeito da diferença $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$	$y^2-8y+16=y^2-2\cdot y\cdot 4+4^2=(y-4)^2$
3. Diferença de quadrados $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	$x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$

Problema 9. Diferença de quadrados

Fatore as expressões.

a) $4x^2 - 9$

b) $\dfrac{y^2}{16} - 25$

c) $x^2 - 3$

d) $49 - y^6$

e) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{4}$

f) $(12 - x)^2 - 81$

Solução.

a)

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 \quad \text{Identificação das potências.}$$
$$= (2x - 3)(2x + 3) \quad \text{Polinômio fatorado.}$$

b)

$$\frac{y^2}{16} - 25 = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 5^2 \quad \text{Identificação das potências.}$$
$$= \left(\frac{y}{4} - 5\right)\left(\frac{y}{4} + 5\right) \quad \text{Polinômio fatorado.}$$

c)

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 \quad \text{Identificação das potências.}$$
$$= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \quad \text{Polinômio fatorado.}$$

d)

$$49 - y^6 = 7^2 - (y^3)^2 \quad \text{Identificação das potências.}$$
$$= (7 - y^3)(7 + y^3) \quad \text{Polinômio fatorado.}$$

e)

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{Identificação das potências.}$$
$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{Polinômio fatorado.}$$

f)

$$(12 - x)^2 - 81 = (12 - x)^2 - 9^2 \quad \text{Identificação das potências.}$$
$$= (12 - x - 9)(12 - x + 9) \quad \text{Polinômio fatorado.}$$
$$= (3 - x)(21 - x) \quad \text{Expressão simplificada.}$$

Agora, tente o Exercício 13.

Dá-se o nome de **trinômio quadrado perfeito** ao trinômio (soma de três monômios) que é o quadrado de um binômio. Repare que um trinômio quadrado perfeito tem dois termos que são quadrados, e um termo que, desconsiderado o sinal, é o dobro do produto das raízes quadradas dos outros termos. O sinal desse termo misto é o mesmo adotado na forma fatorada:

$$(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^2 \qquad \text{e} \qquad (a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)^2$$

Problema 10. Trinômios quadrados perfeitos

Fatore os polinômios.

a) $9x^2 - 30x + 25$

b) $8 + 8x^2 + 2x^4$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} 9x^2 - 30x + 25 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 && \text{Identificação das potências.} \\ &= (3x - 5)^2 && \text{Polinômio fatorado.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 8 + 8x^2 + 2x^4 &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4x^2 + 2 \cdot x^4 && \text{2 é um fator comum.} \\ &= 2(4 + 4x^2 + x^4) && \text{2 em evidência.} \\ &= 2(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x^2 + (x^2)^2) && \text{Identificação das potências.} \\ &= 2(2 + x^2)^2 && \text{Polinômio fatorado.} \end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 14.

Exercícios 2.9

1. Indique se as expressões abaixo são polinômios. Em caso afirmativo, forneça o grau do polinômio.

a) 5

b) $2s^3 - 4s^2 + 3 - 6s^4 - s$

c) $2 + \sqrt{x^2}$

d) $\frac{1}{x^2-3x+1}$

e) $3{,}7x^{100}$

f) $5x^2 - 10x^{-1} + 6$

g) $\frac{x^6+x^2+5}{3}$

h) $\sqrt{5}x^2 + 2x\sqrt{8} - \sqrt{7}$

i) $6x^0 + x^1$

j) $2^x - 12$

2. Simplifique as expressões abaixo, reduzindo os termos semelhantes.

a) $(3x + 2) + (5x - 4)$

b) $(2y - 3) - (4y - 5)$

c) $(y^3 - 4y^2 + y - 1) - (3y^2 + y - 6)$

d) $(-5z + 2x - 6) + 3(z + 4x + 2)$

e) $(2a - 5b + 3c) + (6a + 2ab - 3c)$

f) $-2(a - 2b - 3ab) - 4(b + 2a - 2ab)$

g) $\frac{x-2}{2} - (2 - x)$

h) $\frac{2}{3}(2x - 1) + \frac{4}{3}(2 - x)$

i) $\frac{1}{2}(x + 2y - 4) + \frac{1}{3}(3y - x + 9)$

j) $\frac{1}{2}(a - 3ab + 2b) + \frac{1}{3}(a - 3b + 4ab)$

3. Expanda as expressões e simplifique-as.

a) $\left(\frac{x}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-2x\right)$.
b) $\left(-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{3x}{4}\right)$.
c) $(5x-3)(2x+4)$
d) $(8-3x)(x^2+6)$
e) $-2(1-x)(3+\frac{x}{2})$.
f) $(0{,}7x-0{,}2)(4-0{,}6x)$
g) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-x\right)$.
h) $\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{5}{4}+2x\right)$.
i) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{3}\right)$.
j) $(12x-5)(12x+5)$
k) $(3x+4)^2$
l) $(x-\sqrt{3})^2$

4. Efetue os produtos abaixo.

a) $(x^{-1}+3)(x+2)$
b) $(3x^2+2)(6-\sqrt{x})$
c) $(\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-9)$
d) $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-5\right)(\sqrt{x}-1)$
e) $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(4+\frac{1}{x^2}\right)$

5. Efetue os produtos abaixo.

a) $3x^2(x^3-2x^2-4x+5)$
b) $-4x^3(x^2+2x-1)$
c) $xy^2(2x+3xy+4y)$
d) $(3x+5)(3x^2-4x+2)$
e) $(2-x^2)(3x^3+6x^2-x)$
f) $(2x^2-\frac{1}{2})(x^2+3)$
g) $(x^3+1)(x^4-3x^2+2)$
h) $(3-2y+y^2)(2y^2-5y+4)$
i) $(x-y+1)(2x-4y+6)$
j) $(x^2+2y)(3x-2xy-y)$
k) $(2x-1)^3$
l) $(x-3)(x+3)(x-2)$
m) $(2w-3)(w-1)(3w+2)$
n) $(x^2+3)(x^2-2)(2x^2-5)$
o) $(a+2b)(3a-b)(2a+3b)$
p) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

6. Expanda as expressões abaixo.

a) $(x+2)^2$
b) $(3x+8)^2$
c) $(x^2-\sqrt{5})^2$
d) $(2u+7v)^2$
e) $(4-y)^2$
f) $(3-2y)^2$
g) $(-2-x)^2$
h) $(\frac{x}{2}+2)^2$
i) $(\sqrt{2}x+1)^2$
j) $\left(3-\frac{5}{x}\right)^2$
k) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$
l) $(4-x^2)^2$
m) $(x^2-x)^2$
n) $(2x^2-y)^2$
o) $(x^2+\sqrt{x})^2$
p) $(x-2)^2(3-x)^2$
q) $\left(\frac{x+3}{1-x}\right)^2$
r) $(2x+1)^3$
s) $(3-y)^3$
t) $(2\sqrt[3]{x}-3)^3$

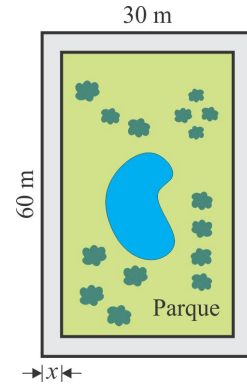
7. Efetue os produtos abaixo.

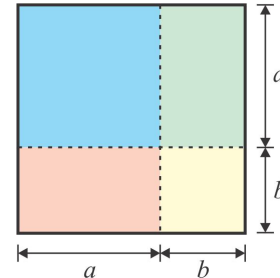
a) $(x-4)(x+4)$
b) $(5x-6)(5x+6)$
c) $(2x-7y)(2x+7y)$
d) $(2-x)(x+2)$
e) $(\frac{3x}{2}-\frac{1}{3})(\frac{3x}{2}+\frac{1}{3})$
f) $(x-\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$
g) $(y^2-4)(y^2+4)$
h) $(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})$
i) $(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)$
j) $(2\sqrt{x}-\sqrt{5})(2\sqrt{x}+\sqrt{5})$

8. O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de

$$\frac{x+1}{x}=x.$$

Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.

9. Um pequeno parque retangular, cujas dimensões são apresentadas abaixo, tem uma região gramada, circundada por um passeio de largura x. Defina uma expressão para a área da região gramada, lembrando que a área de um retângulo de lados x e y é igual a xy.

10. Um quadrado foi dividido em quatro retângulos como mostra a figura abaixo.

a) Calcule a área de cada retângulo, lembrando que a área de um retângulo de lados x e y é dada por xy.
b) Some as áreas dos retângulos.
c) Compare o valor obtido no item (b) com a área do quadrado, que é dada por $(a+b)^2$.

11. Calcule as expressões abaixo, simplificando o resultado. Sempre que necessário, suponha que os termos no interior das raízes são não negativos e que os denominadores são diferentes de zero.

a) $\frac{2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{5(x^2-3)}$
b) $\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{xy}{4}\right)$
c) $\frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}{4-(x-2)^2}$
d) $\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-1)^2+2x-3}$
e) $\frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x-25}}$
f) $\frac{(\sqrt{2x}+\sqrt{5})(\sqrt{2x}-\sqrt{5})}{(x-5)^2-x^2}$
g) $\frac{(x-3)^2-(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2-x}$
h) $\frac{(x+2)^2-(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}{(5+x)^2}$

12. Reescreva as expressões abaixo, colocando algum termo em evidência e simplificando o resultado sempre que possível. Quando necessário, suponha que os denominadores são não nulos.

a) $4 - 2y$
b) $6x - 3$
c) $-4x - 10$
d) $35x - 5z + 15y$
e) $-10a + 14ab$
f) $x^2 - 2x$
g) $8ab - 12b + 4ab^2$
h) $3x^5 - 9x^4 + 18x^7$
i) $\dfrac{3x}{32} - \dfrac{21}{4}$
j) $\dfrac{5x}{2} - \dfrac{x^2}{2}$
k) $xy + x^2y^2$
l) $4xy + 8yz - 12w^2y$
m) $xy^2 + y^5 + 3zy^3$
n) $-\dfrac{5}{12x} + \dfrac{10}{3x^3}$
o) $(4x - 1)^2 + (4x - 1)3x$
p) $(5x+1)(x-2) - 4(x-2)$
q) $\dfrac{6x^2 - 24x}{3x}$
r) $\dfrac{x(3 - 2x) - 2(3 - 2x)}{x - 2}$

13. Fatore as expressões.

a) $x^2 - 9.$
b) $16x^2 - 1$
c) $9 - \dfrac{x^2}{4}$
d) $x^2 - 64y^2$
e) $4y^2 - 5$
f) $36x^2 - 100.$
g) $16 - 49x^2.$
h) $2u^2 - v^2$
i) $25 - x^8$
j) $x^4 - x^2.$
k) $\frac{9x^2}{4} - \frac{1}{9}.$
l) $x - 16.$
m) $\dfrac{36}{y^2} - \dfrac{1}{9}$
n) $(x - 7)^2 - 4$

14. Fatore as expressões.

a) $x^2 + 10x + 25$
b) $4x^2 - 12x + 9$
c) $3x^2 + 12x + 12$
d) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$
e) $16x^2 + 40xy + 25y^2$
f) $x^2y^2 - 2xy + 1$
g) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
h) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}$

Respostas dos Exercícios 2.9

1.
a) Polinômio de grau 0
b) Polinômio de grau 4
c) Não é polinômio
d) Não é polinômio
e) Polinômio de grau 100
f) Não é polinômio
g) Polinômio de grau 6
h) Polinômio de grau 2
i) Polinômio de grau 1
j) Não é polinômio

2.
a) $8x - 2$
b) $2 - 2y$
c) $y^3 - 7y^2 + 5$
d) $14x - 2z$
e) $8a + 2ab - 5b$
f) $-10a + 14ab$
g) $\frac{3}{2}x - 3$
h) 2
i) $1 + \frac{x}{6} + 2y$
j) $\frac{5}{6}a - \frac{ab}{6}$

3.
a) $\frac{2x}{15} - \frac{2x^2}{5}$
b) $\frac{3x^2}{8} - x$
c) $10x^2 + 14x - 12$
d) $-3x^3 + 8x^2 - 18x + 48$
e) $x^2 + 5x - 6$
f) $0{,}42x^2 + 2{,}68x - 0{,}8$
g) $-x^2 + \frac{5x}{6} - \frac{1}{6}$
h) $\frac{15}{4} - \frac{43x}{8} + x^2$
i) $-\frac{2x^2}{9} + x - \frac{9}{8}$
j) $144x^2 - 25$
k) $9x^2 + 24x + 16$
l) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

4.
a) $3x + \frac{2}{x} + 7$
b) $-3x^{5/2} + 18x^2 - 2\sqrt{x} + 12$
c) $x - 81$
d) $-5\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 7$
e) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 4$

5.
a) $3x^5 - 6x^4 - 12x^3 + 15x^2$
b) $-4x^5 - 8x^4 + 4x^3$
c) $3x^2y^3 + 2x^2y^2 + 4xy^3$
d) $9x^3 + 3x^2 - 14x + 10$
e) $-3x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 2x$
f) $-\frac{3}{2} + \frac{11x^2}{2} + 2x^4$
g) $2 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 - 3x^5 + x^7$
h) $2y^4 - 9y^3 + 20y^2 - 23y + 12$
i) $2x^2 - 6xy + 8x + 4y^2 - 10y + 6$
j) $3x^3 + 6xy - x^2y - 2x^3y - 2y^2 - 4xy^2$
k) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
l) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
m) $6 - w - 11w^2 + 6w^3$
n) $30 - 17x^2 - 3x^4 + 2x^6$
o) $6a^3 + 19a^2b + 11ab^2 - 6b^3$
p) $a^4 - b^4$

6.
a) $4 + 4x + x^2$
b) $9x^2 + 48x + 64$
c) $x^4 - 2\sqrt{5}x^2 + 5$
d) $4u^2 + 28uv + 49v^2$
e) $y^2 - 8y + 16$
f) $9 - 12y + 4y^2$
g) $4 + 4x + x^2$
h) $4 + 2x + x^2/4$
i) $1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2$
j) $\frac{25}{x^2} - \frac{30}{x} + 9$
k) $4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$
l) $16 - 8x^2 + x^4$
m) $x^2 - 2x^3 + x^4$
n) $4x^4 - 4x^2y + y^2$
o) $x + 2x^(5/2) + x^4$
p) $36 - 60x + 37x^2 - 10x^3 + x^4$
q) $\frac{3}{1-x} + \frac{x}{1-x}$
r) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
s) $-y^3 + 9y^2 - 27y + 27$
t) $-36x^{2/3} + 54\sqrt[3]{x} + 8x - 27$

7.
a) $x^2 - 16$
b) $25x^2 - 36$
c) $4x^2 - 49y^2$
d) $4 - x^2$
e) $-\frac{1}{9} + \frac{9x^2}{4}$
f) $-\frac{1}{x^2} + x^2$
g) $-16 + y^4$
h) $-3 + z^2$
i) $x - 25$
j) $-5 + 4x.$

8. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

9. $A = (60 - 2x)(30 - 2x) = 1800 - 180x + 4x^2$

10. ...

11.
a) $\frac{2}{5}$
b) $9y - 4x$
c) $\frac{1}{x}$
d) 1
e) $\sqrt{x - 25}$
f) $-\frac{1}{5}$
g) 6
h) 1

12.
a) $2(2 - y)$
b) $3(2x - 1)$
c) $-2(5 + 2x)$
d) $5(7x - z + 3y)$
e) $2a(-5 + 7b)$
f) $x(x - 2).$
g) $4b(2a - 3 + ab)$
h) $3x^4(x-3+6x^3)$
i) $\frac{3}{4}\left(\frac{x}{8} - 7\right)$
j) $\frac{x}{2}(5 - x)$
k) $xy(1 + xy)$
l) $-4y(3w^2 - x - 2z)$
m) $y^2(x + y^3 + 3yz)$
n) $\frac{5}{3x}\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{x^2}\right)$
o) $(4x-1)(7x-1)$
p) $(5x - 3)(x - 2)$
q) $2x - 8$
r) $3 - 2x$

13.
a) $(x - 3)(x + 3)$
b) $(4x - 1)(4x + 1)$
c) $(3 - \frac{x}{2})(3 + \frac{x}{2})$
d) $(x - 8y)(x + 8y)$
e) $(2y - \sqrt{5})(2y + \sqrt{5})$
f) $4(3x - 5)(3x + 5)$
g) $(4 - 7x)(4 + 7x)$
h) $(\sqrt{2}u - v)(\sqrt{2}u + v)$
i) $(5 - x^4)(5 + x^4)$
j) $(x - 1)x^2(x + 1)$
k) $\frac{1}{36}(9x - 2)(9x + 2)$
l) $(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)$
m) $(\frac{6}{y} - \frac{1}{3})(\frac{6}{y} + \frac{1}{3})$
n) $(x - 9)(x - 5)$

14.
a) $(x + 5)^2$
b) $(2x - 3)^2$
c) $3(x + 2)^2$
d) $(x - \frac{1}{2})^2$
e) $(4x + 5y)^2$
f) $(4x + 5y)^2$
g) $(xy - 1)^2$
h) $(x - \sqrt{3})^2$
i) $(\frac{x}{2} + \frac{1}{3})^2$

2.10 Equações quadráticas

Imagine que um engenheiro deseje projetar uma piscina retangular que ocupe uma área de 128 m^2 de um terreno, e que tenha um lado igual ao dobro do outro. Quais devem ser as dimensões da piscina (ignorando sua profundidade)?

Para resolver esse problema, o engenheiro pode definir como incógnita a dimensão do lado menor da piscina, que associaremos à sua largura. Se esse valor for definido como x, o outro lado medirá $2x$, como mostrado na Figura 2.26. Dessa forma, a área do terreno ocupada pela piscina será dada por

$$\text{largura} \times \text{comprimento} = x \cdot 2x = 2x^2.$$

Figura 2.26: Uma piscina com comprimento igual ao dobro da largura.

Para determinar o valor de x, usamos o fato de que a área deve ser igual a 128 m^2, o que nos leva à equação

$$2x^2 = 128 \qquad \text{ou} \qquad 2x^2 - 128 = 0.$$

Como essa equação envolve um polinômio de grau 2, chamamo-la de **equação do segundo grau**. Uma definição mais precisa desse tipo de equação é dada abaixo.

Equação quadrática

Uma **equação quadrática** – ou **equação do segundo grau** –, na variável x, é uma equação que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que a, b e c são coeficientes reais, com $a \neq 0$.

Observe que, quando $a = 0$, a equação torna-se linear, não sendo necessário resolvê-la como equação quadrática.

Como veremos adiante, a resolução de uma equação quadrática – isto é, a determinação de sua raiz, x – é facilitada quando um dos coeficientes b ou c é igual a zero. Entretanto, começaremos analisando o caso mais simples de resolução, que é aquele no qual o polinômio de grau 2 já está fatorado.

■ Equações com polinômios na forma fatorada

Suponha que queiramos resolver a equação

$$(x-5)(x+2) = 0.$$

Como o polinômio que aparece do lado esquerdo está na forma fatorada, podemos obter a solução trivialmente, lembrando que, dadas duas expressões a e b,

$$\text{Se } a \cdot b = 0, \text{ então } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Assim, a equação $(x-5)(x+2) = 0$ permite duas possibilidades: $x - 5 = 0$ ou $x + 2 = 0$.

- Supondo que $x - 5 = 0$, temos $x = 5$.
- Supondo que $x + 2 = 0$, temos $x = -2$.

Logo, as raízes são $x_1 = 5$ e $x_2 = -2$.

Nesse exemplo, as raízes são iguais aos coeficientes que aparecem dentro dos parênteses, com sinais trocados. Isso acontece sempre que um termo tem a forma $(x - a)$ ou $(x + a)$.

Problema 1. Equações com polinômios na forma fatorada

Resolva as equações

a) $(x-3)(5x-7)=0$

b) $2(x+8)(x+4)=0$

c) $(3x-6)(x-2)=0$

d) $(x-\sqrt{3})(2x+1)=0$

e) $\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{6}\right)=0$

f) $x(10-x)=0$

Solução.

a) Para a equação $(x-3)(5x-7)=0$, temos duas possibilidades:

- Se $x-3=0$, então $x=3$.
- Se $5x-7=0$, então $5x=7$, donde $x=\frac{7}{5}$.

Logo, as raízes são $x_1=3$ e $x_2=\frac{7}{5}$.

b) Dada a equação $2(x+8)(x+4)=0$, podemos afirmar que

Observe que o número 2, que aparece à frente da equação, não interfere na determinação das raízes.

- Se $x+8=0$, então $x=-8$.
- Se $x+4=0$, então $x=-4$.

Logo, as raízes são $x_1=-8$ e $x_2=-4$.

c) No que tange à equação $(3x+6)(x-2)=0$, observamos que

- Se $3x-6=0$, então $3x=6$, de modo que $x=\frac{6}{3}=2$.
- Se $x-2=0$, então $x=2$.

Repare que, quando $x=2$, os dois fatores são iguais a zero.

Dessa forma, a única raiz é $x=2$.

d) Para encontrar as raízes da equação $(x-\sqrt{3})(2x+1)=0$, consideramos os seguintes casos:

- Se $x-\sqrt{3}=0$, então $x=\sqrt{3}$.
- Se $2x+1=0$, então $2x=-1$, donde $x=-\frac{1}{2}$.

Assim, as raízes são $x_1=\sqrt{3}$ e $x_2=-\frac{1}{2}$.

e) As duas possibilidades associadas à equação $\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{6}\right)=0$ são:

- $\frac{x}{4}+\frac{1}{3}=0$. Nesse caso, $\frac{x}{4}=-\frac{1}{3}$, donde $x=-\frac{4}{3}$.
- $\frac{x}{6}-\frac{1}{6}=0$. Nesse caso, $\frac{x}{6}=\frac{1}{6}$, donde $x=\frac{6}{6}=1$.

Logo, as raízes são $x_1=-\frac{4}{3}$ e $x_2=1$.

f) Para a equação $x(10+x)=0$, constatamos que:

- Uma possibilidade é termos $x=0$.
- Por outro lado, também é possível que $10-x=0$. Nesse caso, $x=10$.

Desse modo, as raízes são $x_1=0$ e $x_2=10$.

Agora, tente o Exercício 1.

■ Equações com $c = 0$

Quando o coeficiente c é nulo, temos simplesmente $ax^2 + bx = 0$. Nesse caso, como os dois termos do lado esquerdo incluem x, podemos por essa variável em evidência, como mostrado abaixo.

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Rightarrow \quad ax \cdot x + b \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(ax + b) = 0.$$

Assim, adotando a mesma estratégia da subseção anterior, podemos considerar dois casos:

- $x = 0$; ou
- $ax + b = 0$, o que implica que $x = -\frac{b}{a}$.

Logo, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Problema 2. Equações com $c = 0$

Resolva as equações

a) $x^2 + 5x = 0$

b) $21x - 3x^2 = 0$

Solução.

a) Podemos reescrever a equação $x^2 + 5x = 0$ como $x(x + 5) = 0$. Nesse caso, constatamos que $x = 0$ ou $x + 5 = 0$, o que nos leva a $x = -5$.

   Logo, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = -5$.

b) A equação $21x - 3x^2 = 0$ é equivalente a $x(21 - 3x) = 0$. Desse modo, concluímos que $x = 0$ ou $21 - 3x = 0$. Nesse último caso, temos $3x = 21$, ou simplesmente $x = \frac{21}{3} = 7$.

   Portanto, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 7$.

Agora, tente o Exercício 4.

■ Equações com $b = 0$

Voltando ao problema apresentado no início dessa seção, observamos que a equação quadrática que o projetista da piscina tem que resolver é

$$2x^2 - 128 = 0.$$

Essa equação tem coeficientes $a = 2$, $b = 0$ e $c = -128$. Para resolvê-la, começamos por eliminar o termo constante que aparece do lado esquerdo:

$$2x^2 - 128 + 128 = 0 + 128 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 128.$$

Em seguida, eliminamos o fator 2 que multiplica x:

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{128}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 64.$$

Resta, agora, determinar x tal que seu quadrado seja igual a 64. Naturalmente, uma solução desse problema é dada pela raiz quadrada de 64, que é 8, já que $8^2 = 64$.

Entretanto, essa não é a única solução da equação, já que $x = -8$ também satisfaz $(-8)^2 = 64$. Dessa forma, escrevemos

$$x = \pm\sqrt{64} = \pm 8,$$

indicando que as raízes são $x_1 = 8$ e $x_2 = -8$.

De uma forma geral, a resolução de uma equação na forma $ax^2 + c = 0$ é feita através dos passos indicados abaixo.

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 && \text{Equação original.} \\ ax^2 &= -c && \text{Subtração de } c \text{ dos dois lados.} \\ x^2 &= -\frac{c}{a} && \text{Divisão dos dois lados por } a. \\ x &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} && \text{Extração da raiz quadrada.} \end{aligned}$$

Atenção

Repare que há um sinal negativo dentro da raiz, de modo que, dentre os coeficientes a e c, um (e apenas um) deve ser negativo.

Problema 3. Equações com $b = 0$

Resolva as equações

a) $9x^2 - 25 = 0$

b) $\dfrac{x^2}{4} - 3 = 0$

c) $64x^2 + 256 = 0$

d) $(x - 7)^2 - 81 = 0$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} 9x^2 - 25 &= 0 && \text{Equação original.} \\ 9x^2 &= 25 && \text{Adição de 25 aos dois lados.} \\ x^2 &= \frac{25}{9} && \text{Divisão dos dois lados por 9.} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{25}{9}} && \text{Extração da raiz quadrada.} \\ x &= +\frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad -\frac{5}{3} && \text{Soluções da equação.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} - 3 &= 0 && \text{Equação original.} \\ \frac{x^2}{4} &= 3 && \text{Adição de 3 aos dois lados.} \\ x^2 &= 3 \cdot 4 && \text{Multiplicação dos dois lados por 4.} \\ x &= \pm\sqrt{12} && \text{Extração da raiz quadrada.} \\ x &= +2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad -2\sqrt{3} && \text{Soluções da equação.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
64x^2 + 256 &= 0 && \text{Equação original.}\\
64x^2 &= -256 && \text{Subtração de 256 dos dois lados.}\\
x^2 &= -\frac{256}{64} && \text{Divisão dos dois lados por 64.}\\
x &= \pm\sqrt{-4} && \text{Impossível!}
\end{aligned}$$

Como o número dentro da raiz é negativo, essa equação não tem raiz real.

d)

$$\begin{aligned}
(x-7)^2 - 81 &= 0 && \text{Equação original.}\\
(x-7)^2 &= 81 && \text{Adição de 81 aos dois lados.}\\
x - 7 &= \pm\sqrt{81} && \text{Extração da raiz quadrada.}\\
x &= 7 \pm 9 && \text{Adição de 7 aos dois lados.}\\
x &= +16 \quad \text{ou} \quad -2 && \text{Soluções da equação.}
\end{aligned}$$

Observe que, apesar de b não ser nulo nessa equação, conseguimos resolvê-la de forma semelhante ao que foi feito nos demais problemas. De fato, poderíamos ter substituído $x - 7$ por y, de modo a transformar a equação em $y^2 + 81 = 0$, cusa solução é $y = \pm 9$. Assim, como $y = x - 7$, temos $x = 7 + y = 7 \pm 9$.

Agora, tente o Exercício 3.

■ Equações com todos os coeficientes não nulos

Para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$ quando os coeficientes a, b e c são todos não nulos, usamos a fórmula de Bháskara, dada a seguir.

Você sabia?

A fórmula de Bháskara, que fornece as raízes de uma equação quadrática, recebeu esse nome em homenagem ao famoso matemático indiano, que viveu no século XII.

Fórmula de Bháskara

As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$, são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Essas raízes são reais sempre que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. O termo Δ é chamado **discriminante** da equação.

Para os leitores curiosos em saber como a fórmula de Bháskara pode ser obtida, veremos agora como deduzi-la *completando quadrados*. Se você está aflito para começar a resolver equações quadráticas gerais, pode pular os próximos parágrafos e passar ao Problema 4.

Observando a estratégia usada para resolver o item (d) do Problema 3, concluímos que, dadas as constantes reais u e v, com $v \geq 0$, a solução de uma equação quadrática na forma

$$(x + u)^2 = v,$$

pode ser obtida aplicando-se a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned}
x + u &= \pm\sqrt{v} && \text{Extração da raiz quadrada.}\\
x &= -u \pm \sqrt{v} && \text{Subtração de } u \text{ dos dois lados.}
\end{aligned}$$

Note que o termo independente da Equação (2.1) é $u^2 - v$, já que u e v sao constantes conhecidas, e não incógnitas.

Assim, somos capazes de resolver qualquer equação quadrática do tipo

$$x^2 + 2xu + u^2 - v = 0, \tag{2.1}$$

já que, segundo o que aprendemos sobre produtos notáveis, essa equação é equivalente a $(x+u)^2 = v$. Logo, se conseguíssemos reescrever a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.2}$$

na forma apresentada em (2.1), seríamos capazes de encontrar facilmente sua solução. Felizmente, isso pode ser feito em quatro passos, como mostrado a seguir.

Passo 1. Começamos dividindo os dois lados da Equação (2.2) por a:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0. \tag{2.3}$$

Dessa forma, igualamos o primeiro termo do lado esquerdo da equação ao monômio x^2 que aparece em (2.1).

Passo 2. Em seguida, para tornar iguais os segundos termos das Equações (2.1) e (2.3), escolhemos u de modo que

$$2u = \frac{b}{a},$$

o que pode ser facilmente obtido tomando

$$u = \frac{b}{2a}.$$

Passo 3. Agora, para que os termos independentes das Equações (2.1) e (2.3) sejam iguais, definimos v a partir de

$$u^2 - v = \frac{c}{a}.$$

Como sabemos que $u = \frac{b}{2a}$, temos

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - v = \frac{c}{a},$$

de modo que

$$v = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Passo 4. Uma vez determinados u e v, podemos escrever a solução da Equação (2.2) como

$$x = -u \pm \sqrt{v}$$ Solução de $x^2 + 2xu + u^2 - v = 0$.

$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$ Substituição de u e v.

$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$ Redução das frações dentro da raiz ao mesmo denominador.

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$ Separação da raiz quadrada.

Aqui, é preciso considerar que $\pm\sqrt{4a^2} = \pm\sqrt{4}\sqrt{a^2} = \pm 2|a| = \pm 2a$. (Mais sobre módulo na Seção 2.14.)

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Extração da raiz quadrada do denominador.

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Soma das frações.

Pronto, chegamos à fórmula de Bháskara.

Problema 4. Aplicações da fórmula de Bháskara

Resolva as equações

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

b) $4x^2 + 10x = 6$

c) $3x^2 - 24x + 48 = 0$

d) $2x^2 + 3x + 6 = 0$

Solução.

a) Para organizar nosso trabalho, vamos calcular o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e, em seguida, determinar as raízes usando a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Os coeficientes da equação $x^2 - 3x - 10 = 0$ são $a = 1$, $b = -3$ e $c = -10$, de modo que

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49.$$

Assim, temos

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{59}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2}.$$

Logo, as soluções da equação são

$$x_1 = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

b) Reescrevendo a equação $4x^2 + 10x = 6$ na forma padrão, obtemos

$$4x^2 + 10x - 6 = 0.$$

Os coeficientes dessa equação são $a = 4$, $b = 10$ e $c = -6$, e o discriminante é dado por

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 100 + 96 = 196.$$

Assim,

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 4} = \frac{-10 \pm 14}{8},$$

de modo que temos duas soluções,

$$x_1 = \frac{-10+14}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-10-14}{8} = \frac{-24}{8} = -3.$$

c) A equação $3x^2 - 24x + 48 = 0$ tem coeficientes $a = 3$, $b = -24$ e $c = 48$ e discriminante

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 48 = 576 - 576 = 0.$$

Como o discriminante é nulo, temos

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4.$$

Portanto, a equação só tem uma raiz, definida por $x = 4$.

d) Os coeficientes da equação $2x^2+3x+6=0$ são $a=2$, $b=3$ e $c=6$. Já o discriminante é definido por

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 9 - 48 = -39.$$

Nesse caso, como o discriminante é negativo, sua raiz quadrada não corresponderá a um número real, de modo que a equação não tem solução real.

Agora, tente o Exercício 5.

Como vimos nos problemas acima, uma equação quadrática pode ter duas raízes reais, ou apenas uma raiz, ou pode mesmo não ter solução real. A existência e o número de raízes reais está ligada ao valor do discriminante, como indicado abaixo.

O papel do discriminante

A equação $ax^2+bx+c=0$, em que $a \neq 0$,

- tem duas raízes reais distintas quando $\Delta > 0$;
- tem apenas uma raiz quando $\Delta = 0$;
- não tem solução real quando $\Delta < 0$.

Problema 5. Determinação do número de raízes

Determine o número de raízes das equações abaixo, sem resolvê-las.

a) $x^2+4x-12=0$

b) $4x^2-20x+41=0$

c) $\frac{-x^2}{2}+8x-32=0$

Solução.

a) Como $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 > 0$, a equação tem duas raizes reais distintas.

b) Como $\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 41 = 400 - 656 = -256 < 0$, a equação não tem raizes reais.

c) Como $\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-32) = 64 - 64 = 0$, a equação tem apenas uma raiz real.

Agora, tente o Exercício 6.

Problema 6. Garantindo a existência de raízes

Determine para que valores de k cada equação abaixo tem ao menos uma raiz real.

a) $3x^2+2x+k=0$

b) $kx^2-7x-12=0$

Solução.

a) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 4 - 12k$. Para que exista ao menos uma raiz real, é preciso que $\Delta \geq 0$, ou seja,

$$4 - 12k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \geq 12k \quad \Rightarrow \quad k \leq \frac{4}{12} \quad \Rightarrow \quad k \leq \frac{1}{3}.$$

b) $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot k \cdot (-12) = 49 + 48k$. A equação terá ao menos uma raiz real se

$$49 + 48k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 48k \leq -49 \quad \Rightarrow \quad k \leq -\frac{49}{48}.$$

Agora, tente o Exercício 7.

Problema 7. Existência de uma única raiz

Determine para que valores de k a equação $5x^2 + kx + 45 = 0$ tem apenas uma raiz real.

Solução.

Nesse caso, $\Delta = k^2 - 4 \cdot 5 \cdot 45 = k^2 - 900$. Assim, para que a equação tenha apenas uma raiz real, é preciso que $\Delta = 0$, ou seja,

$$k^2 - 900 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 900 \quad \Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{900} \quad \Rightarrow \quad k = \pm 30.$$

Logo, devemos ter $k = 30$ ou $k = -30$.

Exemplo 8. Equações redutíveis à forma quadrática

Que semelhança pode haver entre equações tão aparentemente díspares como

$$4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \qquad \text{e} \qquad 3^{2x} - 36 \cdot 3^x + 243 = 0?$$

Acertou quem respondeu que a característica comum a essas equações é o fato de ambas poderem ser convertidas à forma quadrática

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Para apresentar a primeira equação nessa forma, é preciso lembrar que $x^4 = (x^2)^2$. Usando esse artifício, podemos escrever

$$4(x^2)^2 - 25(x^2) + 36 = 0$$

Substituindo, então, o termo x^2 por y, obtemos

$$4y^2 - 25y + 36 = 0.$$

Você sabia?

Toda equação do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ pode ser convertida à forma quadrática através da substituição $y = x^2$. Equações assim são chamadas **biquadradas**.

Voilà! Agora, temos uma equação quadrática, cuja solução podemos encontrar usando a fórmula de Bháskara:

$$\Delta = 25^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$$

$$y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{25 \pm 7}{8}.$$

Constatamos, portanto, que as raízes da equação quadrática são

$$y_1 = \frac{25+7}{8} = \frac{32}{8} = 4 \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{25-7}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}.$$

Para encontrar as soluções da equação original, basta recordar que $y = x^2$ e considerar as possibilidades

$$x^2 = 4 \qquad \text{ou} \qquad x^2 = \frac{4}{9}.$$

A primeira dessas equações fornece

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$$

enquanto a segunda fornece

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}.$$

Logo, a equação $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$ tem quatro soluções:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad x_4 = -\frac{3}{2}.$$

A estratégia adotada acima também pode ser usada para converter $3^{2x} - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$ à forma quadrática. Nesse caso, reparando que $3^{2x} = (3^x)^2$, reescrevemos a equação como

$$(3^x)^2 - 36 \cdot 3^x + 243 = 0.$$

Assim, fazendo a substituição $y = 3^x$, obtemos

$$y^2 - 36y + 243 = 0.$$

Apesar de sermos capazes de determinar facilmente os valores de y que resolvem essa equação, a obtenção da solução geral do problema requer a manipulação de uma equação exponencial, assunto que só será tratado no Capítulo 5.

Para não deixar o leitor em suspense, fica aqui registrado que as soluções da equação $3^{2x} - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$ são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

Agora, tente o Exercício 11.

Exercícios 2.10

1. Resolva as equações abaixo.

a) $4(x - \frac{3}{4})(x - 6) = 0$
b) $(x - 9)^2 = 0$
c) $(x - 5)(2 - x) = 0$
d) $4x(x + 8) = 0$
e) $8(x + \frac{1}{2})(x - 4) = 0$
f) $(5x + 3)(2x + 7) = 0$
g) $(\frac{x}{4} - \frac{3}{2})(3 - \frac{x}{4}) = 0$
h) $\sqrt{2}(x+\sqrt{2})(\frac{x}{\sqrt{2}}-1)=0$

2. Reescreva as equações do Exercício 1 na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

3. Encontre as soluções reais das equações abaixo, caso existam.

a) $x^2 - 10 = 0$
b) $3x^2 - 75 = 0$
c) $4x^2 + 81 = 0.$
d) $\frac{x^2}{6} - \frac{24}{9} = 0$
e) $(x - 2)^2 = 4^2$
f) $(2x - 1)^2 - 25 = 0$
g) $(x + 3)^2 = \frac{1}{9}$
h) $(\frac{x}{2} + 1)^2 = \frac{9}{4}$

4. Determine as raízes das equações.

a) $x^2 - 4x = 0$
b) $5x^2 + x = 0$
c) $x^2 = -7x$
d) $2x^2 - 3x = 0$
e) $-3x^2 - \frac{x}{2} = 0$
f) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} = 0$
g) $2x - \sqrt{2}x^2 = 0$
h) $\sqrt{3}x - \frac{x^2}{\sqrt{3}} = 0$

5. Usando a fórmula de Bháskara, determine, quando possível, as raízes reais das equações.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$
b) $x^2 - 2x - 15 = 0$
c) $x^2 + 6x + 9 = 0$
d) $x^2 + 8x + 12 = 0$
e) $2x^2 + 8x - 10 = 0$
f) $x^2 - 6x + 10 = 0$
g) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
h) $6x^2 - 5x + 1 = 0$
i) $x^2 - 4x + 13 = 0$
j) $25x^2 - 20x + 4 = 0$
k) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$
l) $2x^2 - 2\sqrt{2}x - 24 = 0$
m) $3x^2 - 0{,}3x - 0{,}36 = 0$
n) $x^2 - 2{,}4x + 1{,}44 = 0$
o) $x^2 + 2x + 5 = 0$
p) $(x + 8)^2 + 4x = 0$
q) $(3 - 4x)(x + 3) = 9$
r) $(2 - 3x)(2x - 5) = 4$

6. Determine quantas raízes as equações abaixo possuem.

a) $2x^2 + 12x + 18 = 0$
b) $x^2 - 3x + 8 = 0$
c) $-2x^2 - 5x + 9 = 0$
d) $\frac{x^2}{5} - 2x + 20 = 0$
e) $-x^2 + 16x - 64 = 0$
f) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

7. Determine para que valores de m as equações abaixo possuem ao menos uma raiz.

a) $-x^2 - 8x + m = 0$
b) $4x^2 + 12x + m = 0$
c) $5x^2 - 8x + m = 0$
d) $mx^2 + 6x - 15 = 0$
e) $mx^2 - 5x + 10 = 0$
f) $mx^2 - 6x + 9 = 0$

8. Sabendo que a equação $4x^2 - (m - 3)x + 1 = 0$ possui exatamente uma raiz, x, determine os possíveis valores da constante m.

9. Sabendo que a equação $mx^2+(2m+5)x+(m+3) = 0$ não possui raízes reais em x, determine os possíveis valores da constante m.

10. A equação $4x^2 - 12x + c == 0$ tem duas raízes reais, x_1 e x_2. Sabendo que x_2 é 2 unidades maior que x_1, determine essas raízes, bem como o valor de c.

11. Determine as raízes das equações.

a) $9x^4 - 20x^2 + 4 = 0$

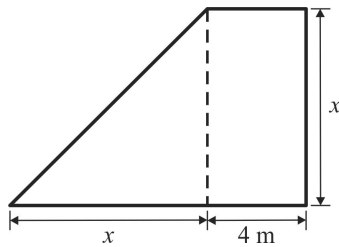
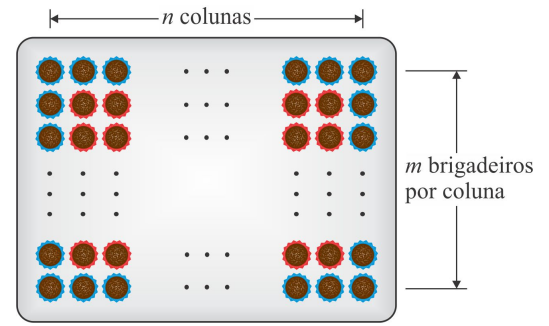
b) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

d) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

e) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

f) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

12. Um terreno com $64m^2$ de área tem o formato mostrado na figura abaixo. Determine o valor de x. (Lembre-se que a área de um triângulo com base b e altura h é igual a $bh/2$ e a área de um retângulo de base b e altura h é igual a bh.)

13. Em uma bandeja retangular, uma pessoa dispôs brigadeiros formando n colunas, cada qual com m brigadeiros, como mostra a figura abaixo.

Os brigadeiros foram divididos em dois grupos. Os que estavam mais próximos das bordas da bandeja foram postos em forminhas azuis, enquanto os brigadeiros do interior da bandeja foram postos em forminhas vermelhas.

a) Defina o número de forminhas azuis em relação a m e n.

b) Defina o número de forminhas vermelhas em relação a m e n.

c) Sabendo que $m = 3n/4$, escreva o número de forminhas azuis apenas com relação a n.

d) Repita o item (c) para as forminhas vermelhas.

e) Sabendo que o número de forminhas vermelhas é igual ao de azuis, determine o número de colunas da bandeja.

f) Determine o número de brigadeiros da bandeja.

Respostas dos Exercícios 2.10

1. a) $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 6$
b) $x_1 = 9$
c) $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
d) $x_1 = 0$, $x_2 = -8$
e) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 4$
f) $x_1 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$
g) $x_1 = 6$, $x_2 = 12$
h) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$

2. a) $4x^2 - 27x + 18$
b) $x^2 - 18x + 81$
c) $-x^2 + 7x - 10$
d) $4x^2 + 32x$
e) $8x^2 - 28x - 16$
f) $10x^2 + 41x + 21$
g) $-x^2 + 18x - 72$
h) $x^2 - 2$

3. a) $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = -\sqrt{10}$
b) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$
c) Não há solução real.
d) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$
e) $x_1 = -2$, $x_2 = 6$
f) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
g) $x_1 = -\frac{10}{3}$, $x_2 = -\frac{8}{3}$
h) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$

4. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$
b) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{5}$
c) $x_1 = 0$, $x_2 = -7$
d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$
e) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{6}$
f) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$
g) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$
h) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

5. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$
b) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$
c) $x = -3$
d) $x_1 = -2$, $x_2 = -6$
e) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$
f) Não há solução real.
g) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 4$
h) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$
i) Não há solução real.
j) $x = \frac{2}{5}$
k) $x = \sqrt{5}$
l) $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 3\sqrt{2}$
m) $x_1 = -0{,}3$, $x_2 = 0{,}4$
n) $x = 1{,}2$
o) Não há solução real.
p) $x_1 = -16$, $x_2 = -4$
q) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{3}{4}$
r) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{7}{6}$

6. a) 1 b) 0 c) 2 d) 0 e) 1 f) 2

7. a) $m \geq -16$
b) $m \leq 9$
c) $m \leq \frac{16}{5}$
d) $m \geq -\frac{3}{5}$
e) $m \leq \frac{5}{8}$
f) $m \leq 1$

8. $m = 7$ ou $m = -1$

9. $m < -\frac{25}{8}$

10. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $c = 5$

11. a) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $x_4 = \sqrt{2}$
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
d) Não há solução real.
e) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$
f) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$

12. $x = 8$.

13. a) $2n + 2(m - 2)$
b) $(n - 2)(m - 2)$
c) $\frac{7n}{2} - 4$
d) $\frac{3n^2}{4} - \frac{7n}{2} + 4$
e) $n = 8$
f) 48 brigadeiros.

2.11 Inequações quadráticas

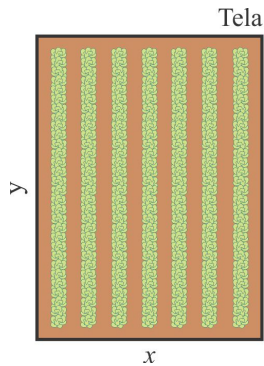



Figura 2.27: Uma horta cercada.

Iniciaremos nosso estudo sobre inequações quadráticas explorando outro problema que envolve área.

Suporemos, agora, que um pequeno agricultor disponha de 100 m de tela, com a qual pretende cercar uma pequena horta retangular. O objetivo do agricultor é determinar as dimensões da horta para que sua área não seja menor que 600 m^2.

A Figura 2.27 ilustra esse problema, identificando suas incógnitas – as dimensões da horta, em metros – por meio das variáveis x e y.

Para resolver o problema, extraímos do enunciado duas afirmações que relacionam x e y:

a) A cerca deve ter 100 m de comprimento.

b) A área cercada não deve ser inferior a 600 m^2.

Como o comprimento da cerca equivale ao perímetro do retângulo de lados x e y, a primeira dessas afirmações nos permite escrever

$$2x + 2y = 100.$$

Opa! Uma equação com duas incógnitas! Para não sermos obrigados a trabalhar com as duas variáveis ao mesmo tempo, usamos a nossa astúcia matemática e isolamos y nessa equação, obtendo

$$2y = 100 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{100 - 2x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 50 - x.$$

Essa estratégia corresponde ao método da substituição, que já usamos para resolver sistemas lineares com duas variáveis.

Assim, caso a incógnita y apareça novamente, podemos substituí-la por $50 - x$. Além disso, uma vez determinada a variável x, fica fácil obter y a partir da equação acima.

Passemos, agora, ao estudo da área da horta. A afirmação (b) indica que a área, dada pelo produto $x \cdot y$, deve ser maior ou igual a 600 m^2, ou seja,

$$x \cdot y \geq 600.$$

Usando o fato de que $y = 50 - x$, reescrevemos essa inequação como

$$x \cdot (50 - x) \geq 600 \quad \Rightarrow \quad 50x - x^2 \geq 600,$$

que é equivalente a

$$-x^2 + 50x - 600 \geq 0.$$

Essa é uma típica inequação quadrática na forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

Naturalmente, também podemos definir inequações envolvendo os símbolos "≤", ">" e "<". As inequações quadráticas são apresentadas com o zero do lado direito para realçar sua relação com as equações quadráticas, que discutimos na Seção 2.10.

Para resolver esse tipo de inequação, precisaremos analisar como um polinômio de segundo grau pode ser escrito na forma fatorada, o ue trataremos a seguir.

■ Conversão de um polinômio quadrático à forma fatorada

Uma vez conhecidas as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, é fácil escrever o polinômio quadrático na forma fatorada, como mostrado no quadro a seguir.

Fatoração de polinômios quadráticos

Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais, x_1 e x_2, então

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Por outro lado, se a equação quadrática possui uma única solução, x_1, então

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Finalmente, se a equação quadrática não possui raízes, então o polinômio $ax^2 + bx + c$ é **irredutível**, ou seja, não pode ser escrito como o produto de fatores que envolvam apenas números reais.

Observe que o termo $(x-x_1)^2$ é equivalente a $(x - x_1)(x - x_1)$, de modo que podemos dizer que a equação $a(x - x_1)^2 = 0$ tem duas raízes reais iguais.

Como essa propriedade pode ser estendida para polinômios de qualquer grau, deixaremos a sua demonstração para o Capítulo 4, no qual trataremos de zeros de funções polinomiais. Veremos, agora, alguns exemplos práticos de fatoração.

Problema 1. Fatoração de polinômios do segundo grau

Fatore os polinômios abaixo.

a) $2x^2 + x - 15$ b) $-3x^2 + 12x + 12$ c) $5x^2 - 8x$ d) $x^2 + 9$

Solução.

a) A equação

$$2x^2 + x - 15 = 0$$

tem raízes $x_1 = \frac{5}{2}$ e $x_2 = -3$. Assim, a forma fatorada do polinômio é

$$2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 3).$$

Repare que o sinal que aparece no fator é oposto ao sinal da raiz, de modo que o fator associado à raiz -3 é $(x + 3)$.

b) A única raiz da equação

$$-3x^2 + 12x + 12 = 0$$

é $x_1 = 2$. Logo, o polinômio pode ser escrito como

$$-3(x - 2)^2.$$

c) A equação

$$5x^2 - 8x = 0$$

tem raízes $x = 0$ e $x = \frac{8}{5}$. Portanto, a forma fatorada do polinômio $5x^2 - 8x$ é

$$5\,(x - 0)\left(x - \frac{8}{5}\right).$$

Simplificando essa expressão, obtemos

$$5x\left(x - \frac{8}{5}\right).$$

d) Como a equação $x^2 + 9 = 0$ não tem raízes em $\mathbb{R}$, não é possível escrever o polinômio $x^2 + 9$ como o produto de fatores reais.

Como veremos no Capítulo 4, apesar de o polinômio $x^2 + 9$ não ter raízes reais, é possível fatorá-lo usando números complexos.

Agora, tente o Exercício 1.

Exemplo 2. Problema do agricultor

Voltando ao problema do pequeno agricultor, vamos tentar fatorar o polinômio que aparece do lado esquerdo da inequação

$$-x^2 + 50x - 600 \geq 0.$$

Para tanto, usaremos a fórmula de Bháskara para encontrar as raízes da equação associada. O discriminante da equação $-x^2 + 50x - 600 = 0$ é

$$\Delta = 50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-600) = 2500 - 2400 = 100,$$

e as soluções da equação são dadas por

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-50 \pm 10}{-2}.$$

Assim, temos

$$x_1 = \frac{-50 + 10}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-50 - 10}{-2} = \frac{-60}{-2} = 30.$$

Logo, o polinômio $-x^2 + 50x - 600$ pode ser escrito como

$$-(x - 20)(x - 30).$$

Repare que, em virtude de o coeficiente a valer -1, o polinômio é precedido pelo sinal negativo.

Solução de inequações do segundo grau

Convertendo à forma fatorada o polinômio associado ao problema do agricultor, chegamos à inequação

$$-(x - 20)(x - 30) \geq 0.$$

Para resolver inequações quadráticas, recorremos às propriedades gerais das inequações, que foram apresentadas na Seção 2.8.

Com o objetivo de eliminar o sinal negativo que aparece do lado esquerdo da desigualdade acima, multiplicamos a inequação por (-1), obtendo

$$(x - 20)(x - 30) \leq 0.$$

Para resolver essa inequação, devemos analisar separadamente o que acontece com cada fator do polinômio, identificando em que intervalo ele é positivo ou negativo.

Começando pelo fator $(x-20)$, observamos que esse termo é positivo para $x > 20$ e negativo para $x < 20$, valendo zero quando $x = 20$. A Figura 2.28 ilustra o sinal desse fator na reta real.

Figura 2.28: Sinal de $(x - 20)$.

Figura 2.29: Sinal de $(x - 30)$.

Por sua vez, o fator $(x - 30)$ é positivo para $x > 30$ e negativo para $x < 30$, como mostra a Figura 2.29.

Para determinar em quais intervalos o polinômio $(x - 20)(x - 30)$ é positivo ou negativo, devemos observar como o sinal de um produto está relacionado ao sinal dos seus fatores.

> ### Sinal do produto de dois fatores
>
> Dados os fatores reais a e b, o produto $a \cdot b$ é
>
> - **positivo** se $a > 0$ e $b > 0$, ou se $a < 0$ e $b < 0$;
> - **negativo** se $a > 0$ e $b < 0$, ou se $a < 0$ e $b > 0$.

Tabela 2.21: Sinal de $a \cdot b$.

a	b	$a \cdot b$
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

A Tabela 2.21 mostra a dependência entre o sinal de $a \cdot b$ e os sinais de a e b.

Vejamos como o sinal do produto de dois fatores pode nos ajudar a resolver a inequação do problema do agricultor. Notando que os pontos relevantes do problema são $x = 20$ e $x = 30$, pois é neles que o polinômio $(x-20)(x-30)$ vale zero, vamos dividir a reta real nos intervalos

$$(-\infty, 20), \qquad (20, 30), \qquad (30, \infty),$$

e analisar o sinal do polinômio em cada um deles. Para facilitar o trabalho, construímos uma tabela na qual cada coluna representa um intervalo e cada fator aparece em uma linha separada. Finalmente, usando as regras apresentadas acima, indicamos na última linha da tabela o sinal do polinômio original.

A Tabela 2.22 deve ser lida por colunas. A segunda coluna, por exemplo, indica que, no intervalo $(-\infty, 20)$, o termo $(x-20)$ é negativo, o mesmo ocorrendo com o termo $(x-30)$. Logo, o produto $(x-20)(x-30)$ é positivo.

Tabela 2.22: Sinal de $(x-20)(x-30)$ e de seus fatores em cada intervalo.

Termo	$(-\infty, \mathbf{20})$	$(\mathbf{20}, \mathbf{30})$	$(\mathbf{30}, \infty)$
$(x-20)$	−	+	+
$(x-30)$	−	−	+
$(x-20)(x-30)$	+	−	+

A mesma análise pode ser feita empregando-se um diagrama como aquele mostrado na Figura 2.30.

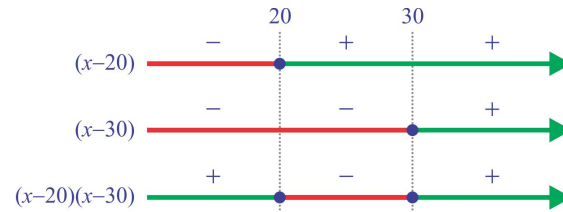



Figura 2.30: Diagrama do problema do agricultor.

A partir da Tabela 2.22 ou do diagrama da Figura 2.30, concluímos que o polinômio $(x-20)(x-30)$ é negativo no intervalo (20,30). Logo, a solução da inequação $(x-20)(x-30) \leq 0$ é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x \leq 30\}.$$

A solução também pode ser apresentada na forma $x \in [20, 30]$.

Portanto, uma das dimensões da horta deve medir entre 20 e 30 m. Uma vez definida essa dimensão, x, a outra pode ser obtida através da fórmula $y = 50 - x$. Assim, por exemplo, se escolhermos $x = 20$ m, teremos $y = 50 - 20 = 30$ m.

Em linhas gerais, os passos necessários para a solução de uma inequação quadrática são dados no quadro a seguir.

Roteiro para a solução de inequações quadráticas

1. **Mova todos os termos para o mesmo lado.**
   Escreva a inequação na forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$.

2. **Determine as raízes da equação associada.**
   Determine quantas e quais são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

3. **Fatore o polinômio.**
   Escreva o polinômio na forma $a(x - x_1)(x - x_2)$, em que $x_1 = x_2$ se a raiz for única.

Roteiro para a solução de inequações quadráticas (cont.)

4. **Crie intervalos.**
Divida o problema em intervalos, de acordo com as raízes obtidas.

5. **Monte uma tabela ou diagrama.**
Determine o sinal de cada fator do polinômio em cada intervalo.

6. **Resolva o problema.**
Determine a solução do problema a partir dos sinais dos fatores. Expresse essa solução na forma de um ou mais intervalos.

Problema 3. Solução de inequações quadráticas

Resolva as inequações.

a) $x^2 + 3x - 10 \geq 0$

b) $4x^2 - 8x \leq 21$

c) $-3x^2 > 11x - 4$

d) $-x^2 + 5x + 6 < 0$

e) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

f) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$

g) $5x^2 - 3x + 2 \leq 0$

h) $x^2 - 2x \geq -6$

i) $4x^2 - 3 \leq 0$

Solução.

a) A equação $x^2 + 3x - 10 = 0$ tem discriminante

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49.$$

e raízes definidas por

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}.$$

Logo, $x_1 = 2$ e $x_2 = -5$, de modo que a inequação $x^2 + 3x - 10 \geq 0$ é equivalente a

$$(x - 2)(x + 5) \geq 0.$$

Definindo, então, os intervalos $(-\infty, -5)$, $(-5{,}2)$ e $(2, \infty)$, temos

Termo	$(-\infty, -5)$	$(-5, 2)$	$(2, \infty)$
$(x-2)$	−	−	+
$(x+5)$	−	+	+
$(x-2)(x+5)$	+	−	+

Para descobrir o sinal de $(x-2)$ no intervalo $(-\infty, -5)$, basta calcular esse fator em um ponto interno qualquer do intervalo. Escolhendo, por exemplo, o ponto $x = -6$, descobrimos que $(-6 - 2) = -8 < 0$, de modo que o fator é negativo em $(-\infty, -5)$. Repetindo esse processo, podemos descobrir o sinal de todos os termos nos três intervalos.

Portanto, $(x - 2)(x + 5) \geq 0$ para $x \in (-\infty, -5]$ ou $x \in [2, \infty)$. Nesse caso, dizemos que o conjunto solução é formado pela união desses intervalos, ou seja, por

$$(-\infty, -5] \cup [2, \infty).$$

b) A inequação $4x^2 - 8x \leq 21$ é equivalente à desigualdade $4x^2 - 8x - 21 \leq 0$, cuja equação associada tem discriminante

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-21) = 400,$$

e raízes definidas por

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 20}{8}.$$

Assim, $x_1 = \frac{7}{2}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$, e a inequação do problema pode ser reescrita como

$$4\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \leq 0.$$

Os intervalos pertinentes a esse problema são $(-\infty, -\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ e $(\frac{7}{2}, \infty)$. A partir deles, montamos a tabela

Nesse exemplo, observamos que o fator $(x + \frac{3}{2})$ vale $-\frac{1}{2}$ em $x = -2$, vale $\frac{3}{2}$ em $x = 0$ e vale $\frac{13}{2}$ em $x = 5$. Assim, concluímos que o termo é negativo em $(-\infty, -\frac{3}{2})$, e é positivo em $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ e em $(\frac{7}{2}, \infty)$.

Termo	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{7}{2}, \infty)$
$(x - \frac{7}{2})$	−	−	+
$(x + \frac{3}{2})$	−	+	+
$4(x - \frac{7}{2})(x + \frac{3}{2})$	+	−	+

Logo, o conjunto solução do problema é dado por $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]$.

c) Para resolver a inequação $-3x^2 > 11x - 4$ devemos, em primeiro lugar, convertê-la à forma $-3x^2 - 11x + 4 > 0$. Em seguida, analisando a equação associada, observamos que

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 169,$$

o que nos fornece

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot (-3)} = \frac{11 \pm 13}{-6},$$

donde $x_1 = -4$ e $x_2 = \frac{1}{3}$. Assim, a inequação original é equivalente a

$$-3\,(x + 4)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0.$$

Para eliminar o sinal negativo, reescrevemos essa inequação como

$$3\,(x + 4)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0.$$

Definindo, agora, os intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{3}, \infty)$, temos

Termo	$(-\infty, -4)$	$(-4, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
$(x + 4)$	−	+	+
$(x - \frac{1}{3})$	−	−	+
$3(x + 4)(x - \frac{1}{3})$	+	−	+

Como estamos interessados nos valores de x que satisfazem $3\,(x + 4)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0$, a solução da inequação é dada por

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -4 < x < \frac{1}{3}\right\}.$$

d) O discriminante da equação associada à desigualdade $-x^2 + 5x + 6 < 0$ é

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 1.$$

Assim, o polinômio quadrático $-x^2 + 5x + 6$ vale zero quando

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2},$$

o que ocorre em $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Logo, podemos reescrever a inequação como

$$-(x-2)(x-3) < 0.$$

Para eliminar o sinal negativo, multiplicamos os dois lados por -1 e trocamos o sinal da desigualdade, obtendo

$$(x-2)(x-3) > 0.$$

Em seguida, montamos a seguinte tabela, dividida nos intervalos $(-\infty, 2)$, $(2{,}3)$ e $(3, \infty)$:

Termo	$(-\infty, \mathbf{2})$	$(\mathbf{2}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{3}, \infty)$
$(x-2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Observando a tabela, concluímos que a solução de $(x-2)(x-3) > 0$ é dada por

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}.$$

e) A equação $x^2 + 6x + 9 = 0$ tem discriminante

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0,$$

de modo que sua única raiz é

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Logo, a desigualdade $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ é equivalente a

$$(x+3)^2 \leq 0.$$

Nesse caso, temos apenas dois intervalos: $(-\infty, -3)$ e $(-3, \infty)$. A tabela correspondente ao problema é

Termo	$(-\infty, -\mathbf{3})$	$(-\mathbf{3}, \infty)$
$(x+3)$	$-$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$
$(x+3)^2$	$+$	$+$

Em matemática, usamos frequentemente o fato de que todo termo elevado ao quadrado é maior ou igual a zero. Para constatar isso, basta lembrar que o produto de dois termos positivos é positivo, o mesmo ocorrendo quando os termos são negativos.

Observe que $(x+3)^2$ é positivo nos dois intervalos. Assim, a única solução de $(x+3)^2 \leq 0$ é $x = -3$ (ponto em que temos $(x+3)^2 = 0$).

f) O discriminante da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$ é

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0.$$

Logo, temos a raiz única

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5,$$

de modo que a desigualdade $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ é equivalente a

$$(x-5)^2 \geq 0.$$

À semelhança do que ocorreu no Problema (e), podemos concluir que $(x-5)^2$ é sempre maior ou igual a zero. Desse modo, a solução da inequação é dada por $x \in \mathbb{R}$ (ou simplesmente $\mathbb{R}$), indicando que todos os números reais são solução.

g) A equação $5x^2 - 3x + 2 = 0$ tem discriminante

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9 - 40 = -31.$$

Como o discriminante é negativo, a equação não possui raízes reais. Isso implica que o polinômio $5x^2 - 3x + 2$ nunca troca de sinal, permanecendo sempre positivo ou sempre negativo.

Testando o valor do polinômio em $x = 0$, constatamos que

$$5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2.$$

Como o valor obtido é positivo, concluímos que o polinômio é sempre positivo, de modo que a inequação

$$5x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

não tem solução. De forma equivalente, podemos dizer que o conjunto solução da inequação é $\varnothing$ (o conjunto vazio).

h) A inequação $x^2 - 2x \geq -6$ é equivalente a $x^2 - 2x + 6 \geq 0$. O discriminante da equação associada é

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 4 - 24 = -20.$$

Mais uma vez, como o discriminante é negativo, a equação não tem raízes reais, de modo que o sinal do polinômio $x^2 - 2x + 6$ não muda.

Se você preferir, pode usar outro valor de x para calcular o polinômio. Escolhemos $x = 0$ nesse exercício apenas para facilitar as contas.

Como, para $x = 0$, temos

$$0^2 - 2 \cdot 0 + 6 = 6$$

e esse valor é positivo, o polinômio é sempre positivo, de modo que a inequação $x^2 - 2x + 6 \geq 0$ é satisfeita para todo x real, ou seja, o conjunto solução é $\mathbb{R}$.

i) Podemos resolver a equação $4x^2 - 3 = 0$ diretamente, fazendo

$$4x^2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, a inequação $4x^2 - 3 \leq 0$ é equivalente a

$$4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq 0.$$

A tabela associada a esse problema é dada abaixo.

Termo	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty)$
$(x - \frac{\sqrt{3}}{2})$	$-$	$-$	$+$
$(x + \frac{\sqrt{3}}{2})$	$-$	$+$	$+$
$4(x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2})$	$+$	$-$	$+$

Assim, o conjunto solução da inequação é dado pelo intervalo $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Agora, tente o Exercício 4.

Exemplo 4. Inequação dupla

O roteiro apresentado acima também pode ser usado para resolver inequações duplas. Como exemplo, vamos encontrar a solução de

$$-3 \leq 9x^2 - 7 \leq 29.$$

Uma vez que já conhecemos os passos da resolução de uma inequação, vamos tratar em separado as desigualdades

a) $9x^2 - 7 \geq -3$, que é equivalente a $9x^2 - 4 \geq 0$; e

b) $9x^2 - 7 \leq 29$, que pode ser escrita como $9x^2 - 36 \leq 0$.

A equação associada à primeira desigualdade é $9x^2 - 4 = 0$. Para resolver essa equação, seguimos os seguintes passos:

$$9x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}.$$

Logo, as raízes são $x_1 = -\frac{2}{3}$ e $x_2 = \frac{2}{3}$, de modo que podemos montar a tabela

Termo	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
$(x + \frac{2}{3})$	−	+	+
$(x - \frac{2}{3})$	−	−	+
$9(x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{3})$	+	−	+

Como queremos que $9(x - \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3}) \geq 0$, o conjunto solução da primeira inequação é dado por

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -\frac{2}{3} \text{ ou } x \geq \frac{2}{3} \right\}.$$

Por sua vez, a equação associada à inequação (b) é $9x^2 - 36 = 0$. Para obter as raízes dessa equação, fazemos

$$9x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{36}{9} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$$

donde $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Tomando, agora, os intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2,2)$ e $(2,\infty)$, montamos a tabela

Termo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$(x + 2)$	−	+	+
$(x - 2)$	−	−	+
$9(x + 2)(x - 2)$	+	−	+

Concluímos, então, que o conjunto solução de $9(x + 2)(x - 2) \leq 0$ é

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}.$$

Agora que obtivemos separadamente as soluções de $9x^2 - 7 \geq -3$ e $9x^2 - 7 \leq 29$, determinamos a solução do problema original requerendo que as duas desigualdades sejam satisfeitas simultaneamente. Para tanto, exigimos que a variável x pertença à interseção dos conjuntos S_1 e S_2, ou seja,

$$x \in S_1 \cap S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -\frac{2}{3} \text{ ou } x \geq \frac{2}{3} \right\} \bigcap \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}.$$

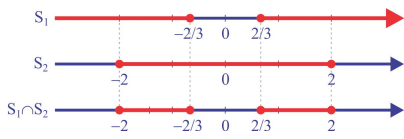



Figura 2.31: Conjuntos S_1, S_2 e $S_1 \cap S_2$.

Apresentado dessa forma, o conjunto solução $S_1 \cap S_2$ parece complicado. Entretanto, uma formulação bem mais simples pode ser obtida recorrendo-se à reta real, como mostrado na Figura 2.31. Na primeira reta mostrada nessa figura, identificamos em vermelho o conjunto S_1. Da mesma forma, o conjunto S_2 está destacado em vermelho na segunda reta real. Finalmente, a última reta real apresenta a interseção desses conjuntos.

Observando a Figura 2.31, constatamos que a interseção de S_1 e S_2 é dada por

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -2 \le x \le -\frac{2}{3} \text{ ou } \frac{2}{3} \le x \le 2\right\}.$$

Agora, tente o Exercício 5.

Exercícios 2.11

1. Fatore os polinômios.

a) $x^2 - 121$
b) $x^2 - 7x + 6$
c) $x^2 + 5x - 14$
d) $x^2 + 6x + 9$
e) $3x - x^2$
f) $2x^2 - 5x$
g) $5x^2 - 3x + 4$
h) $-3x^2 + 2x + 1$
i) $-16x^2 + 8x - 1$
j) $4x^2 - 23x + 15$
k) $x^2 - 2\sqrt{2}x$
l) $2x^2 + 32$
m) $9x^2 - 12x + 4$
n) $25x^2 - 16$
o) $(x+3)^2 - 9$

2. Resolva as desigualdades.

a) $(x-2)(x-4) \ge 0$
b) $(x+1)(x-3) \le 0$
c) $(2x-1)x \ge 0$
d) $2x(x - 1/4) \le 0$
e) $-3(x+2)(x-3) < 0$
f) $(3-5x)(x+3) \ge 0$
g) $(2x+5)\left(x - \frac{1}{2}\right) \le 0$
h) $(x-6)^2 > 0$

3. A quantidade de CO_2 (em g/km) que um determinado carro emite a cada quilômetro percorrido é dada aproximadamente pela expressão $1000 - 40v + v^2/2$, em que v é a velocidade do carro, em km/h. Determine a que velocidade deve-se trafegar com esse carro para que a quantidade emitida de CO_2 não ultrapasse 250 g/km.

4. Resolva as desigualdades.

a) $x^2 - 3x \ge 0$
b) $3x^2 \le 5x$
c) $x^2 - 8 \le 0$
d) $x^2 + 6x \le 0$
e) $3x^2 - \sqrt{5}x \ge 0$
f) $x^2 + 2x > 3$
g) $49x^2 \le 9$
h) $-x^2 + 5 \le 0$
i) $-2x^2 + x \ge -6$
j) $x^2 + 4x + 7 \le 0$
k) $x^2 + 2x + 1 \le 0$
l) $2x^2 \ge 20 - 6x$
m) $x^2 + 9x + 18 \le 0$
n) $x^2 - 6x + 9 \ge 0$
o) $-3x^2 + 16x \le 5$
p) $16x^2 + 25 \le 0$
q) $-4x^2 + 12x - 9 \le 0$
r) $3x^2 \le 2x + 5$
s) $-2x^2 + 8x + 24 \le 0$
t) $-x^2 + 20x - 36 \ge 0$
u) $2x^2 - 5x \ge 3$
v) $(x-6)^2 \ge 4$

5. Resolva as desigualdades.

a) $1 \le x^2 + 2x - 2 \le 6$
b) $-4 \le 3x^2 - 10 \le 2$
c) $-3 \le x^2 - 4x \le 5$
d) $-2 \le 2x^2 + 3x + 4 \le 3$
e) $4 \le (x-6)^2 \le 9$
f) $0 \le x^2 - x \le 20$

Respostas dos Exercícios 2.11

1.
a) $(x-11)(x+11)$
b) $(x-6)(x-1)$
c) $(x-2)(x+7)$
d) $(x+3)^2$
e) $-x(x-3)$
f) $2x\left(x - \frac{5}{2}\right)$
g) Impossível
h) $-3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)$
i) $-16\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$
j) $4\left(x - \frac{3}{4}\right)(x-5)$
k) $x\left(x - 2\sqrt{2}\right)$
l) Impossível
m) $9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$
n) $5\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{4}{5}\right)$
o) $x(x+6)$

2.
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2 \text{ ou } x \ge 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \text{ ou } x \ge \frac{1}{2}\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{1}{4}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le \frac{3}{5}\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \le x \le \frac{1}{2}\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ne 6\}$

3. $30 \text{ km/h} \le v \le 50 \text{ km/h}$

4.
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \text{ ou } x \ge 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{5}{3}\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \le x \le 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \text{ ou } x \ge \frac{\sqrt{5}}{3}\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 1\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{7} \le x \le \frac{3}{7}\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -\sqrt{5} \text{ ou } x \ge \sqrt{5}\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \le x \le 2\}$
j) $\varnothing$
k) $x = -1$
l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -5 \text{ ou } x \ge 2\}$
m) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \le x \le -3\}$
n) $\mathbb{R}$
o) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1/3 \text{ ou } x \ge 5\}$
p) $\varnothing$
q) $\mathbb{R}$
r) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le \frac{5}{3}\}$
s) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2 \text{ ou } x \ge 6\}$
t) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 18\}$
u) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -\frac{1}{2} \text{ ou } x \ge 3\}$
v) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 4 \text{ ou } x \ge 8\}$

5.
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le -3 \text{ ou } 1 \le x \le 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} \le x \le 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1 \text{ ou } 3 \le x \le 5\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le -\frac{1}{2}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 4 \text{ ou } 8 \le x \le 9\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 0 \text{ ou } 1 \le x \le 5\}$

2.12 Equações racionais e irracionais

Damos o nome de **expressão racional** ao quociente entre dois polinômios. Alguns exemplos de expressões racionais são dados a seguir.

$$\frac{5+x}{x+3} \qquad \frac{2x^2+3x+1}{5x} \qquad \frac{x^3-4x^2+6x-10}{x^4-5x^2+15}.$$

Por sua vez, uma **expressão irracional** é uma expressão algébrica na qual a incógnita aparece dentro de raízes, como ilustramos abaixo.

$$\sqrt{x^2+16} \qquad x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-8 \qquad 5+\sqrt[3]{x-1}$$

Nessa seção veremos como resolver equações racionais e irracionais, ou seja, equações que envolvem raízes e quocientes.

Domínio de uma expressão algébrica

Manipular expressões racionais e irracionais não é uma tarefa tão simples quanto trabalhar com polinômios, como fizemos até agora. Dentre as muitas diferenças entre essas classes de expressões algébricas, destaca-se o fato de que um quociente ou raiz envolvendo uma variável real x pode não estar definido para determinados valores de x. Por sua vez, um polinômio sempre pode ser calculado, não importando o valor de x.

O conjunto de valores reais para os quais uma expressão está definida é chamado **domínio** da expressão.

Para definir o domínio de expressões racionais e irracionais, devemos ter em mente que

- o denominador de um quociente não pode ser igual a zero;
- a expressão contida em uma raiz de ordem par não deve ser negativa.

Vejamos como identificar o domínio de algumas expressões.

Problema 1. Domínio de expressões algébricas

Determine o domínio das expressões.

a) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{5x^3-2x^4}{x^2-2x-3}$ e) $\frac{3x-7}{x^2+1}$ g) $\sqrt[3]{2x-15}$

b) $\frac{2-x}{x-5}$ d) $\sqrt{x}$ f) $\sqrt[4]{x-2}$ h) $\frac{\sqrt{x-3}}{8-x}$

Solução.

a) Como o denominador de uma expressão não pode ser nulo, o domínio de $\frac{1}{x}$ é dado simplesmente pelo conjunto de números reais diferentes de zero, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.$$

b) Para determinar o domínio da expressão

$$\frac{2-x}{x-5}$$

devemos nos preocupar apenas com o denominador, que não deve ser igual a zero. Assim, temos

$$x-5 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \neq 5,$$

de modo que o domínio é dado por $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$.

Observe que uma declaração envolvendo o símbolo $\neq$ pode ser manipulada como se fosse uma equação.

c) Tal como fizemos no item anterior, vamos ignorar o numerador da expressão

$$\frac{5x^3 - 2x^4}{x^2 - 2x - 3}$$

e nos concentrar em exigir que o denominador seja não nulo.

Usando a fórmula des Bháskara (ou nossos conhecimentos sobre trinômios quadrados perfeitos), reparamos que a equação

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

tem raízes $x = -1$ e $x = 3$. Sendo esses os os únicos valores que fazem com que o denominador seja zero, concluímos que o domínio da expressão é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \quad \text{e} \quad x \neq 3\}.$$

d) A expressão $\sqrt{x}$ não está definida em $\mathbb{R}$ no casos em que o termo dentro da raiz assume um valor negativo. Dessa forma, seu domínio é dado por

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

e) Para que o denominador da expressão

$$\frac{3x - 7}{x^2 + 1}$$

seja não nulo, devemos ter

$$x^2 + 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 \neq -1.$$

Como o quadrado de um número real é sempre maior ou igual a zero, a condição acima é satisfeita por todo x real, de modo que o domínio da expressão é $\mathbb{R}$.

f) Observamos que raiz da expressão

$$\sqrt[4]{x - 2}$$

tem ordem par. Assim, para que essa expressão esteja definida, devemos exigir que

$$x - 2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 2.$$

Portanto, o domínio da expressão é definido por $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$.

g) Como a expressão

$$\sqrt[3]{2x - 15}$$

envolve uma raiz de ordem 3, que é ímpar, podemos calculá-la para qualquer valor de x. Nesse caso, o domínio é $\mathbb{R}$.

h) Para determinar o domínio da expressão

$$\frac{\sqrt{x - 3}}{8 - x},$$

devemos exigir que

- O denominador não valha zero, o que implica em

$$8 - x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \neq 8.$$

- O termo dentro da raiz seja maior ou igual a zero, donde

$$x - 3 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 3.$$

Como a expressão deve satisfazer essas duas condições ao mesmo tempo, seu domínio é obtido tomando-se a interseção dos conjuntos acima. Logo, temos

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \quad \text{e} \quad x \neq 8\}.$$

Agora, tente o Exercício 1.

■ Operações com expressões fracionárias

Apesar de conter uma ou mais incógnitas, uma expressão fracionária nada mais é que um número real expresso através de uma fração. Dito de outra forma, apesar de a expressão

$$\frac{x^4 - 3x^2 + x - 5}{2x^3 - x^2 + 4x - 8}$$

parecer complicada, se soubermos, por exemplo, que $x = 2$, ela se resumirá a

$$\frac{2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 5}{2 \cdot 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 - 8}$$

que corresponde ao número real $\frac{1}{12}$.

Se mantivermos em mente que as expressões fracionárias não passam da razão entre dois números reais, será fácil manipulá-las com o emprego das regras de operação com frações, que foram apresentadas na Seção 1.3. O quadro abaixo permite que o leitor relembre essas operações, cujo uso é ilustrado nos Problemas 2 e 3.

Propriedades das frações aplicadas a expressões

Suponha que A, B, C e D sejam expressões, com $B \neq 0$ e $D \neq 0$.

Operação	Propriedade
1. Soma (denominadores iguais)	$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$
2. Subtração (denominadores iguais)	$\frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}$
3. Soma (denominadores diferentes)	$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+CB}{BD}$
4. Subtração (denominadores diferentes)	$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD-CB}{BD}$
5. Simplificação	$\frac{AD}{BD} = \frac{A}{B}$
6. Multiplicação	$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$
7. Divisão (supondo $C \neq 0$)	$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$

As operações 3 e 4 também podem ser efetuadas usando-se o mmc entre B e D.

Problema 2. Simplificação de expressões

Simplifique as expressões abaixo, fatorando o numerador e o denominador. Suponha sempre que os denominadores são diferentes de zero.

a) $\frac{4x-2}{2x-1}$

b) $\frac{x^2}{x^3 - x^5}$

c) $\frac{x^2 - 3x}{5x - 15}$

d) $\frac{x^2 - 4}{7x^2 + 14x}$

e) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} \frac{4x-2}{2x-1} &= \frac{2(2x-1)}{2x-1} && \text{Fatoração do numerador.} \\ &= 2 && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^3-x^5} &= \frac{x^2}{x^3(1-x^2)} && \text{Fatoração do denominador.} \\ &= \frac{1}{x(1-x^2)} && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3x}{5x-15} &= \frac{x(x-3)}{5(x-3)} && \text{Fatoração dos termos.} \\ &= \frac{x}{5} && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{7x^2+14x} &= \frac{(x-2)(x+2)}{7x(x+2)} && \text{Fatoração dos termos.} \\ &= \frac{x-2}{7x} && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

e)

Para fatorar o numerador ao lado, você pode resolver a equação $x^2+3x-10=0$ usando a fórmula de Bháskara.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3x-10}{x+5} &= \frac{(x-2)(x+5)}{(x+5)} && \text{Fatoração do numerador.} \\ &= x-2 && \text{Propriedade 4.} \end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 2.

Problema 3. Operações com expressões

Calcule as expressões abaixo, simplificando o resultado quando possível. Suponha sempre que os denominadores são diferentes de zero.

a) $\dfrac{x^2-4x+7}{2x-1} - \dfrac{x^2+2}{2x-1}$

b) $\dfrac{3x^2-8x+3}{x^2+5x} + \dfrac{2x^2-3}{x^2+5x}$

c) $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{x}{x+2}$

d) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{x-6}{x^2-4}$

e) $\dfrac{(x^2-5x+3)}{(x+1)} \cdot \dfrac{(x-3)}{(2x-5)}$

f) $\left(\dfrac{x-4}{x^2-9}\right) \cdot \left(\dfrac{x+3}{2x^2-8x}\right)$

g) $\left(\dfrac{x-2}{x^2-16}\right) \div \left(\dfrac{x+6}{x+4}\right)$

h) $\dfrac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}}{\frac{4}{x^2}}$

Solução.

a)

$$\frac{x^2-4x+7}{2x-1}-\frac{x^2+2}{2x-1}=\frac{(x^2-4x+7)-(x^2+2)}{2x-1}$$ Propriedade 2.

$$=\frac{-4x+5}{2x-1}$$ Simplificação do numerador.

b)

$$\frac{3x^2-8x+3}{x^2+5x}+\frac{2x^2-3}{x^2+5x}=\frac{(3x^2-8x+3)+(2x^2-3)}{x^2+5x}$$ Propriedade 1.

$$=\frac{5x^2-8x}{x^2+5x}$$ Simplificação do numerador.

$$=\frac{x(5x-8)}{x(x+5)}$$ Fatoração dos termos.

$$=\frac{5x-8}{x+5}$$ Simplificação da expressão.

c)

$$\frac{2}{x-3}+\frac{x}{x+2}=\frac{2(x+2)+x(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$ Propriedade 3.

$$=\frac{x^2-x+4}{(x-3)(x+2)}$$ Simplificação do numerador.

d)

$$\frac{2}{x+2}-\frac{x-6}{x^2-4}=\frac{2}{x+2}-\frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Fatoração do denominador.

$$=\frac{2(x-2)-(x-6)}{(x+2)(x-2)}$$ Propriedade 4 (usando o mmc).

$$=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$$ Simplificação do numerador.

$$=\frac{1}{x-2}$$ Simplificação da expressão.

e)

$$\frac{(x^2-5x+3)}{(x+1)}\cdot\frac{(x-3)}{(2x-5)}=\frac{(x^2-5x+3)(x-3)}{(x+1)(2x-5)}$$ Propriedade 6.

$$=\frac{x^3-8x^2+18x-9}{2x^2-3x-5}$$ Expansão dos termos (opcional).

f)

$$\left(\frac{x-4}{x^2-9}\right)\cdot\left(\frac{x+3}{2x^2-8x}\right)=\frac{(x-4)(x+3)}{(x^2-9)(2x^2-8x)}$$ Propriedade 6.

$$=\frac{(x-4)(x+3)}{(x-3)(x+3)2x(x-4)}$$ Fatoração do denominador.

$$=\frac{1}{2x(x-3)}$$ Simplificação da expressão.

g)

$$\left(\frac{x-2}{x^2-16}\right) \div \left(\frac{x+6}{x+4}\right) = \left(\frac{x-2}{x^2-16}\right) \cdot \left(\frac{x+4}{x+6}\right)$$ Propriedade 7.

$$= \frac{(x-2)(x+4)}{(x^2-16)(x+6)}$$ Propriedade 6.

$$= \frac{(x-2)(x+4)}{(x-4)(x+4)(x+6)}$$ Fatoração do denominador.

$$= \frac{x-2}{(x-4)(x+6)}$$ Simplificação da expressão.

h)

$$\frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}}{\frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{x-(x+2)}{x(x+2)}}{\frac{4}{x^2}}$$ Propriedade 4.

$$= \frac{\frac{-2}{x(x+2)}}{\frac{4}{x^2}}$$ Simplificação do numerador.

$$= \left(\frac{-2}{x(x+2)}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)$$ Propriedade 7.

$$= \frac{-2x^2}{4x(x+2)}$$ Propriedade 6.

$$= -\frac{x}{2(x+2)}$$ Simplificação da expressão.

Agora, tente o Exercício 3.

Como foi dito no Capítulo 1, o propósito da racionalização de denominadores é puramente estético. Sendo assim, seu uso é opcional.

O processo de racionalização de denominadores também pode ser aplicado a expressões fracionárias. As estratégias de mais empregadas para a eliminação de raízes que aparecem em denominadores são as seguintes:

1. Quando o denominador tem a forma $D = \sqrt{B}$, adota-se o processo usual, que consiste em multiplicar a expressão fracionária pelo termo $\sqrt{B}/\sqrt{B}$:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{(\sqrt{B})^2} = \frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

2. Quando o denominador tem a forma $D = \sqrt{B} \pm C$, o indicado é a multiplicação da expressão por um termo que transforme o denominador em $(\sqrt{B}+C)(\sqrt{B}-C)$, de modo a permitir a aplicação da fórmula do produto da soma pela diferença, vista na Seção 2.9:

$$\frac{A}{\sqrt{B}+C} = \frac{A}{\sqrt{B}+C} \cdot \frac{(\sqrt{B}-C)}{(\sqrt{B}-C)} = \frac{A(\sqrt{B}-C)}{(\sqrt{B})^2 - C^2} = \frac{A(\sqrt{B}-C)}{B-C^2},$$

supondo que $\sqrt{B} - C \neq 0$.

Problema 4. Racionalização de denominadores

Racionalize os denominadores.

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{x}-3}$ c) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}$ d) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{5}}$

Solução.

a)

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}} = \frac{x}{\sqrt{x+4}} \cdot \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}$$ Multiplicando o numerador e o denominador pela raiz.

$$= \frac{x\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+4})^2}$$ Efetuando os produtos.

$$= \frac{x\sqrt{x+4}}{x+4}$$ Simplificando o denominador.

b)

$$\frac{7}{\sqrt{x}-3} = \frac{7}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)}$$ Multiplicando pelo denominador com o sinal trocado.

$$= \frac{7\sqrt{x}+7\cdot 3}{(\sqrt{x})^2-3^2}$$ Efetuando os produtos.

$$= \frac{7\sqrt{x}+21}{x-9}$$ Simplificando o denominador.

c)

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} \cdot \frac{(\sqrt{x+3}-2)}{(\sqrt{x+3}-2)}$$ Multiplicando pelo denominador com o sinal trocado.

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)}{(\sqrt{x+3})^2-2^2}$$ Efetuando os produtos.

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}$$ Simplificando o denominador.

$$= \sqrt{x+3}-2$$ Simplificando a expressão.

d)

$$\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{5}} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-\sqrt{5})}{(2\sqrt{x}-\sqrt{5})}$$ Multiplicando pelo denominador com o sinal trocado.

$$= \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(2\sqrt{x})^2-(\sqrt{5})^2}$$ Efetuando os produtos.

$$= \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{5}}{4x-5}$$ Simplificando o denominador.

Agora, tente o Exercício 4.

■ Equações racionais

Agora que já vimos como trabalhar com expressões racionais e irracionais, podemos passar ao estudo de equações. Iniciaremos nossa análise investigando um problema prático que envolve frações.

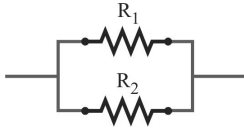



Figura 2.32: Dois resistores em paralelo.

Problema 5. Circuito em paralelo

Um pequeno trecho de um circuito elétrico é composto por dois resistores em paralelo, com resistências R_1 e R_2, como exibido na Figura 2.32. A resistência total, R, desse trecho do circuito pode ser calculada por meio da equação

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Sabendo que $R_1 = 16\,\Omega$, quanto deve valer R_2 para que a resistência total do circuito seja igual a $10\,\Omega$?

Solução.

> **Atenção**
> Observe que a equação
> $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
> não é equivalente a
> $$R = R_1 + R_2.$$
> De fato, não há valores R_1 e R_2 reais que satisfaçam, ao mesmo tempo, essas duas equações.

Substituindo, na equação acima, os valores conhecidos de R_1 e R, obtemos

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10}.$$

Para resolver essa equação

- Subtraímos $\frac{1}{16}$ dos dois lados:
$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{16}$$
- Reduzimos os termos do lado direito ao mesmo denominador:
$$\frac{1}{R_2} = \frac{8-5}{80} = \frac{3}{80}$$
- Efetuamos o produto cruzado:
$$\frac{1}{R_2} = \frac{3}{80} \qquad \Rightarrow \qquad 3 \cdot R_2 = 1 \cdot 80$$
- Isolamos R_2:
$$R_2 = \frac{80}{3}$$
- Verificamos se a solução encontrada satisfaz a equação original:
  Substituindo $R_2 = \frac{80}{3}$ na equação, obtemos
$$\frac{1}{16} + \frac{1}{80/3} = \frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{16} + \frac{3}{80} = \frac{1}{10}$$
$$\frac{5}{80} + \frac{3}{80} = \frac{8}{80}$$
$$\frac{8}{80} = \frac{8}{80} \quad \text{Ok!}$$

Assim, concluímos que $R_2 = \frac{80}{3}\,\Omega$.

> **Atenção**
> Nunca deixe de substituir os valores obtidos na equação original, para conferir se eles realmente são solução do problema.

A conferência da solução não visa apenas descobrir se cometemos algum erro durante a resolução do problema, mas também se se a solução encontrada pertence ao domínio da equação. Assim, se confiarmos plenamente nas contas que efetuamos ao

resolver o problema acima, podemos substituir a verificação da solução pela determinação do domínio da equação

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10},$$

que é simplesmente $D = \{R_2 \in \mathbb{R} \mid R_2 \neq 0\}$. Nesse caso, fica claro que o valor obtido, $R_2 = \frac{80}{3}$, é aceitável.

Resolvido esse problema simples, está na hora de passarmos a equações mais complexas envolvendo expressões racionais. Para vencer esse nosso novo desafio, devemos lembrar que, assim como foi feito com as equações lineares, é possível simplificar equações que envolvem a soma de frações multiplicando-se ambos os lados da igualdade pelo produto – ou pelo mmc – dos denominadores, como mostrado a seguir.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = E$$ Equação envolvendo a soma de frações.

$$(BD) \cdot \frac{A}{B} + (BD) \cdot \frac{C}{D} = (BD) \cdot E$$ Multiplicação dos dois lados pelo produto dos denominadores.

$$DA + BC = BDE$$ Equação equivalente.

Problema 6. Equações racionais

Embora expressões racionais possam envolver polinômios de qualquer grau, nos limitaremos a resolver equações com polinômios de primeiro e segundo graus, pois são as que têm solução fácil de se obter.

Resolva as equações.

a) $\dfrac{5+x}{x-3} = 2$

b) $\dfrac{3}{x-6} + \dfrac{6}{x-9} = \dfrac{2x}{(x-9)(x-6)}$

c) $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{5}{x+2} = 3$

d) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = 2$

Solução.

a)

$$\frac{5+x}{x-3} = 2$$ Equação original.

$$(5+x)\cdot 1 = 2\cdot(x-3)$$ Muliplicando os dois lados por $x-3$.

$$5+x = 2x-6$$ Propriedade distributiva.

$$5+6 = 2x-x$$ Reorganizando os termos.

$$11 = x$$ Simplificando a equação.

Conferindo a resposta

$$\frac{5+11}{11-3} = 2$$

$$\frac{16}{8} = 2 \quad \text{Ok!}$$

A verificação feita ao lado indica que $x = 11$ realmente é solução da equação.

b)

$$\frac{3}{x-6} + \frac{6}{x-9} = \frac{2x}{(x-9)(x-6)}$$ Equação original.

$$3(x-9) + 6(x-6) = 2x$$ Multiplicando os dois lados por $(x-6)(x-9)$.

$$3x - 27 + 6x - 36 = 2x$$ Propriedade distributiva.

$$7x = 63$$ Reorganizando os termos.

$$x = 9$$ Isolando a variável.

Conferindo a resposta

$$\frac{3}{9-6} + \frac{6}{9-9} = \frac{2\cdot 9}{(9-9)(9-6)}$$

$$\frac{3}{3} + \frac{6}{0} = \frac{18}{0} \quad \text{Erro!}$$

Na conferência da resposta, observamos que $x = 9$ leva a denominadores nulos, o que significa que esse valor de x não pertence ao domínio da equação. Desse modo, o problema não tem solução.

c)

$$\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x+2}=3$$ Equação original.

$$4(x+2)+5(x-1)=3(x-1)(x+2)$$ Multiplicando os dois lados por $(x-1)(x+2)$.

$$4x+8+5x-5=3x^2+3x-6$$ Propriedade distributiva.

$$-3x^2+6x+9=0$$ Reorganizando os termos.

Usando a fórmula de Bháskara, descobrimos que as raízes da equação são

$$x_1=-1 \quad \text{e} \quad x_2=3.$$

Na verificação feita ao lado, constatamos que os dois valores encontrados são soluções da equação.

Conferindo a resposta

$$\frac{4}{-1-1}+\frac{5}{-1+2}=3$$
$$-2+5=3 \quad \text{Ok!}$$

$$\frac{4}{3-1}+\frac{5}{3+2}=3$$
$$2+1=3 \quad \text{Ok!}$$

d)

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=2$$ Equação original.

$$x^2-2x-3=2(x^2-x-6)$$ Multiplicando os dois lados por x^2-x-6.

$$x^2-2x-3=2x^2-2x-12$$ Propriedade distributiva.

$$9=x^2$$ Reorganizando os termos.

$$x=\pm\sqrt{9}$$ Invertendo os termos e extraindo a raiz.

$$x=\pm 3$$ Simplificando o resultado.

Como vemos ao lado, $x=3$ leva a um denominador nulo, de modo que não pertence ao domínio da equação. Logo, a única solução é $x=-3$.

Conferindo a resposta

$$\frac{(-3)^2-2(-3)-3}{(-3)^2-(-3)-6}=2$$
$$\frac{12}{6}=2 \quad \text{Ok!}$$

$$\frac{3^2-2\cdot 3-3}{3^2-3-6}=2$$
$$\frac{0}{0}=2 \quad \text{Erro!}$$

Agora, tente os Exercícios 5 e 6.

■ Equações irracionais

A solução de equações que envolvem raízes segue uma estratégia completamente diversa daquela adotada para equações racionais. Para erradicar os radicais e garantir que os valores encontrados sejam de fato as raízes da equação devemos efetuar quatro passos, conforme descrito no quadro abaixo.

Roteiro para a solução de equações irracionais

1. **Isole a raiz em um dos lados da equação.**

$$\sqrt[n]{A}+B=C \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{A}=C-B.$$

2. **Eleve ambos os lados à potência n, para eliminar o radical ($\sqrt[n]{\ }$).**

$$\sqrt[n]{A}=D \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[n]{A})^n=D^n \quad \Rightarrow \quad A=D^n.$$

3. **Resolva a equação resultante.**
   Encontre todas as soluções da equação $A=D^n$.

4. **Confira o resultado, eliminando as soluções espúrias.**
   Substitua na equação original $\sqrt[n]{A}+B=C$ os valores que você encontrou e elimine aqueles que não satisfazem essa equação.

Para compreender a importância do isolamento da raiz, observe que, se efetuássemos

$$(\sqrt{A}+B)^2=C^2,$$

obteríamos

$$A+2B\sqrt{A}+B^2=C^2$$

e a raiz não seria eliminada.

Apresentamos, a seguir, exemplos de equações resolvidas usando essa estratégia.

Problema 7. Equações irracionais

Resolva as equações.

a) $\sqrt{6-x}=4$

b) $(x-5)^{3/4}=8$

c) $\sqrt{2x-1}+2x=3$

d) $x^{1/2}-x^{1/4}-12=0$

Solução.

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{6-x} &= 4 && \text{Equação original.}\\ (\sqrt{6-x})^2 &= 4^2 && \text{Elevando ao quadrado os dois lados.}\\ 6-x &= 16 && \text{Simplificando a equação.}\\ -10 &= x && \text{Reorganizando os termos.}\end{aligned}$$

Para saber se $x=-10$ é realmente uma solução do problema, substituímos esse valor na equação original:

$$\begin{aligned}\sqrt{6-(-10)} &= 4\\ \sqrt{16} &= 4\\ 4 &= 4 \quad \text{Ok!}\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $x=-10$ é solução.

b)

$$\begin{aligned}(x-5)^{3/4} &= 8 && \text{Equação original.}\\ ((x-5)^{3/4})^{4/3} &= 8^{4/3} && \text{Elevando os dois lados a 4/3.}\\ x-5 &= 16 && \text{Calculando o termo do lado direito.}\\ x &= 21 && \text{Reorganizando os termos.}\end{aligned}$$

A substituição de $x=21$ na equação original comprova que essa é a solução do problema.

Conferindo a resposta

$$\begin{aligned}(21-5)^{3/4} &= 8\\ 16^{3/4} &= 8\\ (\sqrt[4]{16})^3 &= 8\\ 2^3 &= 8 \quad \text{Ok!}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1}+2x &= 3 && \text{Equação original.}\\ \sqrt{2x-1} &= 3-2x && \text{Isolando a raiz.}\\ 2x-1 &= (3-2x)^2 && \text{Elevando ao quadrado os dois lados.}\\ 2x-1 &= 9-12x+4x^2 && \text{Expandindo o termo do lado direito.}\\ -4x^2+14x-10 &= 0 && \text{Reorganizando os termos.}\\ 2x^2-7x+5 &= 0 && \text{Dividindo ambos os lados por } -2.\end{aligned}$$

Empregando a fórmula de Bháskara, determinamos as duas raízes dessa equação quadrática:

$$x_1=\frac{5}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2=1.$$

Substituindo essas raízes na equação original, constatamos que $x_1=\frac{5}{2}$ não a satisfaz, de modo que a única solução é $x=1$.

Conferindo a resposta

$$\begin{aligned}\sqrt{2\cdot 1-1}+2\cdot 1 &= 3\\ \sqrt{1}+2 &= 3\\ 3 &= 3 \quad \text{Ok!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2\cdot\frac{5}{2}-1}+2\cdot\frac{5}{2} &= 3\\ \sqrt{4}+5 &= 3\\ 7 &= 3 \quad \text{Falso!}\end{aligned}$$

d) Para resolver a equação $x^{1/2} - x^{1/4} - 12 = 0$, devemos, em primeiro lugar, reparar que $x^{1/2} = (x^{1/4})^2$.

Sendo assim, adotando a mesma estratégia empregada no Exemplo 8 da Seção 2.10, podemos fazer a substituição $y = x^{1/4}$, de modo a converter a equação em

$$y^2 - y - 12 = 0.$$

As raízes dessa equação quadrática – obtidas com o emprego da fórmula de Bháskara – são

$$y_1 = -3 \qquad \text{e} \qquad y = 4.$$

Logo, as soluções da equação original devem satisfazer

$$x^{1/4} = -3 \qquad \text{ou} \qquad x^{1/4} = 4.$$

Observando que

$$x^{1/4} = \sqrt[4]{x},$$

e lembrando que o valor de $\sqrt[n]{x}$ é sempre positivo quando n é par, concluímos que a equação

$$\sqrt[4]{x} = -3$$

não tem solução. Já para a equação $x^{1/4} = 4$, fazemos

$$x^{1/4} = 4 \qquad \text{Equação original.}$$

$$(x^{1/4})^4 = 4^4 \qquad \text{Elevando os dois lados a 4.}$$

$$x = 256 \qquad \text{Calculando o termo do lado direito.}$$

Verificando esse último valor, notamos que ele satisfaz a equação original, de modo que $x = 256$ é a única solução do problema.

Conferindo a resposta

$$256^{1/2} - 256^{1/4} - 12 = 0$$

$$16 - 4 - 12 = 0 \quad \text{Ok!}$$

Agora, tente os Exercícios 7 e 8.

Exercícios 2.12

1. Determine o domínio das expressões.

a) $\frac{x}{3x-8}$

b) $\frac{y-12}{16-y^2}$

c) $\frac{\sqrt{3x+1}}{2x-15+x^2}$

d) $\frac{2x}{16+9x^2}$

e) $\sqrt{5x-4}$

f) $\sqrt{35-7x}$

g) $\sqrt{x^2-8}$

h) $\sqrt[3]{x-7}$

i) $\frac{\sqrt{2x-5}}{20-8x}$

j) $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$

k) $\frac{x-6}{\sqrt{x-5}}$

l) $\frac{\sqrt{49-x^2}}{\sqrt{x}}$

m) $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}$

2. Simplifique as expressões, fatorando os termos, caso necessário. Suponha sempre que os denominadores são não nulos.

a) $\frac{2x-6}{x-3}$

b) $\frac{2x-6}{3-x}$

c) $\frac{x^2-3x}{4x-12}$

d) $\frac{3y-12}{6y-18}$

e) $\frac{2x-4}{3x-6}$

f) $\frac{x^2-x^3}{x}$

g) $\frac{x^2+x^4}{3x^3}$

h) $\frac{x^2y-xy^2}{xy}$

i) $\frac{x^2y-xy^2}{x-y}$

j) $\frac{x^2-9}{x^2-3x}$

k) $\frac{2x^2-50}{x^3+5x^2}$

l) $\frac{x^2-5x+4}{x-4}$

3. Calcule as expressões abaixo e simplifique o resultado quando possível.

a) $\frac{2}{x} + \frac{4}{5}$

b) $\frac{2}{5x} - \frac{4}{3}$

c) $\frac{2}{5x-1} + \frac{3}{7}$

d) $\frac{x+3}{1-x} - 2$

e) $\frac{5x}{x-4} + \frac{3}{x+1}$

f) $\frac{x}{x^2-9} - \frac{3x-1}{x-3}$

g) $\left(\frac{x^2-4x-12}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{2x+1}{x-6}\right)$

h) $\left(\frac{2x^2+8x}{x-5}\right) \cdot \left(\frac{x^2-25}{4x^2+20x}\right)$

i) $\frac{\frac{8}{5x}}{\frac{4}{35x}}$

j) $\frac{2-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}}$

k) $\frac{3u^3v^3}{v^5u^2} + \frac{u^2}{v^2}$

l) $\frac{2w^3}{y^2} - \frac{w^6y^3}{2w^3y^5}$

4. Racionalize os denominadores, supondo que x pertença a um domínio adequado.

a) $\frac{x}{\sqrt{3x}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$

c) $\frac{2}{2-\sqrt{2x}}$

d) $\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+4}$

e) $\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}-1}$

f) $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

5. Resolva as equações.

a) $\frac{x-2}{x+3} = 0$
b) $\frac{2x+5}{x-1} = 3$
c) $\frac{5x-2}{1-3x} = -1$
d) $\frac{3-x/2}{3x+8} = \frac{1}{4}$
e) $\frac{3x+5}{4x-5} = -3$
f) $\frac{4-x/2}{4x+1} = 0$
g) $\frac{x}{x^2-3x+2} = 0$
h) $\frac{2x^2}{x+5} = 5$
i) $\frac{x^2}{3x-2} = 2x - 1$
j) $\frac{2(x-\frac{5}{6})+1}{5x-3} = \frac{2}{3}$
k) $\frac{x^2-26}{x^2-9} = 10$
l) $\frac{x^2+1}{x^2-4} = 6$
m) $\frac{x^2+3x-10}{x^2-2} = 5$
n) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = 4$
o) $\frac{x^2-4x+9}{x^2-5x+6} = 3$

6. Resolva as equações.

a) $\frac{2}{x+1} - \frac{4}{x-1} = 0$
b) $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{x^2-1}$
c) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 3$
d) $\frac{2}{x-4} + \frac{5}{x-2} = 3$
e) $\frac{6}{x-3} + \frac{5}{x-4} = 2$
f) $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} = 1$
g) $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x-1} = \frac{2}{5}$
h) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x}$
i) $\frac{2}{x+1} - \frac{2}{2x-3} = \frac{3}{x}$
j) $\frac{4}{x-5} - \frac{5}{x-2} = \frac{12}{(x-5)(x-2)}$
k) $\frac{4}{5-2x} - \frac{3}{x} = 0$
l) $\frac{3x+4}{1-5x} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$

7. Resolva as equações.

a) $\sqrt{3x+4} = 8$
b) $\sqrt{x+1} = 2x - 1$
c) $\sqrt{2x+1} = x - 1$
d) $\sqrt{x-3} + x = 9$
e) $\sqrt{4-x} + 2 = 3x$
f) $4\sqrt{3x-1} = \frac{2}{3} - 2x$
g) $\sqrt{5-x^2} = 3 - 2x$
h) $\sqrt{8x+25} - 2 = 3 - 4x$
i) $\sqrt{4x+4} - x + 2 = 0$
j) $2x + \sqrt{10-4x} = 1$
k) $\sqrt{4x+5} - x = 2x + 4$
l) $\sqrt{2x+5} - 1 = x$
m) $3 + \sqrt{45-6x} = x$
n) $\sqrt{2x^2+7} = 2x - 1$
o) $\sqrt{25-3x^2} = -x$
p) $2\sqrt{9x^2-7} = 6$
q) $\sqrt{x^2+3} + x = 5$
r) $\sqrt{4x^2-1} + 1 = 2x$
s) $\sqrt{9x^2-2} - 3x = 4$

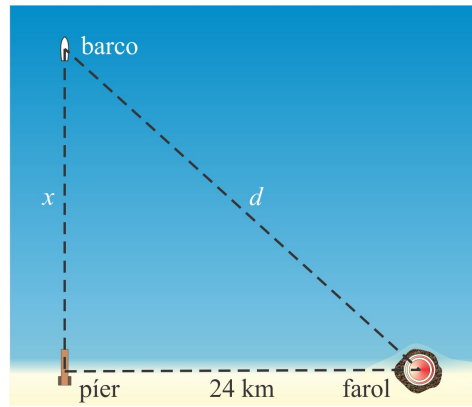
8. Resolva as equações.

a) $(x+2)^{2/3} = 9$
b) $(5x-6)^{3/2} = 8$
c) $\left(4x^2-13\right)^{3/5} = 27$
d) $x^{1/2} - 13x^{1/4} + 12 = 0$
e) $3\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 2$
f) $x^{1/3} - x^{1/6} = 2$

9. Prove que, para $a \geq 0$ e $b \geq 0$,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b},$$

salvo se $a = 0$ ou $b = 0$.

10. Um barco parte de um píer e seguiu trajetória perpendicular à costa, como mostra a figura. A 24 km do píer existe um farol, que é usado pelo barco em sua orientação. A distância horizontal (em km) entre o farol e o barco é dada por $d = \sqrt{24^2 + x^2}$, em que x é a distância (em km) entre o barco e o píer. Sabendo que o farol deixa de ser avistado pelo barco quando $d = 30$ km, determine a que distância do píer isso ocorre.

11. Uma indústria metalúrgica recebeu uma grande encomenda de parafusos, que podem ser produzidos em duas máquinas da empresa. A primeira máquina é capaz de produzir a encomenda em 8 horas, enquanto a segunda faz o mesmo serviço em 10 horas. Em quanto tempo é possível produzir os parafusos, usando as duas máquinas?

Dica:

- A primeira máquina produz 1/8 dos parafusos por hora. Já a segunda produz 1/10 dos parafusos por hora.
- Chamemos de t o tempo gasto para produzir os parafusos usando as duas máquinas. Nesse caso, a quantidade total de parafusos produzidos por hora nos fornece a equação

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{1}{t}.$$

- Para obter t, basta resolver essa equação.

12. Os canos A e B são capazes de encher um reservatório em 3 e 4 horas, respectivamente, quando abertos isoladamente. Por outro lado, sozinho, o cano C é capaz de esvaziar o reservatório em 5 horas. Escreva uma equação e determine o tempo que teremos que esperar para que o reservatório fique cheio, supondo que passa água em todos os canos.

13. Mayara e Genival trabalham juntos na produção de doces de festa. Em conjunto, os dois produzem um lote de doces em 1,2 horas. Entretanto, quando trabalham sozinhos, Genival gasta 1 hora a mais que Mayara para produzir o mesmo lote. Quanto tempo cada um gasta para produzir, sozinho, esse lote de petiscos?

14. Ao sair de casa, Rodolfo descobre que pode chegar ao seu compromisso na hora certa se dirigir a 60 km/h. Depois de dirigir 40% da distância original, ele descobre que estava trafegando apenas a uma velocidade média de 50 km/h. A que velocidade ele deve viajar deste momento em diante para chegar na hora certa?

Dica:

- Como você não sabe qual é a distância total que Rodolfo tem que percorrer, chame-a de x.
- Em função de x, escreva a distância que Rodolfo já percorreu e aquela que ainda falta percorrer.

- O tempo gasto em uma viagem é a razão entre a distância percorrida e a velocidade média. Assim, o tempo total da viagem de Rodolfo é dado por $x/60$.
- Chame de y a velocidade média em que Rodolfo deve viajar daqui para frente e escreva uma equação que relacione o tempo total de viagem ao tempo gasto nas duas partes do percurso (o tempo consumido até o momento e o tempo a ser gasto a partir de agora).
- Resolva a sua equação para obter y.

Respostas dos Exercícios 2.12

1. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{8}{3}\}$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -4 \text{ e } y \neq 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5 \text{ e } x \neq 3\}$
d) $\mathbb{R}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{4}{5}\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\sqrt{2} \text{ ou } x \geq 2\sqrt{2}\}$
h) $\mathbb{R}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\}$
j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$
k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
l) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 7\}$
m) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$

2. a) 2 b) -2 c) $\frac{x}{4}$ d) $\frac{y-4}{2(y-3)}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $x - x^2$ g) $\frac{1+x^2}{3x}$ h) $x - y$ i) xy j) $\frac{x+3}{x}$ k) $\frac{2(x-5)}{x^2}$ l) $x - 1$

3. a) $\frac{4x+10}{5x}$ b) $\frac{6-20x}{15x}$ c) $\frac{15x+11}{35x-7}$ d) $\frac{3x+1}{1-x}$ e) $\frac{5x^2+8x-12}{(x-4)(x+1)}$ f) $\frac{-3x^2-7x+3}{(x-3)(x+3)}$ g) $2x+1$ h) $\frac{x+4}{2}$ i) 14 j) $\frac{15x}{2}$ k) $\frac{3u+u^2}{v^2}$ l) $\frac{3w^3}{2y^2}$

4. a) $\frac{\sqrt{3x}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{2+x}}{2+x}$ c) $\frac{2-\sqrt{2x}}{2-x}$ d) $\frac{x+\sqrt{x}-20}{x-16}$ e) $\frac{\sqrt{2x-1}+1}{2}$ f) $\frac{x\sqrt{3}+3\sqrt{x}}{x-3}$

5. a) $x = 2$
b) $x = 8$
c) $x = \frac{1}{2}$
d) $x = \frac{4}{5}$
e) $x = \frac{2}{3}$
f) $x = 8$
g) $x = 0$
h) $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = 5$
i) $x = \frac{2}{5}$ ou $x = 1$
j) $x = 1$
k) $x = -\frac{8}{3}$ ou $x = \frac{8}{3}$
l) $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$
m) $x = 0$ ou $x = \frac{3}{4}$
n) $x = \frac{5}{3}$
o) $x = 1$ ou $x = \frac{9}{2}$

6. a) $x = -3$
b) $x = \frac{8}{5}$
c) $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 2$
d) $x = 3$ ou $x = \frac{16}{3}$
e) $x = 9$ ou $x = \frac{7}{2}$
f) $x = 10$
g) $x = -\frac{1}{12}$ ou $x = 2$
h) $x = -\frac{1}{2}$
i) $x = -\frac{9}{4}$ ou $x = 1$
j) Não há solução.
k) $x = \frac{3}{2}$
l) $x = 14$

7. a) $x = 20$
b) $x = \frac{5}{4}$
c) $x = 4$
d) $x = 7$
e) $x = \frac{11}{9}$
f) $x = \frac{1}{3}$
g) $x = \frac{2}{5}$
h) $x = 0$
i) $x = 8$
j) $x = -\frac{3}{2}$
k) $x = -\frac{11}{9}$ ou $x = -1$
l) $x = 2$
m) $x = 6$
n) $x = 3$
o) $x = -\frac{5}{2}$
p) $x = -\frac{4}{3}$ ou $x = \frac{4}{3}$
q) $x = \frac{11}{5}$
r) $x = \frac{1}{2}$
s) $x = -\frac{3}{4}$

8. a) $x = 25$
b) $x = 2$
c) $x = -8$ ou $x = 8$
d) $x = 1$ ou $x = 20736$
e) $x = 1$
f) $x = 64$

9. ...

10. $x = 18$ km

11. Em 40/9 horas (cerca de 4,444 h, ou 4 h 27 m).

12. 60/23 horas (cerca de 2,609 h, ou 2 h 37 m).

13. Mayara gasta 2h e Genival consome 3h.

14. A 69,23 km/h.

2.13 Inequações racionais e irracionais

Estendendo aquilo que foi visto na seção passada, trataremos agora das inequações que envolvem quocientes e raízes.

■ Inequações racionais

A solução de inequações racionais segue o roteiro apresentado na Seção 2.11, com algumas sutis adaptações. O quadro abaixo apresenta uma versão geral desse roteiro.

Roteiro para a solução de inequações racionais

1. **Mova todos os termos para o lado esquerdo da equação.**
   Se o lado esquerdo contiver frações, reduza-o a um denominador comum.

2. **Escreva a expressão do lado esquerdo como uma única fração na qual o numerador e o denominador estejam fatorados.**

Roteiro para a solução de inequações racionais (cont.)

3. **Determine os intervalos.**
   Determine para que valores cada fator vale zero e use-os para definir os extremos dos intervalos.

4. **Monte uma tabela ou diagrama.**
   Determine o sinal de cada fator, em cada intervalo.

5. **Resolva o problema.**
   Determine a solução do problema a partir dos sinais dos fatores.
   Elimine de seu conjunto solução os valores que não pertencem ao domínio.
   Expresse a solução como um conjunto formado por um ou mais intervalos.

O objetivo dos dois primeiros passos desse roteiro é a conversão da inequação a uma das formas

$$\frac{A}{B} \leq 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{A}{B} \geq 0,$$

nas quais o lado direito é zero. Escrevendo assim a inequação, podemos determinar os valores da variável analisando apenas o sinal das expressões A e B, já que

Observe que não é possível obter a solução de uma inequação na forma

$$\frac{A}{B} \leq C \qquad \text{ou} \qquad \frac{A}{B} \leq C$$

observando apenas os sinais de A e B, ou mesmo relacionando A com C e, em separado, B com C.

- $\frac{A}{B} > 0$ se A e B têm o mesmo sinal, ou seja, se

$$A > 0 \text{ e } B > 0 \qquad \text{ou} \qquad A < 0 \text{ e } B < 0;$$

- $\frac{A}{B} < 0$ se A e B têm sinais opostos, ou seja, se

$$A > 0 \text{ e } B < 0 \qquad \text{ou} \qquad A < 0 \text{ e } B > 0.$$

Exemplo 1. Resistores em paralelo

Voltemos a considerar o circuito elétrico apresentado na Figura 2.32, que é composto por dois resistores em paralelo. Como vimos no Problema 5 da Seção 2.12, a resistência total do circuito, R, está relacionada às resistências dos resistores por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Suponha que $R_1 = 9\,\Omega$, e que seja necessário determinat R_2 de modo que a resistência total seja maior ou igual a $4\,\Omega$, ou seja, que $R \geq 4$.

Para resolver esse problema, devemos escrever uma desigualdade que relacione R_2 ao limite estipulado para a resistência total. Embora não haja uma forma única de estabelecer essa relação, parece lógico fazê-lo manipulando a equação acima até que R apareça no numerador:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$ Equação original.

$$\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R}$$ Reduzindo o lado esquerdo ao mesmo denominador.

$$(R_2 + R_1)R = R_1 R_2$$ Efetuando o produto cruzado.

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$ Dividindo ambos os lados por $R_1 + R_2$.

Observe que $R \neq R_1 + R2$, como já foi dito no Problema 5 da Seção 2.12.

Pronto. Essa fórmula nos permite obter diretamente R a partir de R_1 e R_2, de modo que a desigualdade $R \geq 4$ pode ser convertida à forma

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \geq 4.$$

Finalmente, substituindo o valor conhecido de R_1, obtemos a desigualdade racional

$$\frac{9R_2}{9 + R_2} \geq 4.$$

que depende apenas de R_2, como desejávamos.

Formulado o problema, resta-nos resolver a desigualdade racional seguindo o roteiro apresentado acima.

1. Movendo os termos para o lado esquerdo:

$$\frac{9R_2}{9 + R_2} - 4 \geq 0.$$

2. Agrupando os termos do lado esquerdo em uma única fração:

$$\frac{9R_2}{9 + R_2} - \frac{4(9 + R_2)}{9 + R_2} \geq 0.$$

$$\frac{9R_2 - 36 - 4R_2}{9 + R_2} \geq 0.$$

$$\frac{5R_2 - 36}{9 + R_2} \geq 0.$$

3. Determinando os intervalos:

   O numerador da inequação acima vale zero se

$$5R_2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5R_2 = 36 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{36}{5}.$$

   Já o denominador é nulo quando

$$9 + R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = -9.$$

   Logo, os intervalos que nos interessam são $(-\infty, -9)$, $(-9, \frac{36}{5})$ e $(\frac{36}{5}, \infty)$.

4. Montando uma tabela:

Termo	$(-\infty, -9)$	$(-9, \frac{36}{5})$	$(\frac{36}{5}, \infty)$
$(5R_2 - 36)$	−	−	+
$(9 + R_2)$	−	+	+
$\frac{(5R_2-36)}{(9+R_2)}$	+	−	+

5. Determinando a solução:

   Como as expressões usadas na obtenção da solução do problema envolvem as frações

$$\frac{1}{R_2} \quad \text{e} \quad \frac{5R_2 - 36}{9 + R_2},$$

   devemos garantir que $R_2 \neq 0$ e $R_2 \neq -9$. Combinando essas condições com o resultado apresentado na tabela acima, concluímos que a desigualdade é satisfeita para

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -9 \text{ ou } x \geq \frac{36}{5}\}.$$

Entretanto, não faz sentido considerar valores negativos de resistência, de modo que a solução do problema é dada apenas por

$$R_2 \geq \frac{36}{5}\,\Omega.$$

Passemos, agora, à resolução de inequações racionais puramente algébricas.

Problema 2. Inequações racionais

Resolva as inequações.

a) $\frac{x-5}{4-x} \geq 0$ b) $\frac{2x-3}{x+1} \geq 1$ c) $\frac{1}{x} + 2 \leq -\frac{3}{x-2}$ d) $\frac{x+7}{x^2+1} \leq 4$

Solução.

a) A Inequação

$$\frac{x-5}{4-x} \geq 0$$

já está no formato adequado, ou seja, há um zero do lado direito e o lado esquerdo é composto por uma única fração. Desse modo, podemos partir diretamente para a determinação dos valores de x que "zeram" o numerador e o denominador:

$$x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

$$4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Dados esses valores, definimos os intervalos $(-\infty, 4)$, $(4, 5)$ e $(5, \infty)$, com os quais montamos a tabela abaixo.

Termo	$(-\infty, 4)$	$(4,5)$	$(5, \infty)$
$(x-5)$	$-$	$-$	$+$
$(4-x)$	$+$	$-$	$-$
$\frac{(x-5)}{(4-x)}$	$-$	$+$	$-$

Observando a tabela, constatamos que a fração é positiva no intervalo (4,5). Além disso, incluímos o ponto $x = 5$, no qual o numerador é nulo, mas não o ponto $x = 4$, no qual o denominador é nulo. Assim, o conjunto solução da inequação se torna

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 5\}.$$

b) Movendo para o lado esquerdo todos os termos da inequação

$$\frac{2x-3}{x+1} \geq 1,$$

obtemos

$$\frac{2x-3}{x+1} - 1 \geq 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{(2x-3)-(x+1)}{x+1} \geq 0,$$

ou ainda a

$$\frac{x-4}{x+1} \geq 0.$$

Para determinar os pontos em que o numerador e o denominador dessa equação são nulos, fazemos

$$x - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4.$$

$$x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1.$$

Tomando, então, os intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$ e $(4, \infty)$, montamos a tabela a seguir.

Termo	$(-\infty,-1)$	$(-1,4)$	$(4,\infty)$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(x-4)}{(x+1)}$	$+$	$-$	$+$

Analisando os extremos dos intervalos, observamos que o ponto $x = 4$ satisfaz a desigualdade, enquanto $x = -1$ não é aceitável, já que torna nulo o denominador. Assim, a solução da desigualdade é dada por

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geq 4\}.$$

c) A inequação

$$\frac{1}{x} + 2 \leq -\frac{3}{x-2}$$

pode ser reescrita como

$$\frac{1}{x} + 2 + \frac{3}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{(x-2) + 2x(x-2) + 3x}{x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x - 2 + 2x^2 - 4x + 3x}{x(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{2x^2 - 2}{x(x-2)} \leq 0$$

Aproveite o fato de o denominador estar fatorado, e não tente expandir o produto $x(x-2)$.

Apesar de já termos obtido uma inequação na forma $\frac{A}{B} \leq 0$, ainda precisamos fatorar o numerador antes de resolvê-la. Para tanto, resolvemos

$$2x^2 - 2 = 0,$$

fazendo

$$2x^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Logo

$$2x^2 - 2 = 2(x-1)(x+1)$$

e nossa inequação se torna

$$\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x-2)} \leq 0.$$

Observe que o numerador está fatorado, e vale zero se $x = 1$ ou $x = -1$ (as raízes da equação $2x^2 - 2 = 0$). Da mesma forma, o denominador está fatorado e é nulo se $x = 0$ ou se

$$x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2.$$

De posse desses quatro pontos, definimos os intervalos

$$(-\infty,-1), \quad (-1,0), \quad (0,1), \quad (1,2) \quad \text{e} \quad (2,\infty),$$

com os quais montamos a tabela abaixo.

Nesse exemplo, o sinal da expressão racional depende de quatro fatores. Quando há um número par de fatores negativos em um intervalo, o sinal resultante também é par. Da mesma forma, se o número de termos negativos é ímpar, a expressão é ímpar.

Termo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x-2)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como o denominador não pode ser zero, devemos tomar o cuidado de garantir que $x \neq 0$ e $x \neq 2$. Já os pontos $x = -1$ e $x = 1$ devem fazer parte do conjunto solução, que é dado por

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0 \ \text{ ou } \ 1 \leq x < 2\}.$$

d) Podemos converter a inequação

$$\frac{x+7}{x^2+1} \leq 4$$

em

$$\frac{x+7-4(x^2+1)}{x^2+1} \leq 0$$

$$\frac{-4x^2+x+3}{x(x-2)} \leq 0$$

Para fatorar o numerador, aplicamos a fórmula de Bháskara à equação $-4x^2+x+3 = 0$, obtendo

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-4)\cdot 3}}{2\cdot(-4)} = \frac{-1 \pm 7}{-8}.$$

Logo, as raízes da equação são $x_1 = -\frac{3}{4}$ e $x_2 = 1$, o que nos permite escrever

$$-4x^2 + x + 3 = -4\left(x + \frac{3}{4}\right)(x-1).$$

Tentando fatorar o denominador, notamos que $x^2 + 1 = 0$ implica em

$$x^2 = -1.$$

Como não admitimos a extração da raiz quadrada de números negativos, concluímos que a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui raiz real, sendo, portanto, irredutível. Assim, a forma fatorada de nossa inequação é

$$\frac{-4(x+\frac{3}{4})(x-1)}{x^2+1} \leq 0.$$

Além disso, reparamos que $x^2 \geq 0$ para qualquer x real, de modo que

$$x^2 + 1 > 0,$$

ou seja, o denominador da expressão racional é sempre positivo. Portanto, os intervalos relevantes desse problema são definidos apenas pelo numerador:

$$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right),\quad \left(-\frac{3}{4},1\right)\quad \text{e}\quad (1,\infty).$$

Juntando todas as informações fornecidas pelo numerador e pelo denominador, montamos a tabela

Além dos fatores do numerador, que variam conforme o intervalo, incluímos na tabela uma linha para a constante -4, que é sempre negativa, e outra para o denominador, que é sempre positivo. Apesar de essas duas linhas conterem informações óbvias, decidimos apresentá-las para que o leitor perceba que o resultado depende dos sinais de quatro termos.

Termo	$(-\infty,-\frac{3}{4})$	$(-\frac{3}{4},1)$	$(1,\infty)$
$(x+\frac{3}{4})$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
-4	$-$	$-$	$-$
(x^2+1)	$+$	$+$	$+$
$-\frac{4(x-\frac{3}{4})(x+1)}{x^2+1}$	$-$	$+$	$-$

Da tabela, concluímos que

$$\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x\le -\frac{3}{4}\quad \text{ou}\quad x\ge 1\right\}.$$

Agora, tente os Exercícios 1 e 2.

Inequações irracionais

A solução de inequações irracionais é uma tarefa árdua se comparada àquelas que já enfrentamos nessa seção, pois envolve a análise do sinal da desigualdade ("$\le$" ou "$\ge$"). Para reduzir nosso trabalho, trataremos aqui apenas de inequações que envolvem raízes quadradas, embora a ideia possa ser estendida, sem dificuldade, para as demais inequações com raízes de ordem par.

Observe que inequações com raízes de ordem ímpar são mais fáceis de resolver, já que não envolvem restrições de domínio.

Supondo, então, que A e B sejam expressões algébricas, vamos dividir nossa investigação em dois casos:

1. **Inequações na forma $\sqrt{A}\le B$.**

   Nesse caso, para que a raiz quadrada que aparece do lado esquerdo possa ser extraída, devemos exigir que
   $$A\ge 0.$$
   Além disso, como a aplicação da raiz quadrada produz sempre um número positivo (ou seja, $\sqrt{A}\ge 0$ sempre), é preciso que
   $$B\ge 0.$$
   Finalmente, sabendo que os termos dos dois lados da desigualdade são positivos, podemos elevá-los ao quadrado e requerer que
   $$\left(\sqrt{A}\right)^2\le B^2 \qquad\Rightarrow\qquad A\le B^2.$$
   Como todas as condições acima são indispensáveis para que uma inequação com o sinal "$\le$" seja satisfeita, dizemos que o conjunto solução é formado pela interseção das desigualdades
   $$A\ge 0,\quad B\ge 0\quad e\quad A\le B^2.$$

2. **Inequações na forma $\sqrt{A} \geq B$.**

Naturalmente, a exigência de que

$$A \geq 0$$

continua válida nesse caso, já que não podemos extrair a raiz quadrada de um número negativo. Entretanto, outras condições também devem ser impostas, dependendo do sinal de B:

- Se $B \leq 0$, a inequação será sempre satisfeita, já que $\sqrt{A} \geq 0$.
- Se $B \geq 0$, a inequação envolve apenas expressões positivas. Desse modo, elevando ao quadrado os dois lados, obtemos

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 \geq B^2 \qquad \Rightarrow \qquad A \geq B^2.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação deve satisfazer

$$(A \geq 0 \text{ e } B \leq 0) \qquad \text{ou} \qquad (A \geq 0 \text{ e } B \geq 0 \;\text{ e }\; A \geq B^2).$$

Como uma dessas condições já é suficiente, o conjunto solução da inequação será formado pela união das soluções dos dois conjuntos acima.

Você sabia?
A conjunção aditiva **"e"** implica na interseção de conjuntos, enquanto a conjunção alternativa **"ou"** representa a união de conjuntos

Observe que, em todas as inequações apresentadas acima, pressupomos que a raiz quadrada está aplicada a todo o lado esquerdo. Apesar de esse isolamento da raiz não ter sido imposto como condição até o momento, deve-se ter claro que ele é imprescindível para que possamos elevar os dois lados ao quadrado e, com isso, eliminar a raiz.

O quadro abaixo fornece um roteiro para a resolução de inequações irracionais.

Roteiro para a solução de inequações irracionais

1. **Isole a raiz no lado esquerdo da inequação.**
   Reescreva a inequação na forma $\sqrt{A} \leq B$ ou $\sqrt{A} \geq B$.

2. **Resolva a inequação resultante.**
   Determine os valores da variável que satisfazem as condições abaixo.

	Inequação	**Condições**
a)	$\sqrt{A} \leq B$	$A \geq 0,\;\; B \geq 0 \;\text{ e }\; A \leq B^2.$
b)	$\sqrt{A} \geq B$	$(A \geq 0 \;\text{ e }\; B \leq 0)$ **ou** $(A \geq 0,\;\; B \geq 0 \;\text{ e }\; A \geq B^2).$

Dica
Você não precisa decorar as condições ao lado, podendo deduzi-las quando necessário. Para tanto, basta lembrar que a expressão dentro de uma raiz quadrada deve ser positiva, e que a raiz quadrada sempre fornece um valor positivo.

Vejamos, agora, como essas condições podem ser aplicadas na prática.

Problema 3. Inequações irracionais

Resolva as inequações

a) $\sqrt{x} - 5 \leq 0$

b) $\sqrt{x} + 4 \leq 0$

c) $\sqrt{x-3} \leq 5 - x$

d) $\sqrt{6x-15} + 3 \geq 0$

e) $\sqrt{2-x} + 7 \geq 8$

f) $\sqrt{4x^2-7} + 2x \geq -1$

Solução.

a) O primeiro passo da solução da inequação $\sqrt{x} - 5 \leq 0$ é a sua conversão à forma $\sqrt{A} \leq B$, ou seja, a

$$\sqrt{x} \leq 5.$$

Em seguida, verificando que a desigualdade é do tipo "≤", impomos que

$A \geq 0,\ B \geq 0$ e $A \leq B^2$.

$$x \geq 0, \quad 5 \geq 0 \quad \text{e} \quad x \leq 5^2.$$

A segunda dessas condições é sempre válida, de modo que podemos ignorá-la. Assim, só precisamos exigir que x satisfaça, ao mesmo tempo,

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad x \leq 25.$$

Nesse caso, o conjunto solução da inequação é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 25\}.$$

b) A inequação $\sqrt{x} + 4 \leq 0$ é equivalente a

$$\sqrt{x} \leq -4.$$

As condições para que essa desigualdade seja satisfeita são

$A \geq 0,\ B \geq 0$ e $A \leq B^2$.

$$x \geq 0, \quad -4 \geq 0 \quad \text{e} \quad x \leq (-4)^2.$$

É fácil perceber que a segunda condição nunca é válida, de modo que a desigualdade não tem solução, ou seja, o conjunto solução é $\varnothing$.

c) Para a inequação $\sqrt{x-3} \leq 5 - x$ devemos impor que

$A \geq 0,\ B \geq 0$ e $A \leq B^2$.

$$x - 3 \geq 0, \quad 5 - x \geq 0 \quad \text{e} \quad x - 3 \leq (5-x)^2.$$

As duas primeiras condições implicam em

$5 \geq x \quad \Rightarrow \quad x \leq 5.$

$$x \geq 3 \qquad \text{e} \qquad x \leq 5.$$

Já a terceira condição é equivalente a

$$x - 3 \leq 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + x^2 \quad \Rightarrow \quad x - 3 \leq 25 - 10x + x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x + 28 \geq 0.$$

Resolvendo a equação associada ($x^2 - 11x + 28 = 0$), obtemos

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 3}{2}.$$

Assim, as raízes da equação são $x_1 = 7$ e $x_2 = 4$. Usando esses valores, podemos converter a terceira condição à forma fatorada:

$$x^2 - 11x + 28 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-4)(x-7) \geq 0.$$

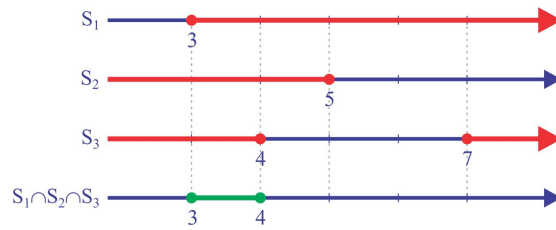
Para determinar as soluções dessa inequação, recorremos à seguinte tabela:

Termo	$(-\infty, 4)$	$(4,7)$	$(7, \infty)$
$(x-4)$	−	+	+
$(x-7)$	−	−	+
$(x-4)(x-7)$	+	−	+

Logo, temos

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \quad \text{ou} \quad x \geq 7\}.$$

Finalmente, podemos juntar as desigualdades em um só diagrama, obtendo, assim, a interseção de todas as três.

Nesse diagrama, os conjuntos solução das três condições estão indicados em vermelho, e a solução do problema aparece ao final, em verde.

Observamos, portanto, que a solução do problema é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}.$$

d) Para resolver a desigualdade $\sqrt{6x-15}+3 \geq 0$, precisamos reescrevê-la na forma $\sqrt{A} \geq B$, o que nos leva a

$$\sqrt{6x-15} \geq -3.$$

Por se tratar de uma inequação do tipo "≥", devemos observar as duas possibilidades apresentadas no roteiro acima. Entretanto, como $-3 < 0$, já sabemos que $B \leq 0$, de modo que só é necessário exigir que $A \geq 0$, ou seja, que

$A \geq 0 \quad \text{e} \quad B \leq 0.$

$$6x-15 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 6x \geq 15 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{15}{6} \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{5}{2}.$$

Logo, o conjunto solução é

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \frac{5}{2}\right\}.$$

e) A inequação $\sqrt{2-x}+7 \geq 8$ equivale a

$$\sqrt{2-x} \geq 1.$$

Nesse caso, observamos que $B \geq 0$, de modo que devemos exigir que

$A \geq 0, \; B \geq 0 \quad \text{e} \quad A \geq B^2.$

$$2-x \geq 0 \quad \text{e} \quad 2-x \geq 1^2.$$

Efetuando algumas poucas contas, constatamos que essas condições são equivalentes a

$$x \leq 2 \quad \text{e} \quad x \leq 1,$$

cuja interseção é simplesmente

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}.$$

f) Convertendo a inequação $\sqrt{4x^2-7}+2x \geq -1$ à forma $\sqrt{A} \geq B$, obtemos

$$\sqrt{4x^2-7} \geq -1-2x.$$

Nesse caso, como não há garantias de que o lado direito seja sempre positivo, ou sempre negativo, devemos analisar em separado essas duas possibilidades.

- Supondo que $A \geq 0 \;$ e $\; B \leq 0$, temos

$$4x^2-7 \geq 0 \quad \text{e} \quad -1-2x \leq 0.$$

Começando pela segunda desigualdade, concluímos que

$$-1 \leq 2x \quad \Rightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}.$$

Já a primeira desigualdade nos leva à equação quadrática associada $4x^2-7=0$, cuja solução é dada por

$$4x^2=7 \qquad \Rightarrow \qquad x^2=\frac{7}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Assim, convertendo $4x^2-7 \geq 0$ à forma fatorada

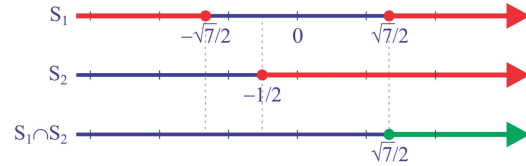
$$4\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \geq 0,$$

e montando a tabela

Termo	$(-\infty,-\frac{\sqrt{7}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2})$	$(\frac{\sqrt{7}}{2},\infty)$
$(x+\frac{\sqrt{7}}{2})$	$-$	$+$	$+$
$(x-\frac{\sqrt{7}}{2})$	$-$	$-$	$+$
$4(x+\frac{\sqrt{7}}{2})(x-\frac{\sqrt{7}}{2})$	$+$	$-$	$+$

concluímos que o conjunto solução de $4x^2-7 \geq 0$ é

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{\sqrt{7}}{2}\right\}.$$

Finalmente, para determinar a interseção das desigualdades $A \geq 0$ e $B \leq 0$, construímos o diagrama abaixo.

Assim, chegamos a

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \frac{\sqrt{7}}{2}\right\}.$$

- Supondo, agora, que $A \geq 0$, $B \geq 0$ e $A \leq B^2$, temos

$$4x^2-7 \geq 0, \quad -1-2x \geq 0 \quad \text{e} \quad 4x^2-7 \geq (-1-2x)^2.$$

O conjunto solução da primeira dessas desigualdades já foi obtido acima, e é dado por

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{\sqrt{7}}{2}\right\}.$$

Além disso, como já sabemos que a solução de $-1-2x \leq 0$ é definida por $x \geq -\frac{1}{2}$, podemos concluir que o conjunto solução da segunda desigualdade é

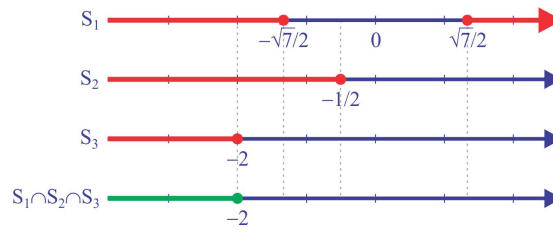
$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -\frac{1}{2}\right\}.$$

Resta-nos, portanto, resolver $4x^2-7 \geq (-1-2x)^2$. Para tanto, escrevemos

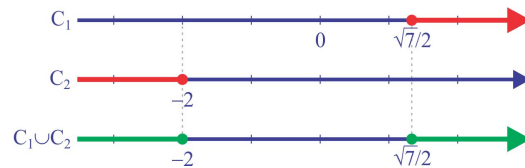
$$4x^2-7 \geq 1+4x+4x^2 \qquad \Rightarrow \qquad -8 \geq 4x \qquad \Rightarrow \qquad x \leq -\frac{8}{4}.$$

Logo, temos

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}.$$

A interseção dos três conjuntos acima, é apresentada no diagrama a seguir.

Assim, a solução do segundo caso é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}.$$

Reunindo em uma mesmo diagrama as duas possibilidades consideradas acima, obtemos

Da união dos conjuntos obtidos nos dois casos, concluímos que a solução do problema é

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{\sqrt{7}}{2}\right\}.$$

Agora, tente o Exercício 3.

Exercícios 2.13

1. Resolva as inequações.

a) $\frac{x-2}{x+3} \leq 0$
b) $\frac{x+4}{x-2} \geq 0$
c) $\frac{2x-3}{x-1} \leq 0$
d) $\frac{4x+5}{x+2} \geq 0$
e) $\frac{x-3}{2x+6} \leq 0$
f) $\frac{4-5x}{2x-1} \geq 0$
g) $3 - \frac{x}{x+2} \leq 0$
h) $\frac{3x-2}{5-2x} \geq 0$
i) $\frac{5x}{x-4} \geq 10$
j) $\frac{2x-7}{x-2} \geq 3$
k) $\frac{3x+10}{2x-5} \geq -3$
l) $\frac{3x-4}{1-6x} \leq 2$
m) $\frac{6-x}{x-4} \geq 1$

2. Resolva as inequações.

a) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x} \geq 0$
b) $\frac{x+8}{x^2+7x+12} \leq 0$
c) $\frac{x^2+5}{x^2-4} \geq 5$
d) $\frac{x^2+6}{x^2+1} \leq 2$
e) $1 + \frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{x}$
f) $\frac{4-2x}{x^2-4} \leq 3$
g) $\frac{x+6}{3x^2+2} \geq 1$
h) $\frac{x-5}{2x-5} \geq x$
i) $\frac{4x-7}{x+2} \leq x-2$
j) $\frac{3x-1}{x+4} + \frac{x}{x-5} \leq 0$
k) $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-3} \geq 2$
l) $\frac{x^2+2x+3}{x+15} \leq 1$
m) $\frac{3x^2+2x-13}{x^2-3x-10} \geq 2$

3. Resolva as inequações.

a) $\sqrt{x} - 8 \leq 0$
b) $\sqrt{x} - 3 \geq 0$
c) $\sqrt{x} + 10 \geq 0$
d) $\sqrt{6-5x} - 4 \geq 0$
e) $\sqrt{2x-3} \leq 5$
f) $\sqrt{3x+12} + 7 \geq 0$
g) $\sqrt{x+2} \geq x - 4$
h) $\sqrt{10-3x} \leq x - 2$
i) $\sqrt{8x+9} \leq 2x + 1$
j) $\sqrt{9x^2-1} \geq 2 - 3x$
k) $\sqrt{8-4x^2} + x \leq 3$
l) $\sqrt{x^2-4x-12} \leq 3x + 2$
m) $\sqrt{2x^2+1} - 2x + 1 \geq 0$
n) $\sqrt{-x^2+5x+14} - 2 \leq x$

4. O custo de produção (em reais) de x unidades de um carrinho metálico é dado por $1500 + 12x$. Dessa forma, o custo médio por unidade é expresso por

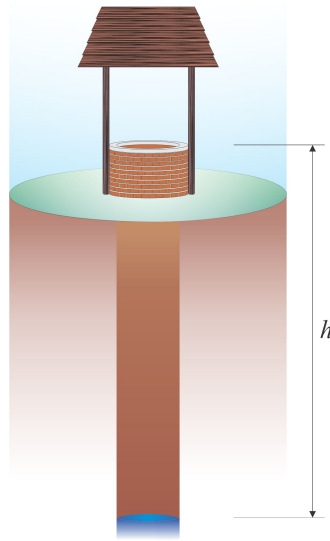
$$\frac{15000 + 12x}{x}.$$

Quantas unidades do carrinho devem ser produzidas para que o custo por unidade não seja superior a R$ 15,00?

5. Um fazendeiro deseja determinar a profundidade de um poço. Para tanto, ele deixa cair uma pedra a partir da boca do poço, e cronometra o tempo gasto até que o som da pedra tocando a água seja ouvido, obtendo valores entre 3,5 e 4 segundos. Sabe-se que o tempo de queda da pedra e o tempo que se leva para ouvir o som

desta atingindo a água são dados, respectivamente, por

$$t_q = \sqrt{\frac{h}{5}} \qquad \text{e} \qquad t_s = \frac{h}{340},$$

em que h é a altura do poço, em metros.

a) Escreva uma inequação que represente o problema.

b) Determine a profundidade mínima e a profundidade máxima do poço.

6. A potência de uma lâmpada está relacionada à tensão da rede elétrica e à resistência da lâmpada pelas fórmulas

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad \text{ou} \qquad V = \sqrt{PR},$$

em que P é a potência, em watts (W), R é a resistência, em ohms (Ω), e V é a tensão, em volts (V). Sabendo que, em uma determinada casa, a tensão varia entre 110 V e 130 V, determine o potência mínima e máxima de uma lâmpada com resistência de 161,3 Ω.

7. A prefeitura de Bom Jesus resolveu reservar uma área retangular de 200 m^2 para a construção de um pequeno parque infantil. Entretanto, para que o parque não fique muito estreito e comprido, a prefeitura determinou que uma de suas dimensões deverá ser maior ou igual á metade da outra, e menor ou igual ao dobro da outra, ou seja,

$$\frac{x}{2} \le y \le 2x,$$

onde x e y são as dimensões do parque. Lembrando que a área da região retangular é igual a xy,

a) defina y em relação a x, a partir da área do parque;

b) determine o valor mínimo e o valor máximo de x.

Respostas dos Exercícios 2.13

1.
a) $-3 < x \le 2$
b) $x \le -4$ ou $x > 2$
c) $1 < x \le \frac{3}{2}$
d) $x < -2$ ou $x \ge -\frac{5}{4}$
e) $-3 < x \le 3$
f) $\frac{1}{2} < x \le \frac{4}{5}$
g) $-3 \le x < -2$
h) $\frac{2}{3} \le x < \frac{5}{2}$
i) $4 < x \le 8$
j) $-1 \le x < 2$
k) $x \le \frac{5}{9}$ ou $x > \frac{5}{2}$
l) $x < \frac{1}{6}$ ou $x \ge \frac{2}{5}$
m) $4 < x \le 5$

2.
a) $x < -1$ ou $0 < x \le 1$ ou $x \ge 2$
b) $x \le -8$ ou $-4 < x < -3$
c) $-\frac{5}{2} \le x < -2$ ou $2 < x \le \frac{5}{2}$
d) $x \le -2$ ou $x \ge 2$
e) $-2 \le x < -1$ ou $0 < x \le 1$
f) $x \le -\frac{8}{3}$ ou $x > -2$
g) $-1 \le x \le \frac{4}{3}$
h) $x < \frac{5}{2}$
i) $-2 < x \le 1$ ou $x \ge 3$
j) $-4 < x \le \frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2} \le x < 5$
k) $-\sqrt{5} \le x < -1$ ou $\sqrt{5} \le x < 3$
l) $x < -15$ ou $-4 \le x \le 3$
m) $x \le -7$ ou $-2 < x \le -1$ ou $x > 5$

3.
a) $0 \le x \le 64$
b) $x \ge 9$
c) $x \ge 0$
d) $x \le -2$
e) $\frac{3}{2} \le x \le 14$
f) $x \ge -4$
g) $-2 \le x \le 7$
h) $3 \le x \le \frac{10}{3}$
i) $x \ge 2$
j) $x \ge \frac{5}{12}$
k) $-\sqrt{2} \le x \le \frac{1}{5}$ ou $1 \le x \le \sqrt{2}$
l) $x \ge 6$
m) $x \le 2$
n) $x = -2$ ou $\frac{5}{2} \le x \le 7$

4. 5000 unidades ou mais.

5.
a) $3{,}5 \le \sqrt{h/5} + h/340 \le 4$.
b) $55{,}7\,\text{m} \le h \le 71{,}8\,\text{m}$

6. A potência varia entre um mínimo de 75,0 W e um máximo de 104,8 W.

7.
a) $y = 200/x$.
b) $10 \le x \le 20$

2.14 Valor absoluto

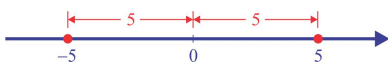



Figura 2.33: A relação entre módulo e distância à origem.

Já vimos no Capítulo 1 que o **valor absoluto** (ou módulo) de um número x, representado por $|x|$, corresponde à distância entre o ponto x (sobre a reta real) e a origem. Assim, como o ponto -5 e o ponto 5 estão a uma distância de 5 unidades da origem (vide a Figura 2.33), dizemos que $|-5| = 5$ e que $|5| = 5$. Uma definição formal de módulo é dada a seguir.

Valor absoluto

Dado um número real x, definimos

$$|\,x\,| = \begin{cases} x, & \text{se} \;\; x \geq 0; \\ -x, & \text{se} \;\; x < 0. \end{cases}$$

Você sabia?
O valor absoluto também é definido por

$$|\,x\,| = \sqrt{x^2}.$$

Observe que essa definição é feita por partes, ou seja, o módulo é definido de duas formas diferentes, e a forma a ser usada depende do valor de x:

- Se x é um número é positivo, o valor absoluto é seu próprio valor. Logo, $|4| = 4$.
- Se x é um número é negativo, o valor absoluto é obtido eliminando-se o sinal. Assim, $|-10{,}2| = -(-10{,}2) = 10{,}2$.

Problema 1. Valor absoluto

Elimine o módulo das expressões, aplicando a definição de valor absoluto.

a) $|-\frac{3}{8}|$

b) $|\sqrt{2}-1|$

c) $|3-2\sqrt{3}|$

d) $-|-5|$

e) $|\sqrt{-3}|$

f) $\sqrt{|-3|}$

g) $|0|$

h) $|2x-1|$

i) $|x^2-4|$

Solução.

a) $|-\frac{3}{8}| = -(-\frac{3}{8}) = \frac{3}{8}$.

b) Como $\sqrt{2} > 1$, a expressão $\sqrt{2}-1$ é positiva, de modo que $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$.

c) Como $2\sqrt{3} \approx 3{,}4641$, e $3 - 3{,}4641 < 0$, temos $|3-2\sqrt{3}| = -(3-2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-3$.

d) $-|-5| = -[-(-5)] = -5$.

e) Como a raiz de um número negativo não está definida no conjunto dos números reais, não podemos calcular $|\sqrt{-3}|$.

f) $\sqrt{|-3|} = \sqrt{-(-3)} = \sqrt{3}$.

g) $|0| = 0$.

h) Aplicando a definição de módulo, temos

$$|\,2x-1\,| = \begin{cases} 2x-1, & \text{se} \;\; 2x-1 \geq 0; \\ -(2x-1), & \text{se} \;\; 2x-1 < 0. \end{cases}$$

Reorganizando os termos, escrevemos

$$|\,2x-1\,| = \begin{cases} 2x-1, & \text{se} \;\; x \geq \frac{1}{2}; \\ 1-2x, & \text{se} \;\; x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

i) Fatorando x^2-4, obtemos

$$x^2-4 = (x-2)(x+2).$$

Tomando, então, os intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2{,}2)$ e $(2,\infty)$, podemos montar a tabela

Termo	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Logo,

$$x^2-4 \geq 0, \quad \text{se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2;$$
$$x^2-4 < 0, \quad \text{se } -2 < x < 2.$$

Dessa forma,

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & \text{se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2; \\ 4-x^2, & \text{se } -2 < x < 2. \end{cases}$$

Agora, tente os Exercícios 1 e 4.

Algumas propriedades úteis do valor absoluto são dadas a seguir.

Propriedades do valor absoluto

Suponha que a e b sejam números reais.

	Propriedade	Exemplo
1.	$\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3{,}8\rvert = 3{,}8 \geq 0$
2.	$\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert$	$\lvert -12{,}5\rvert = \lvert 12{,}5\rvert$
3.	$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$	$\lvert -2x\rvert = \lvert -2\rvert\,\lvert x\rvert = 2\lvert x\rvert$
4.	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert -\frac{5}{y}\right\rvert = \frac{\lvert -5\rvert}{\lvert y\rvert} = \frac{5}{\lvert y\rvert}$
5.	$\lvert a^n \rvert = a^n$, se n é par	$\lvert x^2\rvert = x^2$
6.	$\lvert a+b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	$\lvert x+3\rvert \leq \lvert x\rvert + 3$

Problema 2. Expressões com módulo

Aplicando a definição e as propriedades do valor absoluto, calcule as expressões

a) $\left|-\frac{x}{6}\right|$

b) $|-3x^3|$

c) $\frac{|-5x|}{4} - \left|-\frac{3x}{2}\right|$

d) $\frac{|xy|}{|2y^3|}$

e) $\frac{|x|}{x}$

f) $|x+1| + |3-x|$

Solução.

a)

$$\left|-\frac{x}{6}\right| = \frac{|-x|}{|6|} \qquad \text{Propriedade 4.}$$
$$= \frac{|-x|}{6} \qquad \text{Cálculo de } |6|.$$
$$= \frac{|x|}{6} \qquad \text{Propriedade 2.}$$

Atenção

Observe que $|-x| \neq x$. A propriedade 2 nos diz que $|-x| = |x|$.

b)

$$\begin{aligned} |-3x^3| &= |-3| \cdot |x^3| && \text{Propriedade 3.} \\ &= 3|x^3| && \text{Cálculo de } |-3|. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{|-5x|}{4} - \left|-\frac{3x}{2}\right| &= \frac{|-5|\,|x|}{4} - \left|-\frac{3}{2}\right||x| && \text{Propriedade 3.} \\ &= \frac{5|x|}{4} - \frac{3|x|}{2} && \text{Cálculo de } |-5| \text{ e } \left|-\tfrac{3}{2}\right|. \\ &= \frac{5|x| - 6|x|}{4} && \text{Soma de frações com denominadores diferentes.} \\ &= -\frac{|x|}{4} && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{|xy|}{|2y^3|} &= \left|\frac{xy}{2y^3}\right| && \text{Propriedade 4.} \\ &= \left|\frac{x}{2y^2}\right| && \text{Simplificação da expressão racional.} \\ &= \frac{|x|}{|2y^2|} && \text{Propriedade 4.} \\ &= \frac{|x|}{|2|\,|y^2|} && \text{Propriedade 3.} \\ &= \frac{|x|}{2|y^2|} && \text{Cálculo de } |2|. \\ &= \frac{|x|}{2y^2} && \text{Propriedade 5.} \end{aligned}$$

e) Para calcular $\frac{|x|}{x}$, vamos usar a definição de valor absoluto e considerar, em separado, os casos em que $x > 0$ e $x < 0$:

Observe que $\frac{|x|}{x}$ não está definida para $x = 0$.

- Se $x > 0$, então $|x| = x$, de modo que
$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$
- Se $x < 0$, então $|x| = -x$, donde
$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

Logo,
$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

f) Para calcular $|x+1|+|3-x|$, precisamos usar duas vezes a definição de valor absoluto:

$$|\,x+1\,| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0; \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |\,x+1\,| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1; \\ -x-1, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

$$|\,3-x\,| = \begin{cases} 3-x, & \text{se } 3-x \geq 0; \\ -(3-x), & \text{se } 3-x < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |\,3-x\,| = \begin{cases} 3-x, & \text{se } x \leq 3; \\ x-3, & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

Dado que $|x+1|$ muda de sinal quando $x = -1$ e $|3-x|$ muda de sinal em $x = 3$, a soma dos módulos tem uma definição particular para cada um dos intervalos $(-\infty, -1)$, $[-1, 3]$ e $(3, \infty)$. A tabela abaixo mostra os termos que devem ser somados em cada caso.

Expressão	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|3-x\|$	$3-x$	$3-x$	$x-3$
$\|x+1\|+\|3-x\|$	$-x-1+3-x$	$x+1+3-x$	$x+1+x-3$

Logo, temos

$$|x+1|+|3-x| = \begin{cases} 2-2x, & \text{se } x<-1; \\ 4, & \text{se } -1 \le x \le 3; \\ 2x-2, & \text{se } x>3. \end{cases}$$

Agora, tente o Exercício 8.

■ Distância na reta real

O valor absoluto é útil não somente para indicar a distância de um número à origem, mas também para fornecer a distância entre dois pontos sobre a reta real. Observando a Figura 2.34, constatamos que a distância entre os pontos 1 e 4 é igual a $|4-1|$, bem como a $|1-4|$, já que essas duas expressões fornecem o valor positivo 3.

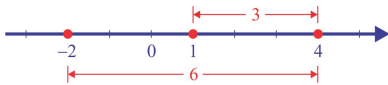



Figura 2.34: As distâncias entre 4 e 1, e entre 4 e -2.

Mas, se sabemos que a distância entre os pontos 1 e 4 corresponde à diferença $4-1$, porque adotar a notação $|1-4|$, por exemplo, que é muito mais complicada?

A resposta é simples. Usamos o módulo porque, em muitos casos, precisamos definir a distância entre um ponto desconhecido, x, e um ponto dado, b. Nesse caso, temos duas possibilidades:

- Se $x \ge b$, a distância é igual a $x-b$;
- Se $x > b$, então a distância vale $b-x$.

Mas como não sabemos se $x \ge b$ ou se $x < b$, não podemos dizer *a priori* qual das duas expressões acima deve ser usada. Assim, a melhor alternativa é escrever $|x-b|$, já que esse valor é sempre positivo. O mesmo ocorre com $|b-x|$, pois

$$|b-x| = |x-b|.$$

Distância entre dois pontos da reta real

A distância entre os pontos a e b da reta real é dada por

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b|.$$

Tomando, por exemplo, os pontos -2 e 4, também representados na Figura 2.34, podemos escrever

$$d(4,-2) = |(-2)-4| = |-6| = 6 \qquad \text{ou} \qquad d(4,-2) = |4-(-2)| = |6| = 6.$$

Problema 3. Cálculo de distância

Determine a distância entre 18,54 e $-27{,}31$.

Solução.

$$d(18{,}54;-27{,}31) = |18{,}54-(-27{,}31)| = |45{,}85| = 45{,}85.$$

Opcionalmente, poderíamos ter calculado a distância fazendo

$$d(18{,}54; -27{,}31) = |-27{,}31 - 18{,}54| = |-45{,}85| = 45{,}85.$$

Agora, tente o Exercício 7.

Tentemos, agora, determinar graficamente os pontos da reta real que estão a uma distância fixa de um valor conhecido.

Problema 4. Pontos à mesma distância de um valor conhecido

Exiba na reta real os pontos que estão a uma distância de 6 unidades do ponto 2.

Solução.

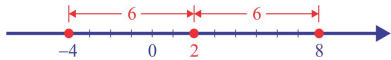



Figura 2.35: Pontos que estão a 6 unidades de distância de 2.

A Figura 2.35 mostra que tanto -4 como 8 distam 6 unidades do ponto 2. De fato, $2-6=-4$ e $2+6=8$. Para comprovar que os dois pontos são solução do problema, calculamos

$$d(2,-4) = |-4-2| = |-6| = 6 \qquad \text{e} \qquad d(2{,}8) = |8-2| = |6| = 6.$$

Equações com valor absoluto

Se queremos determinar os pontos da reta real que estão a uma distância de 3 unidades da origem, podemos escrever nosso problema na forma da equação

$$|x| = 3.$$

Para encontrar os valores de x que satisfazem essa equação, usamos a definição de valor absoluto e consideramos duas possibilidades:

- Se $x \geq 0$, então $|x| = x$, donde temos
$$x = 3.$$
- Se $x < 0$, então $|x| = -x$, de sorte que
$$-x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = -3.$$

Assim, o problema possui duas soluções, que são $x = 3$ e $x = -3$.

De forma semelhante, podemos determinar os pontos da reta real que estão a uma distância de 2 unidades de 5 resolvendo a equação

$$|5 - x| = 2.$$

Note que seria equivalente escrever $|x-5| = 2$.

Nesse caso, usando a definição de módulo, temos

$$|5-x| = \begin{cases} 5-x, & \text{se } 5-x \geq 0; \\ -(5-x), & \text{se } 5-x < 0. \end{cases}$$

Assim, podemos considerar os seguintes casos:

- Se $5 - x \geq 0$, ou seja $x \leq 5$, então
$$5-x=2 \quad \Rightarrow \quad -x = 2-5 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$
- Se $5 - x < 0$, o que equivale a $x > 5$, então
$$-(5-x) = 2 \quad \Rightarrow \quad 5-x=-2 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

Observe que, de fato, os pontos 3 e 7 estão a 2 unidades de distância do ponto 5.

Portanto, o conjunto solução é

$$S = \{3, 7\}.$$

Problema 5. Distância em uma estrada

Juca detectou um pequeno foco de incêndio no quilômetro 137 de uma estrada. Ao ligar para o serviço de emergência, Juca foi informado de que o quartel do corpo de bombeiros mais próximo ficava na mesma estrada, mas a 54 quilômetros de distância. Em quais quilômetros da estrada o quartel poderia estar localizado?

Solução.

O enunciado desse problema nos diz que

- O incêndio ocorreu no quilômetro 137.
- A distância entre o quartel e o foco de incêndio correspondia a 54 km.

Usando a variável x para representar o quilômetro no qual o quartel do corpo de bombeiros estava localizado, e lembrando que a distância entre dois pontos de uma mesma estrada é dada pelo módulo da diferença entre suas posições, podemos representar o problema por meio da equação

$$|\,137 - x\,| = 54.$$

Usando, então, a definição de módulo, temos

$$|\,137 - x\,| = \begin{cases} 137 - x, & \text{se } 137 - x \geq 0; \\ -(137 - x), & \text{se } 137 - x < 0. \end{cases}$$

Simplificando essa definição, obtemos

$$|\,137 - x\,| = \begin{cases} 137 - x, & \text{se } x \leq 137; \\ x - 137, & \text{se } x > 137. \end{cases}$$

Portanto, temos duas possibilidades

- Se $x \leq 137$, então

$$137 - x = 54 \qquad \Rightarrow \qquad x = 137 - 54 = 83.$$

- Por outro lado, se $x \leq 137$,

$$x - 137 = 54 \qquad \Rightarrow \qquad x = 137 + 54 = 191.$$

Assim, o quartel do corpo de bombeiros pode estar localizado tanto no quilômetro 83 como no quilômetro 191 da estrada.

Generalizando o problema da distância, consideraremos, agora, uma equação modular na forma geral

$$|A| = B,$$

em que A e B são equações algébricas. Nesse caso, à semelhança do que fizemos nos exemplos acima, a definição de valor absoluto nos permite escrever

$$|\,A\,| = \begin{cases} A, & \text{se } A \geq 0; \\ -A, & \text{se } A < 0. \end{cases}$$

Concluímos, portanto, que as soluções do problema devem satisfazer

$$A = B \quad \text{ou} \quad -A = B.$$

Entretanto, nem toda variável que atende a uma dessas condições é solução da equação, pois elas não asseguram que a Propriedade 1 apresentada acima seja satisfeita, ou seja, que $|A| \geq 0$.

Por exemplo, se aplicássemos as duas condições acima à equação

$$|x-3| = -1,$$

$x - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$x - 3 = -(-1) \quad \Rightarrow \quad x = 4$

obteríamos os valores $x = 2$ e $x = 4$, embora seja óbvio que a equação não possui solução, já que $|x-3| \geq 0$, independentemente do valor de x.

Assim, para que uma variável x seja declarada solução da equação, ela deve garantir, também, que $B \geq 0$.

Dica

Se você não quiser trabalhar com a desigualdade $B \geq 0$, pode resolver as equações $A = B$ e $A = -B$, e eliminar as soluções que não satisfizerem $|A| = B$.

Solução de uma equação modular

Dadas as expressões algébricas A e B, as soluções da equação $|A| = B$ devem satisfazer

$$(B \geq 0) \quad \text{e} \quad (A = B \ \text{ ou } \ -A = B).$$

Problema 6. Equações modulares

Resolva as equações

a) $|2-5x| = 6$

b) $|x^2-17| = 8$

c) $|3x+4| + 7x = 5$

d) $|x-6| = |4x+3|$

e) $|x^2-1| - 2x = 1$

Solução.

a) O termo do lado direito da equação $|2-5x| = 6$ já é positivo (ou seja, $B > 0$), de modo que só precisamos exigir que as soluções satisfaçam uma das condições $A = B$ ou $-A = B$.

- Supondo que $2 - 5x = 6$, temos

$$-5x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{5}.$$

- Já a condição $-(2-5x) = 6$ nos leva a

$$-2 + 5x = 6 \quad \Rightarrow \quad 5x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{5}.$$

Logo, o conjunto solução da equação é

$$S = \left\{-\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right\}.$$

b) A equação $|x^2-17| = 8$ atende a condição $B \geq 0$. Assim, mais uma vez, basta investigar para que valores de x uma das alternativas $A = B$ ou $-A = B$ é satisfeita:

- $x^2 - 17 = 8$ é equivalente a

$$x^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 5.$$

- $-(x^2-17) = 8$ fornece

$$-x^2 + 17 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3.$$

Portanto, o conjunto solução é

$$S = \{-5,\ -3,\ 3,\ 5\}.$$

c) Para resolver $|3x+4| + 7x = 5$ devemos, em primeiro lugar, isolar o módulo. Para tanto, reescrevemos a equação como

$$|3x+4| = 5 - 7x.$$

Nesse caso, a condição $B \geq 0$ é equivalente a $5 - 7x \geq 0$, de modo que devemos ter

$$-7x \geq -5 \quad \Rightarrow \quad 7x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{5}{7}.$$

Além disso, a solução da equação também deve satisfazer $A = B$ ou $-A = B$. Analisemos, em separado, cada um desses casos:

- Se $3x + 4 = 5 - 7x$, temos

$\frac{1}{10} \leq \frac{5}{7}$? ok!

$$10x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{10}.$$

- Se $-(3x+4) = 5 - 7x$, temos

$\frac{9}{4} \leq \frac{5}{7}$? Falso!

$$-3x - 4 = 5 - 7x \quad \Rightarrow \quad 4x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{4}.$$

Tendo em vista que esse último valor de x não satisfaz a condição $x \leq \frac{5}{7}$, concluímos que a única solução do problema é

$$x = \frac{1}{10}.$$

d) Como os dois lados de $|x-6| = |4x+3|$ são positivos, também podemos exigir apenas que as soluções da equação satisfaçam uma das duas condições $A = B$ ou $-A = B$.

- Para $x - 6 = 4x + 3$ temos

$$-3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{9}{3} = -3.$$

- Para $-(x-6) = 4x + 3$ temos

$$-x + 6 = 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad 5x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}.$$

Sendo assim,

$$S = \left\{-3,\ \frac{3}{5}\right\}.$$

e) Dada a equação $|x^2 - 1| - 2x = 1$, isolamos o módulo no lado direito escrevendo

$$|x^2 - 1| = 1 + 2x.$$

Considerando, agora, os casos $A = B$ e $-A = B$, temos

- Para $x^2 - 1 = 1 + 2x$:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x = 1 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 1 - \sqrt{3}.$$

- Para $-(x^2 - 1) = 1 + 2x$:

$$-x^2 + 1 = 1 + 2x$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Além disso, para que a equação seja satisfeita é preciso que $B \geq 0$, ou seja,

$$1 + 2x \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x \geq -1 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq -\frac{1}{2}.$$

Como os valores $x = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}732$ e $x = -2$ não satisfazem essa condição, concluímos que o conjunto solução do problema é definido apenas por

$$S = \left\{0,\ 1 + \sqrt{3}\right\}.$$

Agora, tente os Exercícios 13 e 14.

Inequações modulares

Até agora, discutimos como usar o valor absoluto para determinar a distância exata entre dois pontos da reta real. Nessa subseção, trataremos de um problema mais geral: vamos encontrar todos os pontos da reta cuja distância a um ponto fixo seja menor ou igual a um valor estipulado.

Começando com um exemplo simples, suponha que queiramos determinar os pontos que estão a uma distância menor ou igual a 3 da origem. Para representar matematicamente esse problema, recorremos à desigualdade

$$|x| \leq 3.$$

Para obter a solução dessa inequação, devemos combinar as propriedades das desigualdades e do módulo. Partindo, então, da definição do valor absoluto, que é dada por partes, dizemos que

- Se $x \geq 0$, então $|x| = x$, e devemos ter $x \leq 3$. Tomando, então, a interseção das desigualdades $x \geq 0$ e $x \leq 3$ obtemos o conjunto

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}.$$

- Se $x < 0$, então $|x| = -x$, e a inequação pode ser escrita como $-x \leq 3$, ou simplesmente $x \geq -3$. Nesse caso, a junção das condições fornece o conjunto

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 0\}.$$

Como todo ponto que pertence a S_1 ou a S_2 satisfaz a desigualdade $|x| \leq 3$, concluímos que o conjunto solução de nosso problema é dado por

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}.$$

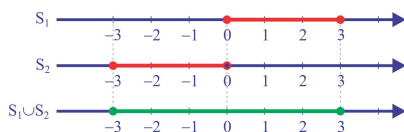



Figura 2.36: Solução de $|x| \leq 3$.

A solução desse problema é intuitiva, já que, observando a reta real, é fácil perceber que todo ponto entre −3 e 3 está a uma distância menor que 3 da origem. A Figura 2.36 mostra os conjuntos S_1 e S_2, bem como sua união.

Analisando, ainda, a Figura 2.36, constatamos que os pontos que estão a uma distância maior que 3 da origem são aqueles que pertencem ao conjunto complementar

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \quad \text{ou} \quad x > 3\}.$$

O quadro a seguir fornece a solução geral de um problema no qual substituímos a variável x por uma expressão algébrica A qualquer, e empregamos uma constante real positiva c no lugar do valor 3 usado em nosso exemplo.

Solução de inequações modulares

Dada a constante real $c \geq 0$ e a expressão algébrica A, temos

	Inequação	**Condição equivalente**
1.	$\lvert A\rvert \leq c$	$-c \leq A \leq c$
2.	$\lvert A\rvert \geq c$	$A \leq -c$ ou $A \geq c$

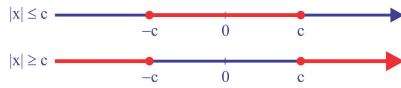



Figura 2.37: Gráficos de $|x| \leq c$ e $|x| \geq c$.

No caso particular em que $A = x$, as inequações do quadro se convertem simplesmente em $|x| \leq c$ e $|x| \geq c$, problemas cujas soluções na reta real são ilustradas na Figura 2.37.

Com base no quadro acima, pode-se estabelecer condições equivalentes para as desigualdades com “<” e “>”. Entretanto, essa estratégia não se aplica a inequações mais complicadas, como aquelas que envolvem a soma de módulos, as quais devem ser resolvidas usando-se diretamente a definição do valor absoluto, como veremos no Problema 8.

Problema 7. Distância máxima

Determinar os pontos da reta real cuja distância a 2 é menor ou igual a 5.

Solução.

A solução desse problema pode ser obtida resolvendo-se a inequação

$$|x - 2| \leq 5,$$

que é equivalente à primeira desigualdade do quadro acima, considerando-se $A = x - 2$.

Podemos obter uma solução puramente geométrica para o problema tomando os pontos

$$x_1 = 2 - 5 = -3 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 2 + 5 = 7,$$

e considerando o intervalo compreendido entre eles, incluindo os extremos, como mostrado na Figura 2.38.

Figura 2.38: Solução do Problema 7.

Já a solução algébrica pode ser obtida resolvendo-se a inequação equivalente

$$-5 \leq x - 2 \leq 5,$$

conforme mostrado abaixo.

-5	$\leq$	$x - 2$	$\leq$	5	Inequação original.
$-5 + 2$	$\leq$	$x - 2 + 2$	$\leq$	$5 + 2$	Somando 2 a todos os termos.
-3	$\leq$	x	$\leq$	7	Solução da inequação.

Problema 8. Inequações modulares

Resolva as inequações.

a) $|2x - 3| > 4$

b) $\left|\dfrac{x+5}{4}\right| \leq 1$

c) $1 \leq |x - 4| \leq 3$

d) $|4x^2 - 1| \leq x + 2$

e) $|x - 3| - |5x - 2| \geq x - 2$

Solução.

a) De acordo com o quadro acima, para resolver a inequação $|2x-3| > 4$, devemos considerar duas possibilidades: $2x-3 > 4$ e $2x-3 < -4$.

No primeiro caso, temos

$$\begin{array}{rcll} 2x-3 & > & 4 & \text{Inequação original.} \\ 2x & > & 7 & \text{Somando 3 aos dois lados.} \\ x & > & \dfrac{7}{2} & \text{Dividindo os dois lados por 2.} \end{array}$$

Já a segunda desigualdade fornece

$$\begin{array}{rcll} 2x-3 & < & -4 & \text{Inequação original.} \\ 2x & < & -1 & \text{Somando 3 aos dois lados.} \\ x & < & -\dfrac{1}{2} & \text{Dividindo os dois lados por 2.} \end{array}$$

O conjunto solução do problema corresponde à união dos intervalos acima, ou seja,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < -\frac{1}{2} \;\text{ ou }\; x > \frac{7}{2}\right\}.$$

b) A inequação $\left|\dfrac{x+5}{4}\right| \leq 1$ tem a forma $|A| \leq c$, de modo que empregamos a condição $-c \leq A \leq c$:

$$\begin{array}{rcccll} -1 & \leq & \dfrac{x+5}{4} & \leq & 1 & \text{Inequação original.} \\ -4 & \leq & x+5 & \leq & 4 & \text{Multiplicando todos os termos por 4.} \\ -9 & \leq & x & \leq & -1 & \text{Subtraindo 5 dos termos.} \end{array}$$

Portanto, o conjunto solução é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x \leq -1\}.$$

c) Para resolver a desigualdade dupla $1 \leq |x-4| \leq 3$ é preciso dividi-la em duas inequações modulares:

$$|x-4| \leq 3 \qquad \text{e} \qquad |x-4| \geq 1.$$

Em seguida, deve-se resolver em separado cada uma dessas inequações:

- A inequação $|x-4| \leq 3$ é equivalente a

  $$-3 \leq x-4 \leq 3 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \leq x \leq 7.$$

  Logo, temos

  $$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 7\}.$$

- Por sua vez, a solução de $|x-4| \geq 1$ exige novo desmembramento em

  $$x-4 \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 5.$$

  e

  $$x-4 \leq -1 \qquad \Rightarrow \qquad x \leq 3.$$

  A união desses intervalos fornece

  $$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \;\text{ ou }\; x \geq 5\}.$$

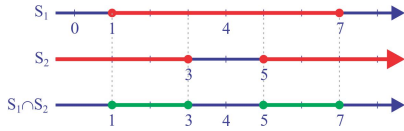



Figura 2.39: Pontos cuja distância a 4 está entre 1 e 3.

Como as desigualdades $|x-4| \leq 3$ e $|x-4| \geq 1$ devem ser satisfeitas simultaneamente, o conjunto solução do problema é dado por

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3 \quad \text{ou} \quad 5 \leq x \leq 7\}.$$

É importante ressaltar que a inequação dupla $1 \leq |x-4| \leq 3$ é a representação matemática do problema que consiste em encontrar os pontos da reta real cuja distância a 4 é maior ou igual a 1 e menor ou igual a 3. A solução gráfica desse problema é apresentada na Figura 2.39.

d) A inequação $|4x^2 - 1| \leq x + 2$ é equivalente a

$$-(x+2) \leq 4x^2 - 1 \leq x + 2,$$

desde que o lado direito não seja negativo, ou seja, desde que

$$x + 2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq -2.$$

Assim, toda solução do problema deve pertencer ao conjunto

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}.$$

Dividindo a desigualdade $-(x+2) \leq 4x^2 - 1 \leq x + 2$ em duas partes, temos

$$4x^2 - 1 \leq x + 2 \qquad \text{e} \qquad 4x^2 - 1 \geq -(x+2).$$

- A inequação $4x^2 - 1 \leq x + 2$ é equivalente a

$$4x^2 - x - 3 \leq 0,$$

cuja equação associada é $4x^2 - x - 3 = 0$. Para obter as raízes dessa equação, aplicamos a fórmula de Bháskara:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 49$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm 7}{8}.$$

Logo, $x_1 = 1$ e $x_2 = -\frac{3}{4}$, de modo que a equação é equivalente a

$$4(x-1)\left(x + \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Tomando, então, os intervalos $(-\infty, -\frac{3}{4})$, $(-\frac{3}{4}, 1)$ e $(1, \infty)$, montamos a tabela

Termo	$(-\infty, -\frac{3}{4})$	$(-\frac{3}{4}, 1)$	$(1, \infty)$
$(x-1)$	−	−	+
$(x+\frac{3}{4})$	−	+	+
$4(x-1)(x+\frac{3}{4})$	+	−	+

Portanto, o conjunto solução de $4x^2 - x - 3 \leq 0$ é

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{3}{4} \leq x \leq 1\right\}.$$

- Por sua vez, a inequação $4x^2 - 1 \geq -(x+2)$ é equivalente a

$$4x^2 + x + 1 \geq 0,$$

que tem equação associada $4x^2+x+1=0$. Aplicando, mais uma vez, a fórmula de Bháskara, obtemos

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = -15.$$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais. Testando, então, o polinômio $4x^2+x+1$ em $x=0$, observamos que

$$4\cdot 0^2 + 0 + 1 = 1.$$

Como esse valor é positivo, concluímos que a inequação $4x^2+x+1 \geq 0$ é satisfeita para todo x real, ou seja, seu conjunto solução é

$$S_3 = \mathbb{R}.$$

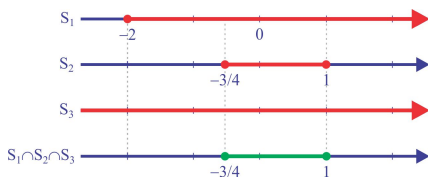



Figura 2.40: Solução de $|4x^2-1| \leq x+2$.

Como é preciso que as três desigualdades

$$x+2 \geq 0, \qquad 4x^2-1 \leq x+2 \qquad \text{e} \qquad 4x^2-1 \geq -(x+2),$$

sejam satisfeitas simultaneamente, a solução do problema é dada por

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{3}{4} \leq x \leq 1\right\}.$$

A Figura 2.40 mostra como esse conjunto solução foi obtido.

e) A inequação $|x-3| - |5x-2| \geq x-2$ contém a diferença de dois módulos, de modo que não podemos resolvê-la usando a estratégia apresentada no quadro da Página 247. Em lugar disso, aplicamos diretamente a definição de valor absoluto:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se } x-3 \geq 0; \\ -(x-3), & \text{se } x-3 < 0; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad |5x-2| = \begin{cases} 5x-2, & \text{se } 5x-2 \geq 0; \\ -(5x-2), & \text{se } 5x-2 < 0. \end{cases}$$

Simplificando as duas definições acima, obtemos

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se } x \geq 3; \\ 3-x, & \text{se } x < 3; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad |5x-2| = \begin{cases} 5x-2, & \text{se } x \geq \frac{2}{5}; \\ 2-5x, & \text{se } x < \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Figura 2.41: Definições de $|x-3|$ (acima do eixo) e $|5x-2|$ (abaixo do eixo).

Essas definições estão ilustradas na Figura 2.41. Observando a figura, constatamos que a diferença entre os módulos pode ser dada de três formas diferentes, dependendo do valor de x. A tabela abaixo fornece $|x-3| - |5x-2|$ em cada um dos três intervalos de interesse.

Termo	$(-\infty, \frac{2}{5})$	$[\frac{2}{5}, 3)$	$[3, \infty)$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	$3-x$	$x-3$
$\lvert 5x-2\rvert$	$2-5x$	$5x-2$	$5x-2$
$\lvert x-3\rvert - \lvert 5x-2\rvert$	$(3-x)-(2-5x)$	$(3-x)-(5x-2)$	$(x-3)-(5x-2)$

Para resolver o problema, devemos analisar a inequação separadamente em cada um desses intervalos:

- Para $x < \frac{2}{5}$, temos

$$3-x-2+5x \geq x-2 \qquad \Rightarrow \qquad 3x \geq -3 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq -1.$$

Tomando a interseção dessas duas condições sobre x, isto é, $x < \frac{2}{5}$ e $x \geq -1$, obtemos o conjunto solução

$(-\infty, \frac{2}{5}) \cap [-1, \infty) = [-1, \frac{2}{5})$

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 \leq x < \frac{2}{5}\right\}.$$

- Supondo, agora, que $\frac{2}{5} \leq x < 3$, temos

$$3 - x - 5x + 2 \geq x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad -7x \geq -7 \qquad \Rightarrow \qquad x \leq 1.$$

Novamente, a interseção das duas condições sobre x fornece o conjunto solução

$[\frac{2}{5}, 3) \cap (-\infty, 1] = [\frac{2}{5}, 1]$

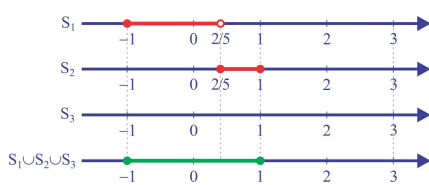
$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2}{5} \leq x \leq 1 \right\}.$$

- Finalmente, para $x \geq 3$, temos

$$x - 3 - 5x + 2 \geq x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad -5x \geq -1 \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \frac{1}{5}.$$

Nesse caso, como as duas condições sobre x têm interseção vazia, o conjunto solução é

$[3, \infty) \cap (-\infty, \frac{1}{5}] = \varnothing$

$$S_3 = \varnothing.$$

A solução geral do problema é dada pela união dos conjuntos solução dos três intervalos, ou seja,

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

A Figura 2.42 mostra os passos empregados na obtenção de S.

Figura 2.42: Solução do item (e).

Agora, tente o Exercício 17.

Exercícios 2.14

1. Elimine o módulo das expressões.

a) $|8|$
b) $|-8|$
c) $-|-8|$
d) $|3 - \pi|$
e) $|\pi - 3|$
f) $|\sqrt{8} - 4|$
g) $\left|-\frac{10}{5^2}\right|$
h) $\sqrt{|-4|}$

2. Calcule $|3x - 10|$ para $x = 2$ e $x = 5$.

3. Calcule $|7 - x|$ para $x = -7$, $x = 1$, $x = 7$ e $x = 12$.

4. Elimine o módulo das expressões.

a) $-|x|$
b) $|x| - 5$
c) $5 - |x|$
d) $|x - 5|$
e) $|5 - x|$
f) $|5x + 1|$
g) $|4 - 3x|$
h) $|x^2 + 7|$
i) $|x^2 - 9|$

5. Elimine o módulo da expressão $|x|/x^2$.

6. Calcule as expressões.

a) $|5 \cdot (-3)|$
b) $-3| - 5|$
c) $\left|\frac{(-3)}{(-6)}\right|$
d) $\left|\frac{5-17}{15-6}\right|$
e) $|-2| + 6| - 5|$
f) $|-2 + |-5||$

7. Calcule a distância entre os pontos da reta real.

a) $x_1 = -5$ e $x_2 = -8$
b) $x_1 = -10$ e $x_2 = 10$
c) $x_1 = 4{,}7$ e $x_2 = 1{,}2$
d) $x_1 = 2$ e $x_2 = -12$

8. Calcule as expressões.

a) $|(-4x) \cdot (-6)|$
b) $\left|\frac{3x}{(-6)}\right|$
c) $\left|-\frac{(-3)}{6x}\right|$
d) $|-4x| + |8x|$
e) $|2x| - |-2x|$
f) $\left|\frac{2x}{3}\right| - \frac{|x|}{6}$
g) $\frac{|2x^2|}{|-4xy|}$
h) $\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$
i) $\sqrt{|-2x^2|}$

9. Reescreva as frases abaixo usando equações modulares.

a) A distância entre x e 2 é igual a 3.
b) A distância entre s e -3 é igual a 4.
c) A casa de minha avó e a casa de meu tio estão a 5 km de distância.
d) A farmácia e a padaria estão à mesma distância de minha casa.

10. Determine os pontos da reta real que estão a uma distância de 10 unidades de 6.

11. Determine os pontos da reta real que estão a uma distância de $\frac{3}{2}$ unidades de -1.

12. Resolva as equações.

a) $|x| = 4$
b) $|x| = -4$
c) $x = |-4|$
d) $x = |4|$
e) $|x| = |4|$
f) $|x| = |-4|$

13. Resolva as equações.

a) $|x-3| = 4$
b) $|x-\frac{1}{2}| = 2$
c) $|4-x| = \frac{1}{10}$
d) $|3x-1| = 6$
e) $|x-2| = -1$
f) $|\frac{x-3}{4}| = 12$
g) $|5-4x| = 1$
h) $|5x-2| = 13$
i) $\left|\frac{2-3x}{4}\right| = 5$
j) $\left|\frac{3x}{2}-1\right| = \frac{5}{2}$
k) $|5x-3| = 3x+15$
l) $|2x-3| = 5-4x$
m) $|6-x| + 5x = 7$
n) $\left|\frac{7+4x}{3}\right| = 5+x$
o) $|3x+5| = |x-3|$
p) $|2x+1| = |2-5x|$
q) $|x-1| + |x+2| = 5$
r) $|2x-5| - |x-2| = 3x+1$

14. Resolva as equações.

a) $|x^2-10| = 6$
b) $|4x^2+1| = 10$
c) $|x^2-6x| = 7$
d) $|x^2+2| - 4x = 2$
e) $|2x^2-3| - x = 3$
f) $x^2 = |5x-6|$
g) $x^2+3x-1 = |3x+8|$
h) $|x^2-9| = |2x^2-3|$
i) $|x^2-4| = |5x-10|$
j) $|x^2-1| = |3x^2-27|$

15. Resolva as equações.

a) $|x|^2 - 8|x| + 7 = 0$
b) $2|x|^2 - 7|x| + 3 = 0$

16. Reescreva as frases abaixo usando desigualdades modulares.

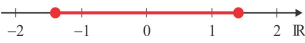
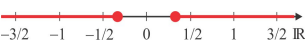
a) A distância entre x e 5 é superior a 3.
b) Meu carro está, no máximo, a 2 km do posto de gasolina, que fica no quilômetro 32 da estrada.
c) Uma balança indicou que o pão francês pesa 50 g, com um erro máximo de 2 g.
d) O GPS indicou que estou a 5 km de minha casa, com um erro máximo de 10 m.
e) Um radar indicou que o carro estava a 68 km/h, com um erro máximo de 5

17. Resolva as desigualdades.

a) $|x-4| \le -2$
b) $|x-4| \le 0$
c) $|x-4| \ge 0$
d) $|x-3| \le 4$
e) $|x-\frac{1}{2}| < 2$
f) $|5-x| \le 3$
g) $|4x-9| \le 3$
h) $|2-x| \ge 6$
i) $|3x-1| > 5$
j) $|3x+7| \le 4$
k) $|5x-8| \le 2$
l) $|2x-3| \ge 7$
m) $\left|\frac{5x}{4}-\frac{1}{2}\right| \le 8$
n) $2 \le |x-1| \le 7$
o) $3 \le |4x-7| \le 5$
p) $1 \le \left|\frac{3x-5}{4}\right| \le 2$
q) $|x-4| \ge 3x-8$
r) $|2x+5| \ge x+7$
s) $|5x-6| \le 2x-1$
t) $|x+5| - |3x-1| \ge x-8$
u) $|x-2| + |x+8| \ge 2x+12$
v) $|x-9| + |x-3| \le x$

18. Identifique, na reta real, os intervalos definidos pelas desigualdades.

a) $|x| \le \sqrt{2}$
b) $|x| \ge \frac{1}{3}$
c) $|x+2| > 4$
d) $|x+3| < 2$
e) $|x-1| \ge 3$
f) $|x-5| \le 1$

19. Resolva as desigualdades.

a) $|x^2-3| \ge 1$
b) $|x^2-9| + x \le 3$
c) $|x^2-2x| \le 8$
d) $|2x^2+3x| \ge 9$
e) $|x^2+4x| \le 1$
f) $|4x^2+x| \le x+4$
g) $|x^2-5x| \le 3x$
h) $|x^2-6| \ge x^2$
i) $|x^2-4x| \ge x^2+1$
j) $|x+1| - |2x-3| \ge x^2-2$

20. Uma rede de lanchonetes não permite que duas de suas lojas estejam a menos de 25 km de distância. Se há uma loja da rede no quilômetro 67 de uma estrada, em que parte da mesma estrada é permitida a instalação de outra lanchonete da rede?

Respostas dos Exercícios 2.14

1. a) 8 b) 8 c) -8 d) $\pi-3$ e) $\pi-3$ f) $4-\sqrt{8}$ g) $\frac{2}{5}$ h) 2

2. 4 e 5

3. 14, 6, 0 e 5

4.
a) $\begin{cases} -x, & \text{se } x \ge 0; \\ x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$
b) $\begin{cases} x-5, & \text{se } x \ge 0; \\ -x-5, & \text{se } x < 0. \end{cases}$
c) $\begin{cases} 5-x, & \text{se } x \ge 0; \\ 5+x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$
d) $\begin{cases} x-5, & \text{se } x \ge 5; \\ 5-x, & \text{se } x < 5. \end{cases}$
e) $\begin{cases} x-5, & \text{se } x \ge 5; \\ 5-x, & \text{se } x < 5. \end{cases}$
f) $\begin{cases} 5x+1, & \text{se } x \ge -1/5; \\ -5x-1, & \text{se } x < -1/5. \end{cases}$
g) $\begin{cases} 4-3x, & \text{se } x \le 4/3; \\ 3x-4, & \text{se } x > 4/3. \end{cases}$
h) x^2+7
i) $\begin{cases} x^2-9, & \text{se } x \le -3 \text{ ou } x \ge 3; \\ 3x-4, & \text{se } -3 < x < 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 1/x, & \text{se } x > 0; \\ -1/x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

6. a) 15 b) -15 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 32 f) 3

7. a) 3 b) 20 c) 3,5 d) 14

8. a) $24|x|$ b) $\frac{|x|}{2}$ c) $\frac{1}{2|x|}$ d) $12|x|$ e) 0 f) $\frac{|x|}{2}$ g) $\frac{|x|}{2|y|}$ h) 1 i) $|x|\sqrt{2}$

9. a) $|x-2| = 3$ b) $|s+3| = 4$ c) $|a-t| = 5$ d) $|c-f| = |c-p|$

10. $x = -4$ e $x = 16$

11. $x = -\frac{5}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$

12.
a) $x = -4$ ou $x = 4$
b) Não há solução.
c) $x = 4$
d) $x = 4$
e) $x = -4$ ou $x = 4$
f) $x = -4$ ou $x = 4$

13.
a) $x = -1$ ou $x = 7$
b) $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$
c) $x = 3{,}9$ ou $x = 4{,}1$
d) $x = -\frac{5}{3}$ ou $x = \frac{7}{3}$
e) Não há solução
f) $x = -45$ ou $x = 51$
g) $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$
h) $x = -\frac{11}{5}$ ou $x = 3$
i) $x = -6$ ou $x = \frac{22}{3}$
j) $x = -1$ ou $x = \frac{7}{3}$
k) $x = 9$ ou $x = -\frac{3}{2}$
l) $x = 1$
m) $x = \frac{1}{4}$
n) $x = 8$ ou $x = -\frac{22}{7}$
o) $x = -4$ ou $x = -\frac{1}{2}$
p) $x = \frac{1}{7}$ ou $x = 1$
q) $x = -3$ ou $x = 2$
r) $x = \frac{1}{2}$

14. a) $x = -4$ ou $x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 4$

b) $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$
c) $x = -1$ ou $x = 7$
ou $x = 3 - \sqrt{2}$ ou $x = 3 + \sqrt{2}$
d) $x = 0$ ou $x = 4$
e) $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 0$ ou $x = 2$
f) $x = -6$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$
g) $x = 3$ ou $x = -3 - \sqrt{2}$
h) $x = -2$ ou $x = 2$
i) $x = -7$ ou $x = 2$ ou $x = 3$
j) $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$
ou $x = -\sqrt{13}$ ou $x = \sqrt{13}$

15. a) $x = -7$ ou $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 7$
b) $x = -3$ ou $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 3$

16. a) $|x - 5| > 3$
b) $|x - 32| \leq 2$
c) $|x - 50| \leq 2$
d) $|x - 5| \leq 0{,}01$
e) $|x - 68| \leq 3{,}4$

17. a) Não há solução
b) $x = 4$
c) $\mathbb{R}$
d) $-1 \leq x \leq 7$

e) $-3/2 < x < \frac{5}{2}$
f) $2 \leq x \leq 8$
g) $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$
h) $x \leq -4$ ou $x \geq 8$
i) $x < -\frac{4}{3}$ ou $x > 2$
j) $-\frac{11}{3} \leq x \leq -1$
k) $\frac{6}{5} \leq x \leq 2$
l) $x \leq -2$ ou $x \geq 5$
m) $-6 \leq x \leq \frac{34}{5}$
n) $-6 \leq x \leq -1$ ou $3 \leq x \leq 8$
o) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ou $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$
p) $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ou $3 \leq x \leq \frac{13}{3}$
q) $x \leq 3$
r) $x \leq -4$ ou $x \geq 2$
s) $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$
t) $-4 \leq x \leq \frac{14}{3}$
u) $x \leq -1$
v) $6 \leq x \leq 12$

18. a)

b)

–3/2 –1 –1/2 0 1/2 1 3/2 IR

c)

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 IR

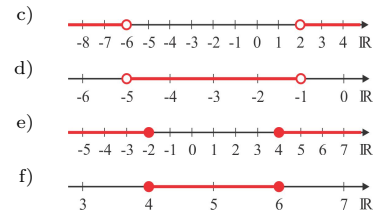
d)

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 IR

e)

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 IR

f)

3 4 5 6 7 IR

19. a) $x \leq -2$ ou $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ou $x \geq 2$
b) $-4 \leq x \leq -2$ ou $x = 3$
c) $-2 \leq x \leq 4$
d) $x \leq -3$ ou $x \geq \frac{3}{2}$
e) $-\sqrt{5} - 2 \leq x \leq -\sqrt{3} - 2$
ou $\sqrt{3} - 2 \leq x \leq \sqrt{5} - 2$
f) $-1 \leq x \leq 1$
g) $x = 0$ ou $2 \leq x \leq 8$
h) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$
i) $x \leq -\frac{1}{4}$ ou $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
j) $0 \leq x \leq 2$

20. $x \leq 42$ ou $x \geq 92$, em que x corresponde ao quilômetro da estrada.

3 Funções

Antes de ler o capítulo
Você conseguirá acompanhar melhor os conceitos aqui apresentados se já tiver lido o Capítulo 2, particularmente as Seções 2.1, 2.4, 2.5, 2.7, 2.8 e 2.14.

O progresso da civilização está baseado na observação de que alguns fenômenos estão relacionados. A agricultura, criada no início do período neolítico, só se desenvolveu – permitindo o armazenamento de alimentos e a consequente sedentarização da população – porque os nossos antepassados perceberam que o regime de chuvas e a temperatura ambiente variavam de acordo com a época do ano (ainda que o calendário só tenha sido inventado muito tempo depois, no século XXI a.C.).

Nesse capítulo, exploraremos as várias formas de expressar a interdependência de dois fenômenos: tabelas, equações, gráficos etc. Entretanto, restringiremos nossa análise àqueles casos em que, conhecida uma grandeza, somos capazes de expressar uma outra grandeza de forma única. Quando isso ocorre, dizemos que as grandezas estão relacionadas por meio de uma **função**.

Para começar, vamos estudar como a geometria auxilia a álgebra, permitindo a visualização da relação entre duas medidas.

3.1 Coordenadas no plano

Embora a dependência mútua de fenômenos já fosse conhecida no período neolítico, a forma de representá-la variou muito com o tempo. De fato, foi preciso esperar muitos milênios até que dois franceses do século XVII d.C., o filósofo René Descartes e o advogado Pierre de Fermat, apresentassem uma forma sistemática de representação geométrica da relação entre grandezas. Apesar de terem sido precedidos por outros matemáticos, como o padre Nicole Oresme, coube a Descartes e Fermat estabelecer a ligação definitiva entre geometria e álgebra, o que permitiu grandes avanços em ambas as áreas da matemática. Para compreender essa ligação, vamos analisar um problema prático de topografia.

Exemplo 1. Elaboração de um corte topográfico

Gervásio foi incumbido de fazer um levantamento da altura de um terreno montanhoso próximo à cidade de Ouro Preto, em Minas Gerais. Para realizar a tarefa, o topógrafo partiu do ponto vermelho mostrado na Figura 3.1, e percorreu 400 m no sentido oeste (W), além de outros 500 m no sentido leste (E). Em cada ponto indicado em amarelo no mapa, Gervásio mediu a altura relativa do terreno, tomando como referência o ponto vermelho.

Tabela 3.1: Altura relativa dos pontos do mapa.

Dir.	Dist. (m)	Alt. (m)
W	400	-2
	350	-23
	300	-40
	250	-53
	200	-54
	150	-50
	100	-36
	50	-18
	0	0
E	50	+17
	100	+32
	150	+43
	200	+49
	250	+50
	300	+42
	350	+30
	400	+19
	450	+9
	500	-1

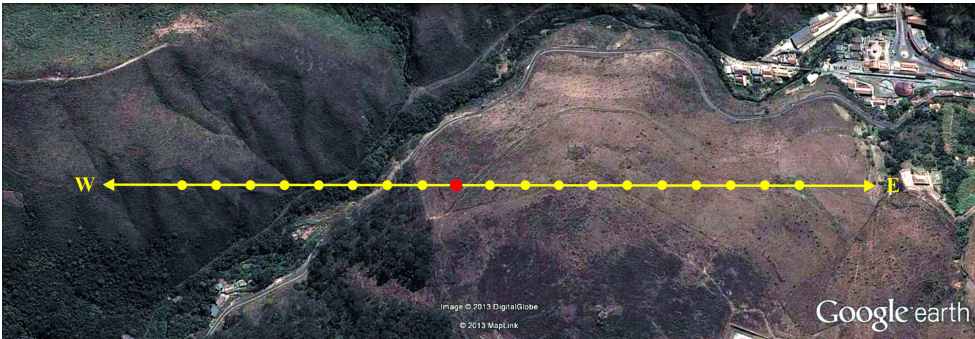



Figura 3.1: Fotografia aérea da região levantada por Gervásio (fonte: Google Earth, Digital Globe). As letras W (oeste) e E (leste) indicam as direções tomadas em relação ao ponto de partida, mostrado em vermelho.

Como resultado de seu trabalho, Gervásio elaborou a Tabela 3.1, na qual a primeira coluna indica a direção percorrida, a segunda contém as distâncias horizontais (em metros) entre o ponto vermelho e os pontos nos quais foram feitas as medições, e a terceira fornece as alturas relativas desses pontos. Uma altura negativa indica que o terreno é mais baixo que o ponto de referência, para o qual foi registrada uma altura de 0 m. Por conveniência, os pontos da tabela foram ordenados, de modo que o primeiro é o que está mais a oeste, e o último é aquele mais a leste.

Gervásio concluiu que os dados que coletou seriam melhor apresentados se ele elaborasse uma figura mostrando como a altura do terreno varia ao longo da linha amarela do mapa. Assim, o topógrafo traçou, em uma folha de papel, dois eixos reais, um dos quais horizontal, e o outro vertical, como mostrado na Figura 3.2.

Observe que o intervalo entre dois traços do eixo horizontal da Figura 3.2 é constante e equivale a 50 m na vida real. Por sua vez, a distância entre dois traços na vertical também é fixa, e corresponde a 10 m. Para traçar um corte topográfico, não é imprescindível apresentar os dois eixos na mesma **escala**.

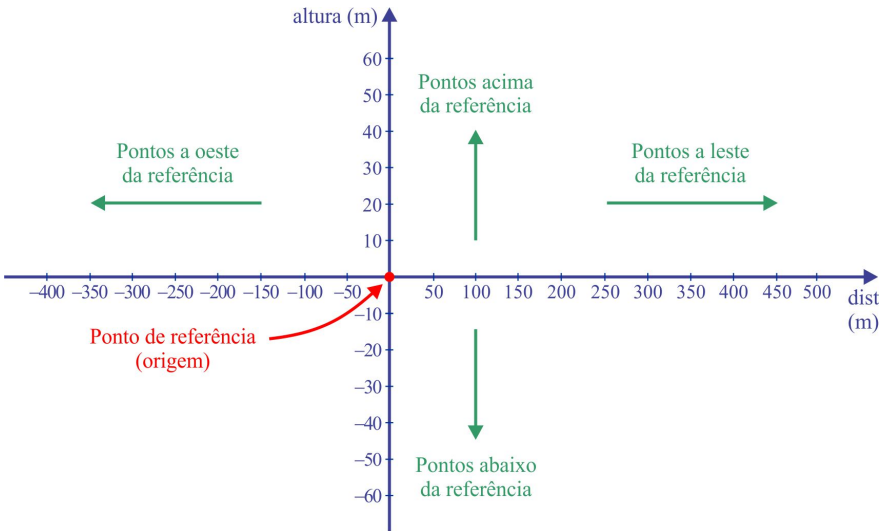



Figura 3.2: O sistema de eixos adotado por Gervásio.

Na interseção dos eixos, Gervásio colocou o ponto de referência de suas medições, ao qual ele deu o nome de **origem**. O eixo horizontal, à semelhança da reta real que vimos nos capítulos anteriores, foi usado pelo topógrafo para indicar a posição horizontal dos pontos nos quais foram feitas as medições, com relação ao ponto de referência. Nesse eixo, Gervásio fez pequenos traços em intervalos regulares, para indicar distâncias múltiplas de 50 m. A parte do eixo à esquerda da origem – aquela com valores negativos – foi reservada para os pontos a oeste do ponto de referência. O propósito do eixo vertical é fornecer a altura de cada ponto da superfície do terreno, em relação à origem.

Depois de traçados os eixos, Gervásio passou a representar os pontos da Tabela 3.1. Três desses pontos são apresentados na Figura 3.3.

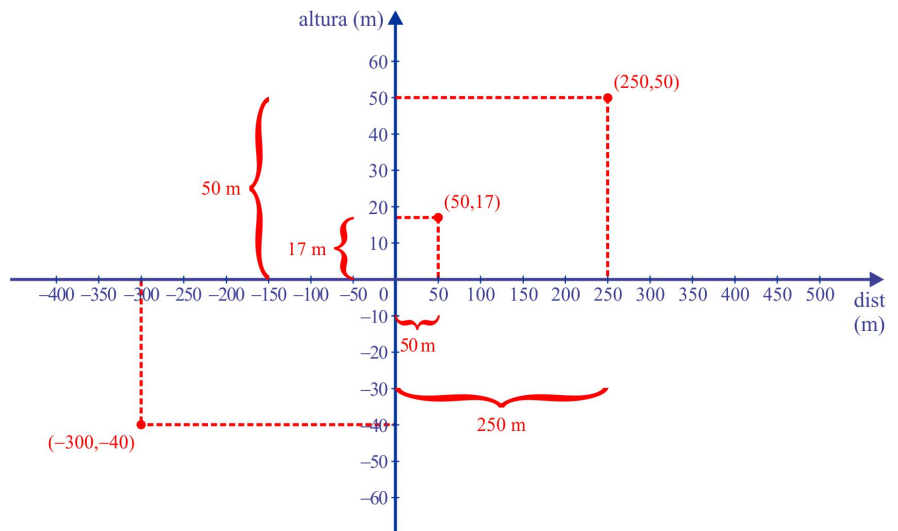



Figura 3.3: Três dos pontos marcados por Gervásio.

O primeiro ponto escolhido por Gervásio foi aquele que está a 50 m a leste do ponto de referência e a 17 m de altura. Para indicá-lo, Gervásio partiu da origem e moveu sua caneta para direita sobre o eixo horizontal, até atingir a marca de 50 m. Em seguida, ele moveu a caneta na vertical até alcançar uma altura correspondente a 17 m. No local assim obtido, Gervásio fez uma pequena marca vermelha, como a que é mostrada na Figura 3.3.

O mesmo processo foi adotado para o quinto ponto a leste do ponto de partida, o qual, na Figura 3.3, aparece acompanhado do par de valores (250, 50). De acordo com a notação adotada, o primeiro número dentro dos parênteses indica a posição horizontal do ponto com relação à origem, enquanto o segundo valor fornece a altura.

Para representar o ponto que está 300 m a oeste e 40 m abaixo do ponto de referência, Gervásio moveu sua caneta sobre o eixo horizontal até a marca de −350, descendo, em seguida, a distância correspondente a 40 m. Assim, ele fez uma marca na posição indicada pelo par $(-300, -40)$. Repetindo o procedimento para os demais pontos, Gervásio obteve a Figura 3.4.

Atenção

A ordem dos termos dentro dos parênteses é importante. O par (250,50) indica o ponto que está a 250 m a leste da origem e a 50 m de altura, enquanto o ponto representado por $(50, 250)$ está 50 m a leste e 250 m acima da origem.

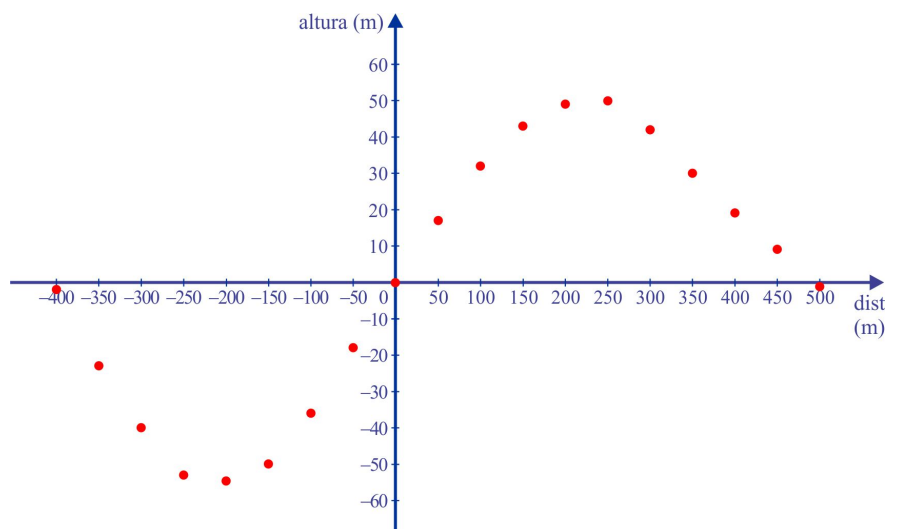



Figura 3.4: Todos os pontos visitados por Gervásio.

$$(x_1,y_1) = (-400,-2),$$
$$(x_2,y_2) = (-350,-23),$$
$$(x_3,y_3) = (-300,-40),$$
$$(x_4,y_4) = (-250,-53),$$
$$(x_5,y_5) = (-200,-54),$$
$$(x_6,y_6) = (-150,-50),$$
$$(x_7,y_7) = (-100,-36),$$
$$(x_8,y_8) = (-50,-18),$$
$$(x_9,y_9) = (0,0),$$
$$(x_{10},y_{10}) = (50,17),$$
$$(x_{11},y_{11}) = (100,32),$$
$$(x_{12},y_{12}) = (150,43),$$
$$(x_{13},y_{13}) = (200,49),$$
$$(x_{14},y_{14}) = (250,50),$$
$$(x_{15},y_{15}) = (300,42),$$
$$(x_{16},y_{16}) = (350,30),$$
$$(x_{17},y_{17}) = (400,19),$$
$$(x_{18},y_{18}) = (450,9),$$
$$(x_{19},y_{19}) = (500,-1).$$

Finalmente, ciente de que a superfície do terreno não continha buracos ou precipícios, Gervásio a representou traçando uma linha que passava pelos pontos obtidos. O resultado pode ser conferido na Figura 3.5.

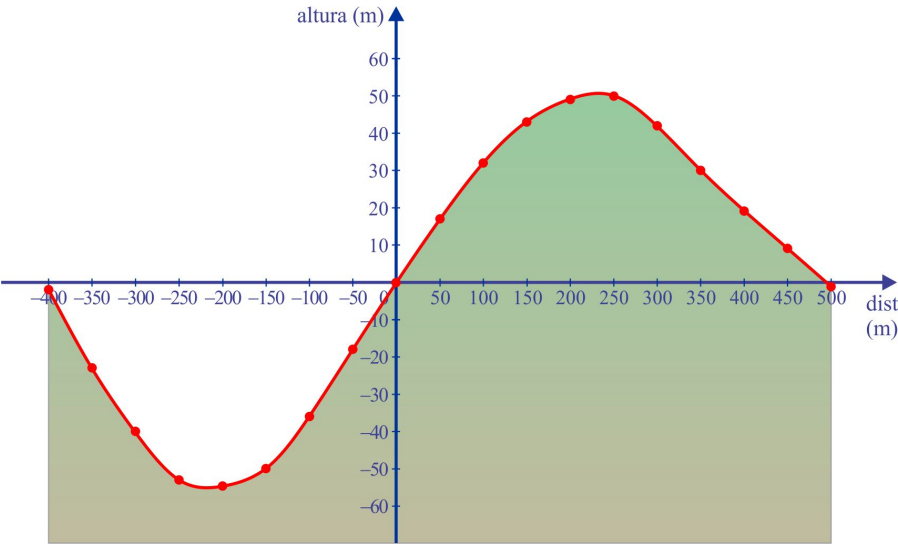



Figura 3.5: Corte do terreno, segundo os dados coletados por Gervásio.

Tomando como exemplo o problema de Gervásio, notamos que, para obter a Figura 3.5, ele associou duas grandezas: a posição horizontal e a altura de cada ponto, com relação a um ponto de referência. Na Figura 3.3, essas grandezas foram apresentadas por meio de pares na forma

$$(x, y).$$

A lista completa dos 19 pares que Gervásio extraiu da Tabela 3.1 é dada na margem da página. Observe que o primeiro valor de cada par representa a posição horizontal (x), e o segundo fornece a altura (y), não sendo possível trocá-los. Nesse caso, dizemos que os pares são **ordenados**.

Um par (x,y) é dito **par ordenado** se seus elementos têm uma ordem fixa.

Figura 3.6: Coordenadas de um ponto.

Para representar pares ordenados (x,y) em uma folha de papel ou na tela do computador, por exemplo, definimos dois eixos reais:

- Um **eixo horizontal**, no qual os números crescem da esquerda para a direita, é usado para indicar o valor de x. Esse valor também é chamado **abscissa**, ou simplesmente **coordenada x**.
- Um **eixo vertical**, com valores que aumentam de baixo para cima, é usado para representar a **coordenada y**, também conhecida como **ordenada**.

Doravante, denominaremos **eixo-x** e **eixo-y** os eixos horizontal e vertical, respectivamente. Os eixos se interceptam no ponto (0,0), que é denominado **origem**, e é costumeiramente indicado pela letra **O**.

O par ordenado (a,b) é representado pelo ponto de interseção entre a reta vertical que passa pelo valor a no eixo-x e a reta horizontal que passa pelo valor b no eixo-y, como mostra a Figura 3.6.

Uma vez que a coordenada x pode assumir qualquer valor real, o mesmo acontecendo com a coordenada y, podemos definir um número infinito de pares ordenados (x,y). A região formada por todos esses pares é chamada **plano coordenado**, ou **plano Cartesiano**.

Você sabia?
O filósofo e matemático René Descartes (1596–1650) também era conhecido por Renatus Cartesius, a versão latina de seu nome. Deriva daí o termo **Cartesiano**, que significa "referente a Descartes".

Os eixos coordenados dividem o plano Cartesiano em quatro partes, chamadas **quadrantes**. A Figura 3.7a mostra a numeração usada para identificar esses quadrantes. Observe que o primeiro quadrante é aquele no qual os pontos têm coordenadas x e y positivas.

Para indicarmos um ponto P do plano, usamos a notação $P(x,y)$. Assim, por exemplo, o ponto $A(2{,}3)$ tem abscissa 2 e ordenada 3. Esse ponto é mostrado na Figura 3.7b, que também contém os pontos $B(1{,}5;-3)$ e $C(-3{,}1)$.

Ainda na Figura 3.7b, percebemos a presença dos pontos D, E, F e G. Com o auxílio das retas horizontais e verticais apresentadas em tom azul claro (que foram traçadas apenas para facilitar a leitura das abscissas e ordenadas), percebemos que as coordenadas desses pontos são

Para evitar dubiedade, usamos o ponto e vírgula para separar as coordenadas x e y quando uma delas possui uma vírgula decimal.

$$D(0{,}5;2), \qquad E(-2,-4), \qquad F((0,-2), \qquad \text{e} \qquad G(1{,}0).$$

Os pontos sobre os eixos não fazem parte de nenhum quadrante.

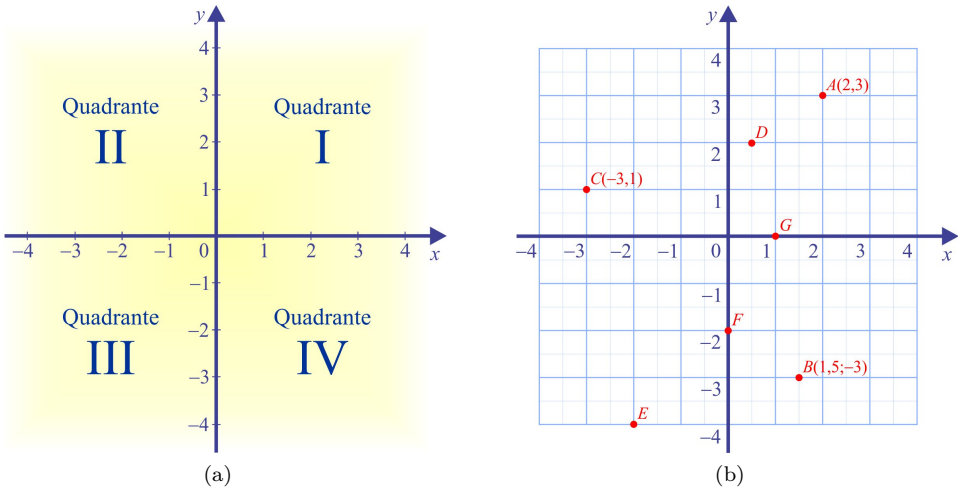



Figura 3.7: À esquerda, os quadrantes nos quais o plano Cartesiano é dividido. À direita, alguns pontos desse plano.

Esse método geométrico, baseado em pontos do plano Cartesiano, pode ser usado para representar a relação entre duas grandezas quaisquer, mesmo que não estejam associadas a medidas de comprimento. Vejamos um exemplo que vincula a altura dos bebês à sua idade.

Exemplo 2. Altura de bebês

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), a altura média dos bebês do sexo feminino está relacionada à idade, conforme indicado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Altura de bebês do sexo feminino de acordo com a idade.

Idade (meses)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Altura (cm)	49	60	66	70	74	78	81	84	86

Nesse exemplo, trocamos x por t e y por A, para que as letras se assemelhassem às grandezas representadas.

A partir da tabela, definimos pares ordenados (t,A), em que t indica o tempo (em meses) transcorrido desde o nascimento, e A corresponde à altura média (em centímetros). Os pares obtidos são dados a seguir.

$$(0,49),\ (3,60),\ (6,66),\ (9,70),\ (12,74),\ (15,78),\ (18,81),\ (21,84),\ \text{e}\ (24,86).$$

Como os todos os valores de t e A são positivos, podemos trabalhar apenas no primeiro quadrante. Marcando, então, os pares ordenados no plano Cartesiano, obtemos a Figura 3.8.

Como no caso do mapa topográfico de Gervásio, podemos supor que a altura das meninas varia contínua e suavemente do nascimento aos 24 meses. Assim, deveríamos traçar uma linha ligando os pontos da figura, para que fosse possível determinar aproximadamente a altura de meninas com idades diferentes daquelas apresentadas na Tabela 3.2. Voltaremos a esse assunto na Seção 4.1, que trata de funções quadráticas.

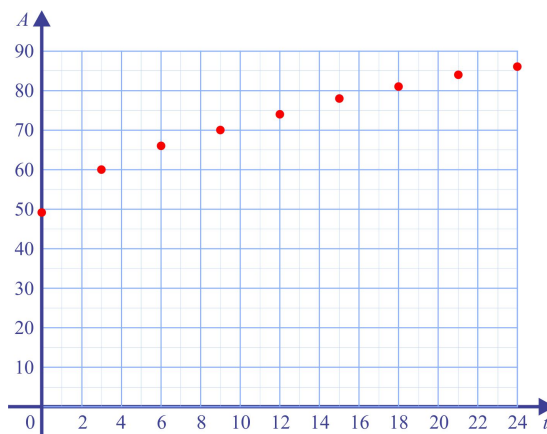



Figura 3.8: Altura média de meninas entre 0 e 24 meses.

Agora, tente o Exercício 1.

Como se vê, traçar pontos no plano Cartesiano é tarefa fácil. Entretanto, alguns cuidados devem ser tomados para que esse pontos representem fielmente a relação entre as grandezas. Alguns erros cometidos com frequência incluem

a) **O traçado de eixos com espaçamento não uniforme**, como mostra a Figura 3.9a, na qual a distância entre as marcas 1 e 2 do eixo vertical não é a mesma observada entre as marcas 2 e 3 do mesmo eixo. Erro equivalente se observa no eixo-x dessa figura, no qual a distância entre os pontos 1 e 2 é a mesma existente entre os pontos 2 e 4, bem como entre 4 e 7. Nesse último caso, apesar de as marcas do eixo estarem igualmente espaçadas, o a diferença entre dois valores sucessivos não é constante.

b) **O traçado de eixos inclinados**, como ilustra a Figura 3.9b, cujo eixo-y não é perfeitamente vertical.

c) **A falta de cuidado no traçado das coordenadas**, como ocorre na Figura 3.9c, em que os segmentos de reta usados para marcar os pontos não são verticais ou horizontais.

(a) Espaçamento não uniforme (b) Eixo não vertical (c) Coordenadas desalinhadas

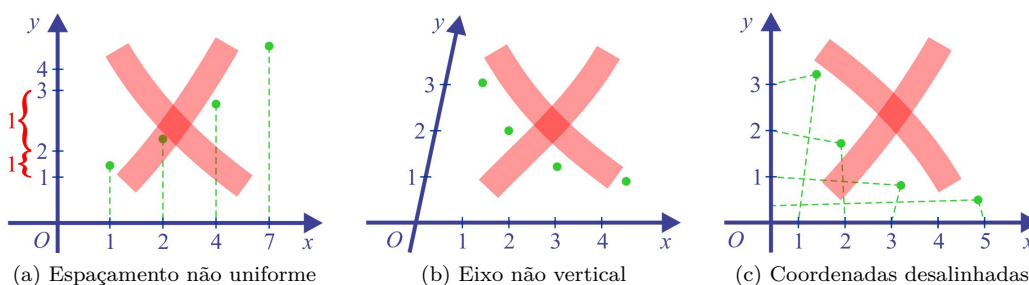



Figura 3.9: Erros que devem ser evitados na elaboração um gráfico.

■ Regiões do plano Cartesiano

O plano Cartesiano não é usado apenas para representar pontos ou curvas, mas também regiões. Nessa subseção, exploraremos o tipo mais simples de região, que é obtido

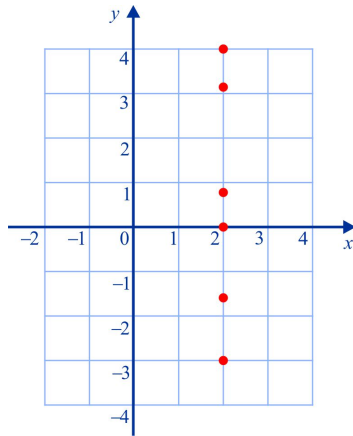



Figura 3.10: Pontos com abscissa igual a 2.

restringindo os valores de x e y. Para começar, vamos fazer uma pequena lista de pares ordenados que têm coordenada x igual a 2:

$$(2,-3),\ (2;-1{,}6),\ (2;0),\ (2;0{,}75),\ (2,\pi)\ \text{e}\ (2,4).$$

Marcando esses pontos no plano Cartesiano, obtemos a Figura 3.10, na qual fica claro que todos pertencem à reta vertical que cruza o eixo-x no ponto $(2,0)$. De fato, essa reta é definida por

$$\{(x,y) \mid x = 2\},$$

e é mostrada em verde na Figura 3.11a. Generalizando a ideia, dizemos que a reta vertical que passa por um ponto (a,b) é dada pelo conjunto

$$\{(x,y) \mid x = a\},$$

A definição de retas horizontais no plano segue o mesmo raciocínio, requerendo, entretanto, a fixação da coordenada y. Assim, a reta verde da Figura 3.11b, na qual todos os pontos têm ordenada -3, é descrita pelo conjunto

$$\{(x,y) \mid y = -3\}.$$

Você sabia?

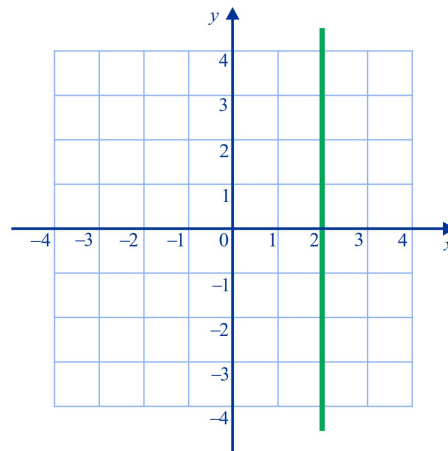
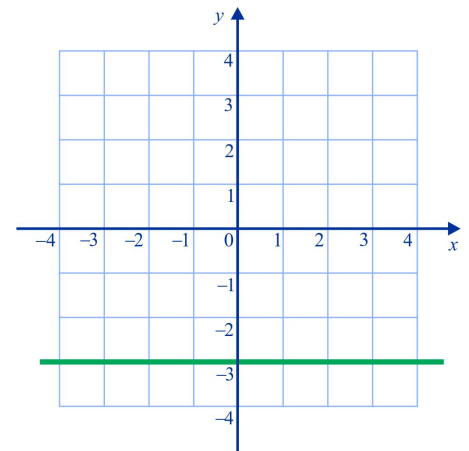
Os eixos do plano Cartesiano também podem ser expressos por meio de conjuntos. O eixo-x é descrito por $\{(x,y) \mid y = 0\}$, enquanto o eixo-y é dado por $\{(x,y) \mid x = 0\}$. Note que um eixo é definido fixando-se a variável associada ao outro eixo.

(a) Reta vertical definida por $x = 2$.

(b) Reta horizontal dada por $y = -3$.

Figura 3.11: Retas verticais e horizontais no plano Cartesiano.

Conjuntos de pares ordenados em que alguma coordenada (x ou y) está restrita a um intervalo também podem ser facilmente representados no plano Cartesiano. Por exemplo, o conjunto de pares ordenados nos quais x é estritamente menor que 1, que definimos por

$$\{(x,y) \mid x < 1\},$$

é dado pela região rosa da Figura 3.12a. Observe que, nessa figura, a reta vertical definida por $x = 1$ aparece tracejada, para indicar que seus pontos não pertencem à região considerada.

Por sua vez, o conjunto de pares ordenados em que $y \in [-1{,}3]$, ou seja,

$$\{(x,y) \mid -1 \le y \le 3\},$$

corresponde à faixa rosa da Figura 3.12b. Nesse caso, as retas definidas por $y = -1$ e $y = 3$ são contínuas, significando que seus pontos pertencem ao conjunto.

Também podemos usar o plano Cartesiano para representar conjuntos nos quais tanto x como y possui algum tipo de restrição, como mostra o exemplo a seguir.

(a) Região descrita por $x < 1$.

(b) Região dada por $-1 \leq y \leq 3$.

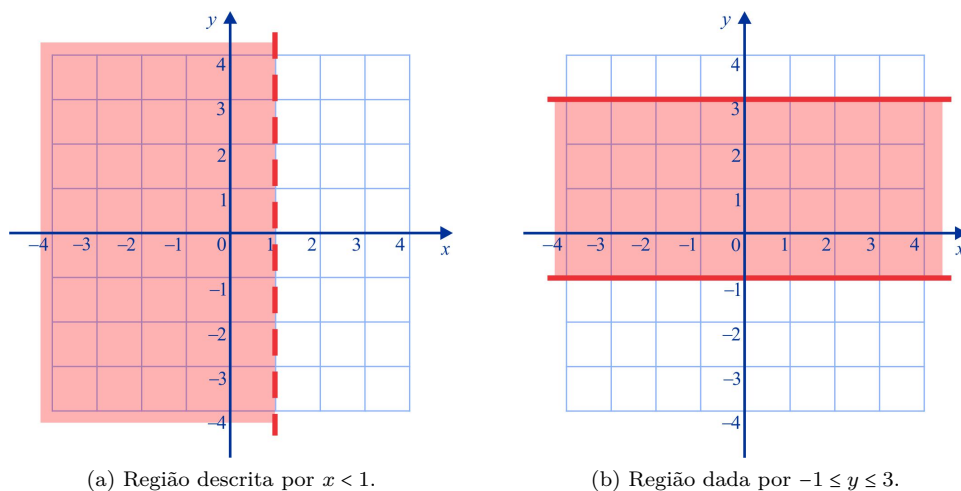



Figura 3.12: Regiões do plano Cartesiano.

Exemplo 3. Restringindo x e y

Os pares ordenados nos quais x tem limite inferior igual a -2 e y tem limite superior 1 são expressos pelo conjunto

$$\{(x,y) \mid x \geq -2 \text{ e } y \leq 1\}.$$

Representando os pontos desse conjunto no plano Cartesiano, obtemos a região rosa mostrada na Figura 3.13a. Já a região destacada na Figura 3.13b corresponde ao conjunto

$$\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 4 \text{ e } -2 \leq y \leq 3\}.$$

(a) $\{(x,y) \mid x \geq -2 \text{ e } y \leq 1\}$.

(b) $\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 4 \text{ e } -2 \leq y \leq 3\}$.

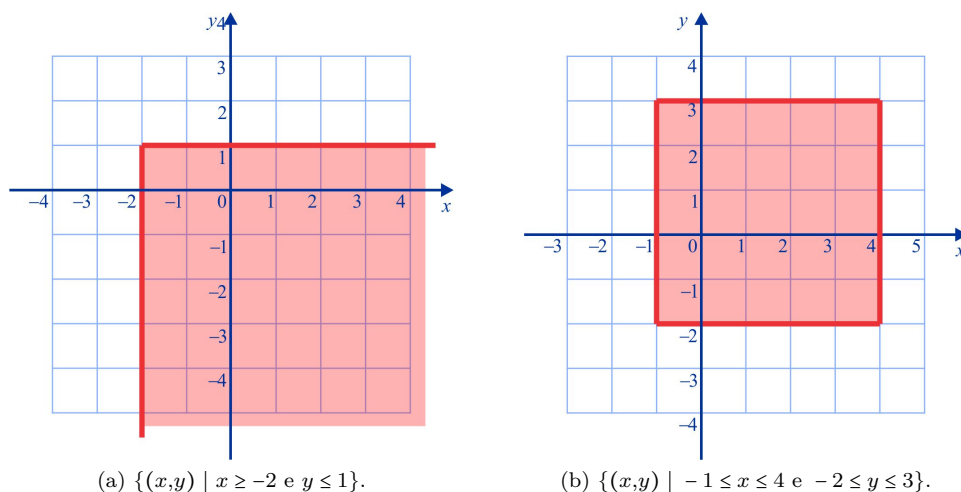



Figura 3.13: Regiões do Exemplo 3.

Agora, tente os Exercícios 8 e 9.

Exercícios 3.1

1. Um fabricante de automóveis realizou um teste de frenagem de seu novo modelo, obtendo a tabela abaixo, que relaciona a velocidade no instante de início da frenagem à distância que o carro percorre até parar completamente. Represente os dados da tabela como pontos do plano Cartesiano, usando o eixo-x para indicar a velocidade (em km/h) e o eixo-y para fornecer a distância percorrida (em metros).

Vel. (km/h)	20	40	60	80	100	120
Dist. (m)	9,5	11,0	15,0	25,0	39,5	57,5

2. A tabela abaixo, obtida a partir de dados do IBGE, mostra a evolução da taxa de incidência de dengue no Brasil, no período entre 2000 e 2008. A taxa de incidência é definida como o número de casos por 100.000 habitantes. Mostre os dados da tabela no plano Cartesiano, apresentando no eixo-x o tempo transcorrido desde o ano 2000, e no eixo-y a taxa de incidência de dengue.

Ano	2000	2001	2002	2003	2004
Taxa	64	226	402	157	40
Ano	2005	2006	2007	2008	
Taxa	82	143	265	293	

3. A tabela a seguir fornece a duração do dia (em oposição à noite) nas cidades de Reykjavik, capital da Islândia, e em Belém, capital do estado do Pará. Os dados são fornecidos em horas e se referem ao primeiro dia de cada mês de 2015.

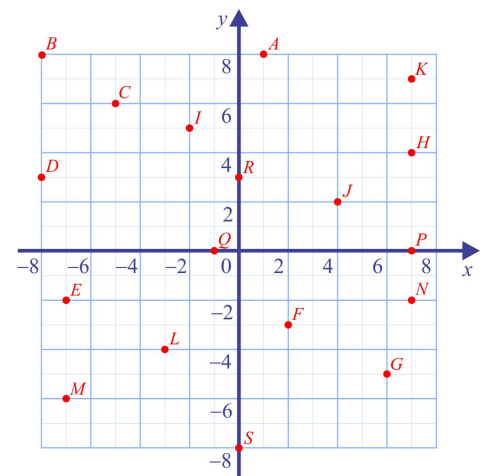
Mês	jan	fev	mar	abr	mai	jun
Reykjavic	4,4	7,1	10,1	13,5	16,8	20,1
Belém	12,2	12,2	12,1	12,1	12,1	12,1
Mês	jul	ago	set	out	nov	dez
Reykjavic	20,9	18,0	14,6	11,4	8,0	5,1
Belém	12,0	12,1	12,1	12,1	12,2	12,2

Marque os dados da tabela no plano Cartesiano, considerando que o eixo-x indica o mês e o eixo-y a duração do dia, em horas.

4. A tabela abaixo contém as notas na prova de matemática do ENEM e na disciplina MA091 (Matemática Básica) obtidas por um grupo de oito alunos.

ENEM	477	534	545	592
MA091	3,3	3,1	4,6	5,0
ENEM	634	665	674	788
MA091	5,4	6,0	7,5	9,5

Marque os dados da tabela no plano Cartesiano, usando o eixo-x para indicar a nota no ENEM e o eixo-y para indicar a nota em MA091. Considerando apenas esses dados, você percebe alguma relação entre as notas das duas provas?

5. Escreva os pares ordenados correspondentes aos pontos da figura abaixo.

6. Represente, no plano Cartesiano, os pontos $(0,4)$, $(1,0)$, $(1,3)$, $(5,1)$, $(-2,0)$, $(0,-3)$, $(3,-4)$, $(4,-2)$, $(-6,2)$, $(-3,-5)$ e $(-4,-1)$.

7. Se o ponto $P(x,y)$ está no segundo quadrante, quais são os sinais de x e y?

8. Exiba no plano Cartesiano as regiões definidas pelos conjuntos abaixo.

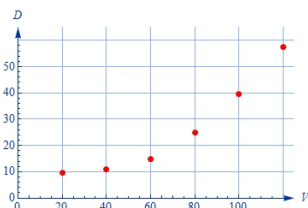
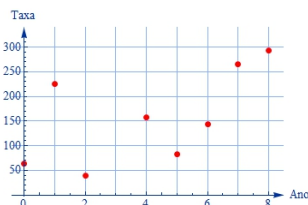
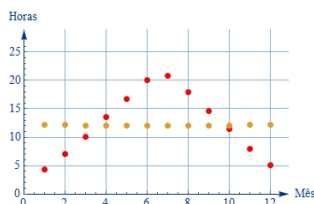
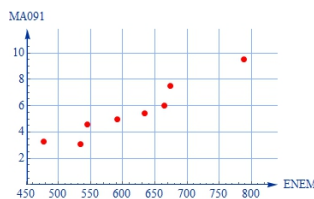
a) $\{(x,y) \mid x > -1/2\}$
b) $\{(x,y) \mid -3 \le y \le 0\}$
c) $\{(x,y) \mid y \ge 1{,}5\}$
d) $\{(x,y) \mid x = 3\}$
e) $\{(x,y) \mid -2 \le x \le 5\}$
f) $\{(x,y) \mid x \le -1\}$
g) $\{(x,y) \mid y < 3/2\}$
h) $\{(x,y) \mid y = -2\}$

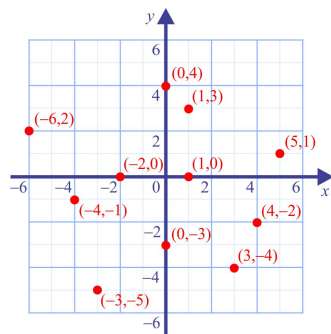
9. Exiba no plano Cartesiano as regiões definidas abaixo.

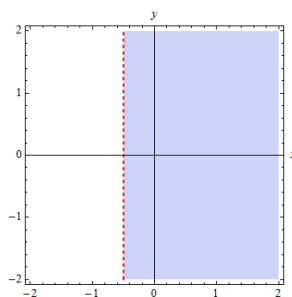
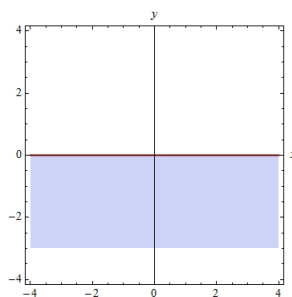
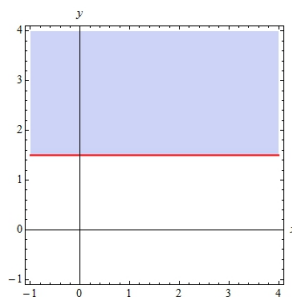
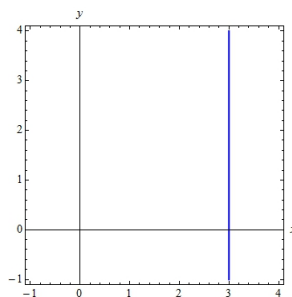
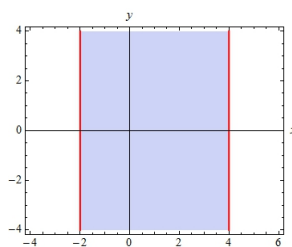
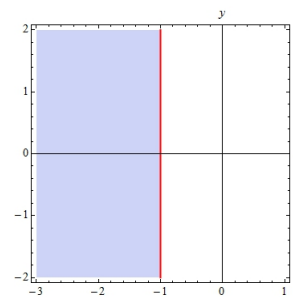
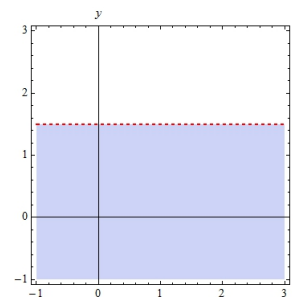
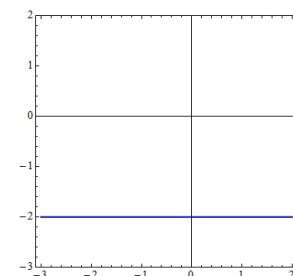
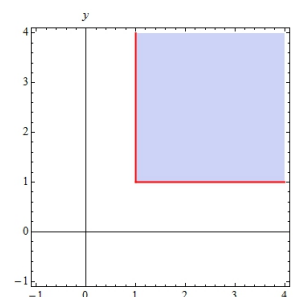
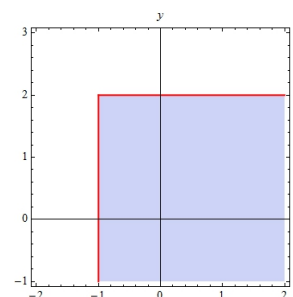
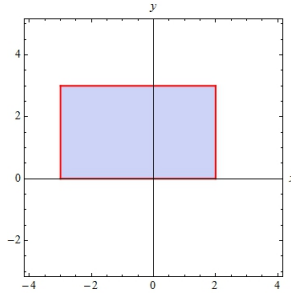
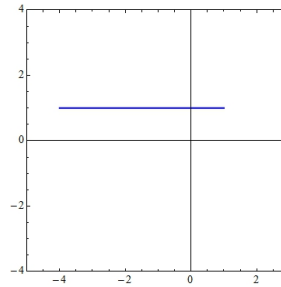
a) $x \ge 1$ e $y \ge 1$
b) $x \ge -1$ e $y \le 2$
c) $-3 \le x \le 2$ e $0 \le y \le 3$
d) $-4 \le x \le 1$ e $y = 1$

10. Expresse o conjunto de pontos do primeiro quadrante usando desigualdades.

Respostas dos Exercícios 3.1

1.

2.

3.

4.

5. $A(1{,}8)$; $B(-8{,}8)$; $C(-5{,}6)$; $D(-8{,}3)$; $E(-7,-2)$; $F(2,-3)$; $G(6,-5)$; $H(7{,}4)$; $I(-2{,}5)$; $J(4{,}2)$; $K(7{,}7)$; $L(-3,-4)$; $M(-7,-6)$; $N(7,-2)$; $P(7{,}0)$; $Q(0,-8)$; $R(0{,}3)$; $S(-4{,}0)$.

6.

7. x é negativo e y é positivo

8. a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

9. a)

b)

c)

d)

10. $\{(x,y) \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$

3.2 Equações no plano

No Capítulo 2, trabalhamos com equações que envolviam apenas uma variável. Nosso objetivo, então, era a determinação de uma incógnita que satisfizesse as condições impostas pelo problema. Nesse novo capítulo, daremos um enfoque totalmente diferente às equações. Agora, o nosso objetivo será a identificação da relação entre as variáveis, e não a determinação de uma solução.

Exemplo 1. Ampliação da rede de água

O prefeito da cidade de Jurerê tomou a saudável decisão de expandir a rede de distribuição do município, para que toda a população fosse servida por água potável.

Naturalmente, se o projeto da prefeitura levar em conta apenas a população atual do município, é provável que, ao longo das obras, o número de habitantes cresça, e que parte das pessoas permaneça sem acesso à rede de água quando a expansão da rede estiver pronta. Ciente disso, a companhia municipal de saneamento decidiu usar um modelo matemático baseado no censo demográfico do IBGE para prever o crescimento da população, de modo a garantir que, em 2020, todos os munícipes tenham água encanada.

A forma mais simples de expressar a relação entre duas grandezas consiste na definição de uma equação em duas variáveis. Esse tipo de equação foi introduzido na Seção 2.5, ainda que restrito ao caso linear e em um formato adequado à representação de sistemas. Trataremos, agora, de equações gerais, apresentando-as de forma a preparar o leitor para a definição de função.

A estratégia usada pela companhia de saneamento para encontrar a equação que relaciona P a t será discutida na Seção 3.4.

Para estimar a população futura de Jurerê, a companhia de saneamento fez uma análise matemática dos dados do IBGE, e obteve a seguinte equação, que associa o número de habitantes – ao qual atribuímos a variável P – ao tempo, em anos, transcorrido desde 2000 – que é dado pela variável t.

$$P = 12.000 + 360t.$$

Observe que uma das variáveis (P) aparece isolada no lado esquerdo da equação. Embora essa seja uma maneira cômoda de representar a ligação entre t e P, ela não é a única. De fato, a mesma relação poderia ter sido apresentada na forma

$$100 + 3t - \frac{P}{120} = 0.$$

Observe a transformação:

$$P = 12.000 + 360t$$
$$0 = 12.000 + 360t - P$$
$$0 = \frac{12.000}{120} + \frac{360t}{120} - \frac{P}{120}$$
$$0 = 100 + 3t - \frac{P}{120}$$

A vantagem de se manter P isolada é que isso nos permite determinar facilmente essa variável para diversos valores de t. Para descobrir, por exemplo, a população em 2008, definimos $t = 8$ (já que estamos contando os anos transcorridos desde de 2000) e calculamos

$$P = 12.000 + 360 \cdot 8 \qquad \Rightarrow \qquad P = 14.880.$$

Logo, em 2008, o município tinha 14.880 habitantes. Usando essa estratégia, calculamos a população em vários anos, e reunimos essas informações na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: População a partir do ano 2000.

t (anos)	0	5	10	15	20
P (hab.)	12.000	13800	15.600	17.400	19.200

A Tabela 3.3 inclui a estimativa da população em anos passados e futuros. Para 2020, em particular, a companhia de saneamento prevê que a população do município atinja 19.200 habitantes.

Observe que o par (6,14000) não é solução da equação $P = 12000 + 360t$, já que $14000 \neq 12000 + 360 \cdot 6$.

Um par ordenado (x,y) **satisfaz** uma equação quando a substituição de x e y na equação a torna verdadeira. Nesse caso, também dizemos que o par é uma **solução** da equação. Dessa forma, o par $(8, 14880)$ é uma solução da equação $P = 12000+360t$, o mesmo ocorrendo com os pares abaixo, extraídos da Tabela 3.3.

$$(0, 12000), \qquad (5, 13800), \qquad (10, 15600), \qquad (15, 17400) \qquad \text{e} \qquad (5, 13800).$$

Naturalmente, esses não são os únicos pares que satisfazem a equação. De fato, para cada valor real que atribuímos a t, é possível encontrar um valor para P de modo que (t,P) seja uma solução da equação. Nesse caso, dizemos que a equação possui infinitas soluções. Ao representarmos essas soluções no plano Cartesiano, obtemos o gráfico da equação.

Gráfico de uma equação

O gráfico de uma equação é o conjunto de todos os pontos do plano Cartesiano cujas coordenadas satisfazem a equação.

Lembrete

Damos o nome de **curva** a uma linha contínua que passa por pontos do plano cartesiano. Observe que, nesse sentido, uma reta é uma curva.

Podemos esboçar o gráfico da equação acima a partir dos pontos da Tabela 3.3. Para tanto, marcamos os pontos da tabela no plano Cartesiano, e traçamos uma curva ligando-os. Como é de praxe em casos assim, a variável que aparece isolada na equação (P) é representada no eixo vertical, e a outra variável (t) é associada ao eixo horizontal. A Figura 3.14 mostra o gráfico assim obtido. Observe que esboçamos apenas uma parte do gráfico, já que seria impossível mostrar os pontos correspondentes a todos os valores possíveis de t.

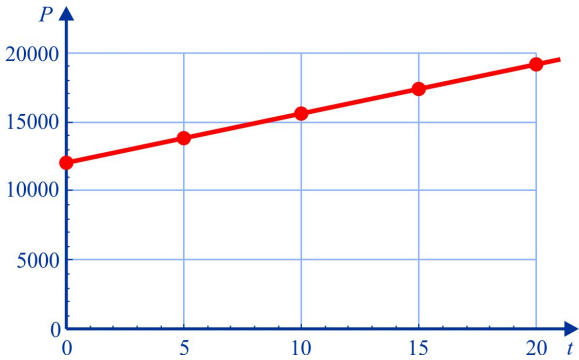



Figura 3.14: População de Jurerê ao longo do tempo.

Em linhas gerais, o traçado de gráficos de equações a partir de pontos pode ser descrito pelo seguinte roteiro.

Roteiro para o traçado de gráficos de equações

1. **Isole uma variável.**
   Se possível, isole em um dos lados da equação a variável associada ao eixo vertical – que nesse quadro representamos por y.

2. **Determine a janela do gráfico.**
   Escolha um intervalo adequado para a variável relacionada ao eixo horizontal – que aqui chamamos de x.

3. **Monte uma tabela de pares ordenados.**
   Escolha valores de x pertencentes ao intervalo definido no passo 2, e determine os valores de y correspondentes.

4. **Marque os pontos no plano.**
   Desenhe os eixos coordenados e marque no plano os pontos (x,y) que você encontrou.

5. **Esboce a curva.**
   Trace uma curva *suave* que passe pelos pontos.

Ao dizermos que uma curva é *suave* não estamos nos referindo ao conceito matemático de *suavidade*, mas apenas indicando que a curva não oscila entre dois pontos e não contém “bicos”, como veremos adiante.

Usemos, agora, esse roteiro para traçar o gráfico de uma equação um pouco mais complicada.

Problema 2. Gráfico de uma equação quadrática

Trace o gráfico da equação $x^2 + y - 3 = 0$.

Solução.

Seguindo o roteiro, isolamos, em primeiro lugar, a variável y na equação:

$$y = 3 - x^2.$$

Em seguida, escolhemos o intervalo $[-3, 3]$ para a variável x, e montamos a Tabela 3.4 com os pares (x,y). Finalmente, marcamos os pontos no plano e traçamos uma curva ligando-os.

Tabela 3.4

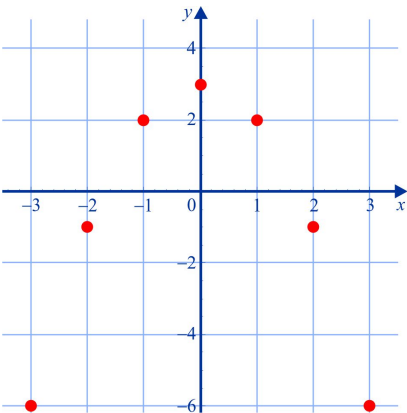
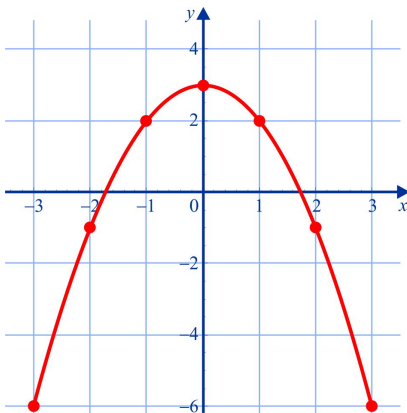
x	y
-3	-6
-2	-1
-1	2
0	3
1	2
2	-1
3	-6

(a) Pontos extraídos da tabela.

(b) Gráfico de $y = 3 - x^2$.

Figura 3.15: Pontos da tabela e gráfico de $y = 3 - x^2$.

Agora, tente os Exercícios 3 e 4.

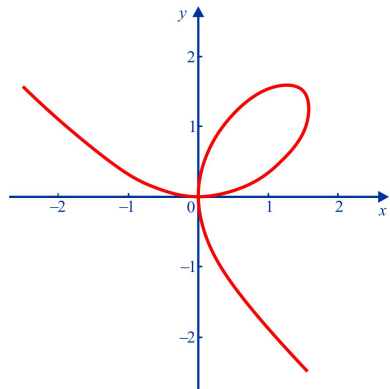



Figura 3.16: Gráfico de $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Os passos reunidos no roteiro acima trazem algumas dificuldades, tais como

1. *Pode não ser possível isolar uma variável.*

   Na equação $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, por exemplo, não há como isolar y (ou mesmo x). Ainda assim, somos capazes de determinar pares (x,y) que satisfazem a equação, e podemos esboçá-la, como comprova a Figura 3.16.

2. *A escolha de um intervalo adequado para x pode ser uma tarefa difícil.*

   A Figura 3.17 mostra quatro esboços do gráfico de $y = x^3 - x^2 - 6x$. O intervalo $[-3,4]$, usado na Figura 3.17a, permite uma boa visualização da curva. Já o intervalo $[-8,0]$ da Figura 3.17b omite uma porção relevante do gráfico. Por sua vez, o intervalo $[-80,80]$, usado na Figura 3.17c é tão grande, que não nos permite perceber o comportamento do gráfico entre -2 e 3. Finalmente, na Figura 3.17d, o intervalo é tão pequeno que o esboço transmite uma ideia errada da equação.

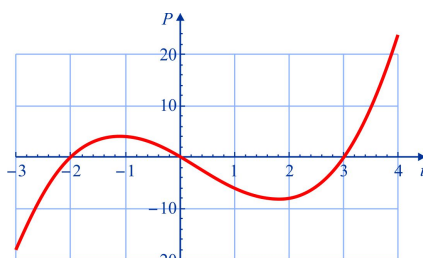
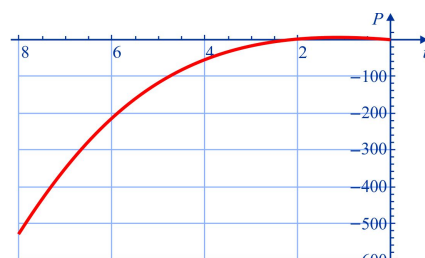
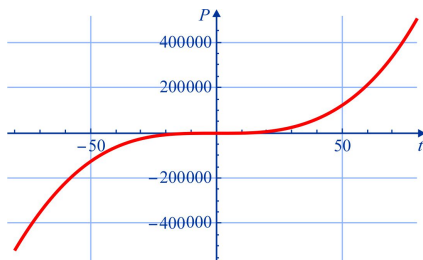
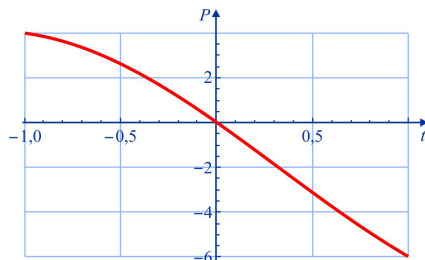



Figura 3.17: Quatro esboços do gráfico da equação $y = x^3 - x^2 - 6x$.

3. *Não sabemos a priori quantos pontos devem ser usados para que o gráfico represente adequadamente a equação.*

   À medida que aumentamos o número de pontos, obtemos uma curva mais fiel à equação. Por outro lado, o tempo gasto para traçar o gráfico também aumenta proporcionalmente ao número de pontos.

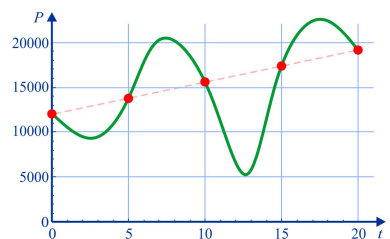



Figura 3.18: Curva esdrúxula que passa pelos pontos vermelhos da Figura 3.14.

Na prática, usamos nossa experiência para escolher o intervalo de x e e para determinar um número adequado de pares ordenados, de modo a obter um equilíbrio entre a qualidade do esboço e o tempo consumido. Em seguida, traçamos o gráfico da equação ligando os pontos por meio da curva mais *suave* possível, como fizemos, por exemplo, na Figura 3.14, que mostra corretamente o gráfico da equação $P = 12000 + 360t$. Por sua vez, apesar de passar pelos mesmos pontos vermelhos da Figura 3.14 (extraídos da Tabela 3.3), a curva verde da Figura 3.18 não representa a equação, já que não possui a *suavidade* necessária.

■ Interceptos

Um ponto no qual o gráfico de uma equação cruza um dos eixos coordenados é particularmente importante para a análise da equação, de modo que suas coordenadas recebem um nome especial.

Interceptos

Intercepto-x é a coordenada x de um ponto no qual o gráfico de uma equação cruza o eixo-x. Para obtê-lo, fazemos $y = 0$ e resolvemos a equação resultante.

Intercepto-y é a coordenada y de um ponto no qual o gráfico de uma equação cruza o eixo-y. Para obtê-lo, fazemos $x = 0$ e resolvemos a equação resultante.

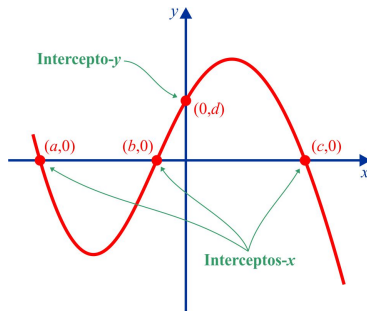



Figura 3.19: Interceptos do gráfico de uma equação.

Na Figura 3.19, as coordenadas a, b e c correspondem a interceptos-x, enquanto a coordenada d fornece um intercepto-y.

Problema 3. Interceptos de uma equação quadrática

Determine os interceptos da equação $y = 3 - x^2$.

Solução.

Essa equação é a mesma do Problema 2, cujo gráfico é mostrado na Figura 3.15. Observando o gráfico, notamos a presença de um único ponto de interseção com o eixo-y, o qual, inclusive, está indicado na Tabela 3.4.

Embora a tabela forneça o intercepto-y, vamos calculá-lo algebricamente, substituindo x por 0 na equação. Nesse caso, temos

$$y = 3 - 0^2 \quad \Rightarrow \quad y = 3.$$

Assim, o intercepto-y é 3.

Como não é possível obter os valores exatos dos dois interceptos-x a partir do gráfico ou da tabela, vamos determiná-los substituindo y por 0 na equação:

$$0 = 3 - x^2.$$

Resolvendo essa equação, encontramos

$$x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Figura 3.20: Interceptos do gráfico de $y = 3 - x^2$.

Logo, os interceptos-x são $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

Os três interceptos do gráfico estão destacados na Figura 3.20.

Agora, tente o Exercício 8.

Exercícios 3.2

1. Uma indústria adquiriu uma máquina por 175 mil reais. Em decorrência da obsolescência e do desgaste por uso, a cada ano, a máquina perde 25 mil reais de valor. Desse modo, podemos dizer que o valor da máquina, v (em R$ 1000), é dado pela equação $v = 175 - 25t$, em que t é o número de anos decorridos desde sua aquisição.

   a) Monte uma tabela com o valor da máquina para $t = 0, 1, 2, \ldots$
   b) Trace um gráfico que relacione o valor da máquina (em milhares de reais) à sua idade (em anos).
   c) A máquina atinge sua *vida útil*, e precisa ser substituída, quando seu valor se reduz a R$ 20.000. De-

termine a vida útil dessa máquina.

2. Verifique, por substituição, se os pares abaixo pertencem ao gráfico da equação correspondente.

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 12$,
Pares: $(4{,}10)$, $(-3, -90)$

b) $y = \sqrt{x^2+1}$,
Pares: $(7{,}5\sqrt{2})$, $(0, -1)$

c) $y = |3x - 8|$,
Pares: $(-\frac{1}{3}{,}7)$, $(\frac{1}{3}{,}7)$

d) $y = \dfrac{1}{|x-2|} - \dfrac{1}{x-2}$,
Pares: $(-\frac{5}{2}{,}0)$, $(-6, -\frac{1}{8})$

e) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{-x^3 + 2x^2 + 4}$,
Pares: $(1{,}\frac{2}{3})$, $(2{,}4)$

f) $y^2 + xy^2 - 9 = x^2 + 3xy - 13$,
Pares: $(-2{,}6)$, $(5, -1)$

3. Usando uma tabela de pares (x,y), trace o gráfico das equações abaixo, no intervalo especificado.

a) $y = -2x + 3$, $x \in [-2{,}3]$
b) $3y - 2x + 3 = 0$, $x \in [-2{,}4]$
c) $2y + x = 4$, $x \in [-2{,}6]$
d) $y = x^2 - 1$, $x \in [-2{,}2]$
e) $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$, $x \in [-3{,}3]$
f) $y = -2x^2 + 4x$, $x \in [-1{,}3]$

4. Usando uma tabela de pares (x,y), trace o gráfico das equações abaixo, no intervalo especificado.

a) $y = x^3 - x$, $x \in [-2{,}2]$
b) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0{,}4]$
c) $y = \sqrt{x+1}$, $x \in [-1{,}3]$
d) $y = 1/x$, $x \in [-4{,}4]$
e) $y = |x|$, $x \in [-2{,}2]$
f) $y = |x - 2|$, $x \in [-1{,}5]$

5. Um jogador de futebol chuta uma bola, que descreve uma trajetória definida pela equação

$$y = -\frac{x^2}{100} + \frac{2x}{5},$$

em que y é a altura (em metros) e x é a distância horizontal (em metros) medida a partir do ponto em que a bola é chutada. Trace o gráfico da trajetória da bola.

6. Determine os interceptos e trace o gráfico das equações abaixo.

a) $y = x - 1$
b) $y = x^2 + 2x - 3$
c) $y = 3 - x/2$
d) $y = -x^2 + 8x - 12$

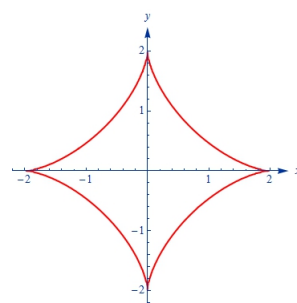
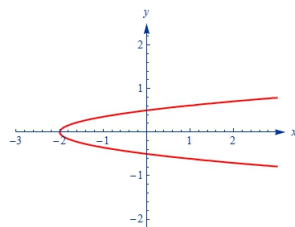
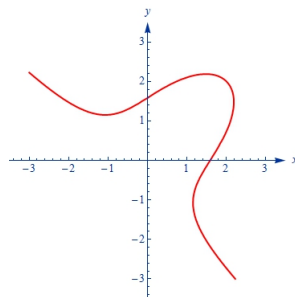
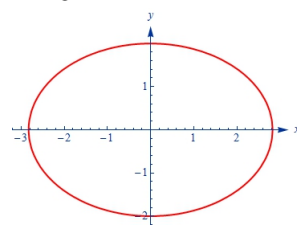
7. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se forem falsas, apresente um contra-exemplo.

a) Toda equação tem um intercepto-x.
b) Toda equação tem um intercepto-y.

8. Determine os interceptos das equações do Exercício 3

9. Determine algebricamente os interceptos das equações abaixo, cujos gráficos também são fornecidos.

a) $8y^2 - x = 2$

c) $(4 - x^2 - y^2)^3 = 100x^2y^2$

b) $x^3 + y^3 - 3xy = 4$

d) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

10. Segundo a *Lei de Boyle*, quando um gás é mantido a uma temperatura constante, sua pressão p está associada a seu volume v pela fórmula

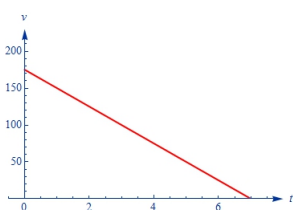
$$p(v) = \frac{k}{v},$$

em que k é uma constante que depende da temperatura e do número de mols do gás. Supondo que se disponha de um gás com $k = 120$ atm·ℓ, trace o gráfico de p (em atm) para v entre 5 e 35 litros.

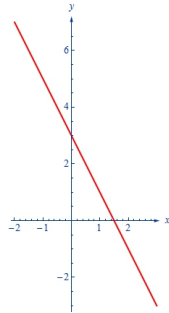
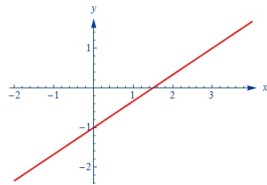
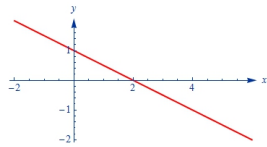
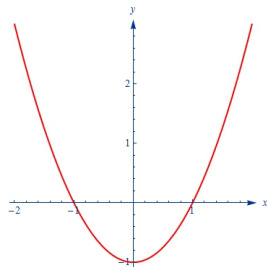
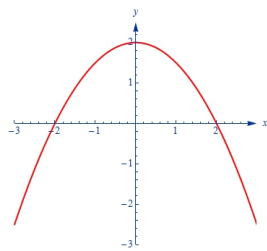
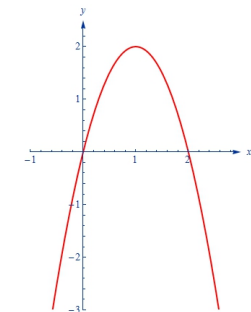
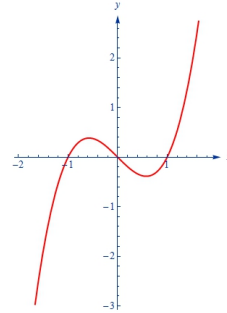
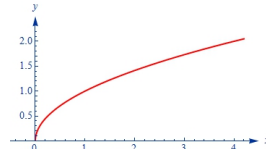
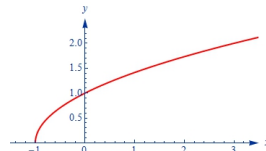
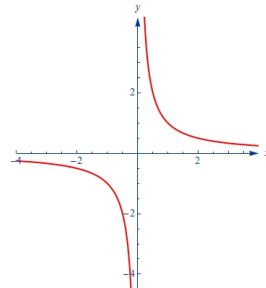
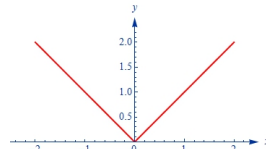
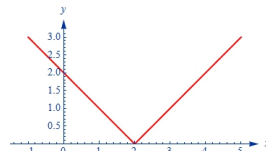
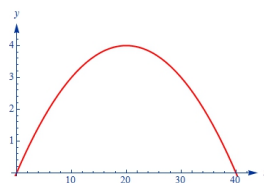
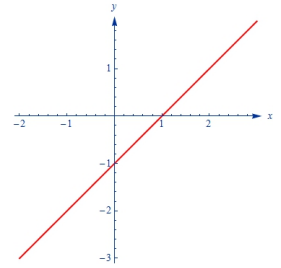
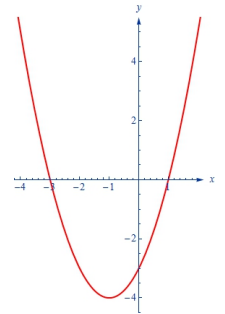
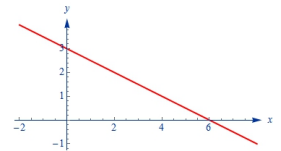
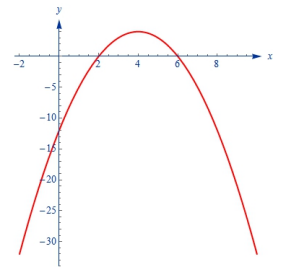
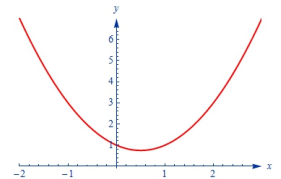
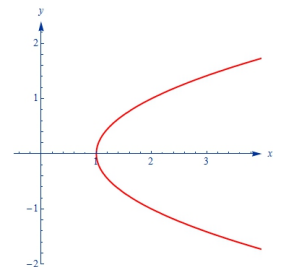
Respostas dos Exercícios 3.2

1. a)

t (anos)	v (R$1000)
0	175
1	150
2	125
3	100
4	75
5	50
6	25
7	0

b)

c) A vida útil corresponde a 6,2 anos.

2. a) F, V b) V, F c) F, V d) V, F e) V, F f) V, V

3. a)

b)

c)

d)

e)

f)

4. a)

b)

c)

d)

e)

f)

5.

6. a)

b)

c)

d)

7. a) Falso. A equação $y = x^2 - x + 1$, cujo gráfico é dado abaixo, não tem intercepto-x.

b) Falso. A equação $x = 1 + y^2$, cujo gráfico é dado abaixo, não tem intercepto-y.

8. a) Intercepto-x: 1,5
Intercepto-y: 3

b) Intercepto-x: 1,5
Intercepto-y: −1

c) Intercepto-x: 2
Intercepto-y: 1

d) Interceptos-x: -1 e 1
Intercepto-y: -1

e) Interceptos-x: -2 e 2
Intercepto-y: 2

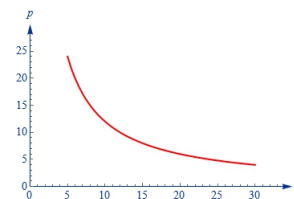
f) Interceptos-x: 0 e 1
Intercepto-y: 0

9. a) Intercepto-x: -2
Intercepto-y: $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

b) Intercepto-x: $\sqrt[3]{4}$
Intercepto-y: $\sqrt[3]{4}$

c) Intercepto-x: -2 e 2
Intercepto-y: -2 e 2

d) Interceptos-x: $-2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$
Intercepto-y: -2 e 2

10.

3.3 Solução gráfica de equações e inequações em uma variável

A solução algébrica de equações e inequações em uma variável foi discutida no Capítulo 2. Nessa seção, veremos como é possível resolver graficamente o mesmo tipo de problema. Começaremos tratando de uma equação linear.

Exemplo 1. Solução gráfica de uma equação linear

Para alugar um determinado carro por dois dias, a locadora Saturno cobre R\$ 80,00 de taxa fixa e R\$ 0,75 por quilômetro rodado. Nesse caso, o custo do aluguel (em R\$) é dado pela expressão

$$80 + 0{,}75x,$$

em que x é a distância percorrida pelo carro (em km).

Se quisermos descobrir a distância que pode ser percorrida com exatos R\$ 185,00, devemos resolver a equação

$$\underbrace{80 + 0{,}75x}_{\text{custo do aluguel}} = \underbrace{185.}_{\text{valor disponível}}$$

A solução algébrica dessa equação, já apresentada no Problema 2 do Capítulo 2, é reproduzida abaixo.

$$\begin{aligned} 80 + 0{,}75x &= 185 \\ 0{,}75x &= 105 \\ x &= 105/0{,}75 \\ x &= 140. \end{aligned}$$

Na equação acima, o termo do lado esquerdo representa o valor cobrado pela locadora Saturno. Para visualizar como esse valor varia em relação à distância percorrida com o carro, definimos a seguinte equação em duas variáveis:

$$y = 80 + 0{,}75x,$$

em que y representa o custo do aluguel (em R\$). Em seguida, escolhemos dois valores para x e determinamos os velores correspondentes de y, de forma a definir dois pares ordenados (x,y). Com esses pares, traçamos um gráfico dessa equação no primeiro quadrante (pois a distância percorrida não pode ser negativa), como aquele que é apresentado na Figura 3.21.

Se $x = 0$, temos

$$y = 80 + 0{,}75 \cdot 0 = 80.$$

Se $x = 200$, temos

$$y = 80 + 0{,}75 \cdot 200 = 230.$$

Pares ordenados:

$$(0{,}80) \quad \text{e} \quad (200{,}230)$$

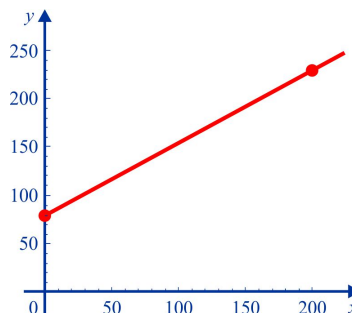



Figura 3.21: Gráfico de $y = 80 + 0{,}75x$.

Voltando à equação original, observamos que dizer que "o custo do aluguel atingiu R\$ 185,00" é o mesmo que escrever $y = 185$. Assim, para obter a distância para a qual

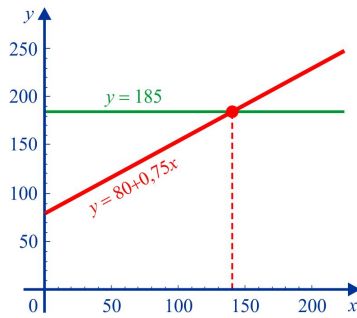



Figura 3.22: Gráficos de $y = 80 + 0{,}75x$ e $y - 185$.

o custo equivale a R$ 185,00, devemos descobrir para que valor de x temos y igual a 185. Graficamente, isso corresponde a encontrar a coordenada x do ponto da curva que intercepta a reta horizontal $y = 185$, como mostra a Figura 3.22.

Portanto, a solução da equação é $x \approx 140$, de modo que é possível percorrer cerca de 140 km com R$ 185,00.

Solução alternativa

Se subtrairmos 185 dos dois lados da equação $80 + 0{,}75x = 185$, obtemos a equação equivalente

$$0{,}75x - 105 = 0.$$

Para resolver essa equação, definimos a equação auxiliar

$$y = 0{,}75x - 105,$$

Figura 3.23: Gráfico de $y = 0{,}75x - 105$.

cujo gráfico é mostrado na Figura 3.23. A solução de $0{,}75x - 105 = 0$ é a coordenada x do ponto em que $y = 0$, ou seja, é o intercepto-x da equação $y = 0{,}75x - 105$. Observando a Figura 3.23, concluímos que o intercepto-x é 140, de modo que é possível percorrer 140 km com o carro alugado.

Para compreender o significado de y na equação auxiliar, devemos notar que a expressão $0{,}75x - 105$ corresponde à diferença entre o que a locadora cobra e o dinheiro disponível:

$$\underbrace{80 + 0{,}75x}_{\text{custo do aluguel}} \quad - \quad \underbrace{185}_{\text{dinheiro disponível}} \quad = \quad 0{,}75x - 105.$$

Se a expressão $0{,}75x - 105$ for positiva, rodamos mais quilômetros que o dinheiro permitia. Por outro lado, valores negativos indicam que há dinheiro disponível para rodar um pouco mais.

Agora, tente o Exercício 1.

Como toda equação pode ser escrita de modo que um dos lados seja zero, vamos usar a estratégia proposta ao final do Exemplo 1 para definir um roteiro de solução gráfica de equações.

Roteiro para a solução gráfica de equações

1. **Mova todos os termos para o lado esquerdo da equação.**
   Dada a equação $A = B$, em que A e B são expressões quaisquer, escreva $A - B = 0$.

2. **Iguale a y o termo do lado esquerdo da equação.**
   Escreva a equação auxiliar $y = A - B$.

3. **Trace o gráfico da equação em duas variáveis.**
   Trace o gráfico de $y = A - B$.

4. **Determine os interceptos-x.**
   Determine os pontos em que $y = 0$.

Problema 2. Solução gráfica de equações quadráticas

Resolva graficamente as equações.

a) $x^2 = x + 6$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 + 2x = -2$

Solução.

a) Para resolver a equação $x^2 = x + 6$, devemos, em primeiro lugar, reescrevê-la na forma $x^2 - x - 6 = 0$. Em seguida, traçamos o gráfico da equação auxiliar

$$y = x^2 - x - 6,$$

conforme mostrado na Figura 3.24a. Como os interceptos-x do gráfico são -2 e 3, a equação original tem duas soluções, $x = -2$ e $x = 3$.

(a) $y = x^2 - x - 6$ (b) $y = x^2 - 2x + 1$ (c) $y = x^2 + 2x + 2$

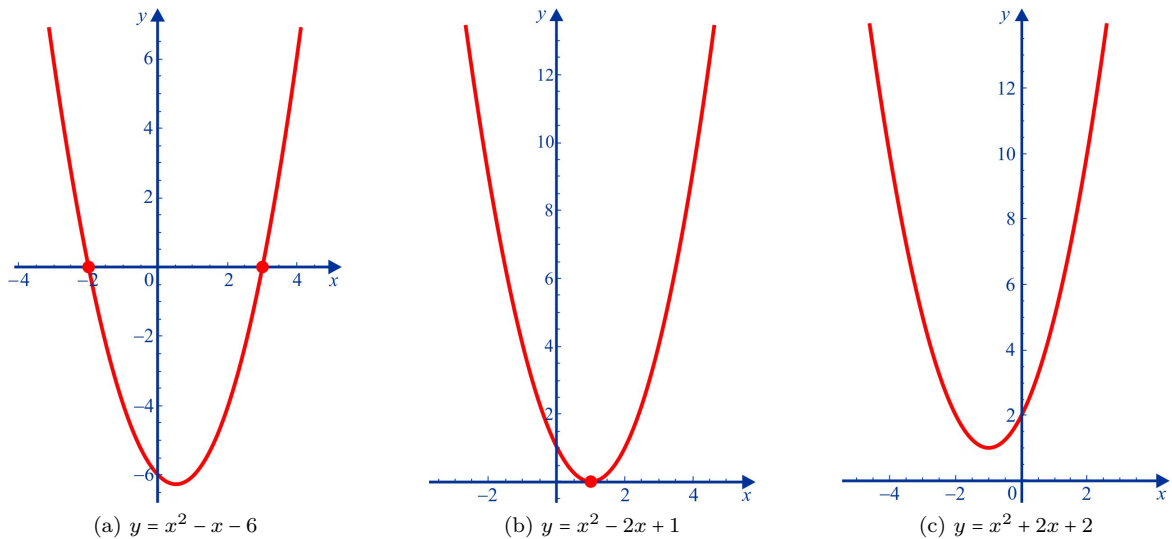



Figura 3.24: Gráficos das equações do Problema 2.

b) Dada a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, podemos definir a equação auxiliar

$$y = x^2 - 2x + 1,$$

cujo gráfico é exibido na Figura 3.24b. Nesse caso, o único ponto que satisfaz $y = 0$ tem coordenada x igual a 1. Assim, a equação tem como solução $x = 1$.

c) Reescrevendo a equação $x^2 + 2x = -2$ como $x^2 + 2x + 2 = 0$, obtemos a equação auxiliar

$$y = x^2 + 2x + 2,$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 3.24c. Observando o gráfico, concluímos que não há pontos nos quais $y = 0$, de modo que a equação original não possui solução real.

Agora, tente o Exercício 4.

Problema 3. Solução gráfica de equações

Resolva graficamente as equações

a) $x^3 - 6x^2 + 3x - 8 = 0$ b) $\dfrac{4}{x-2} - 3 = 0$

Solução.

a) Para resolver esse problema, definimos a equação auxiliar

$$y = x^3 - 6x^2 + 3x - 8.$$

Em seguida, montamos uma tabela de pares ordenados (x,y) e traçamos o gráfico da equação, conforme mostrado na Figura 3.25a. Analisando o gráfico, notamos que a equação possui uma única solução, cujo valor aproximado é $x = 5{,}7$.

(a) $y = x^3 - 6x^2 + 3x - 8$ (b) $y = \frac{4}{x-2} - 3$

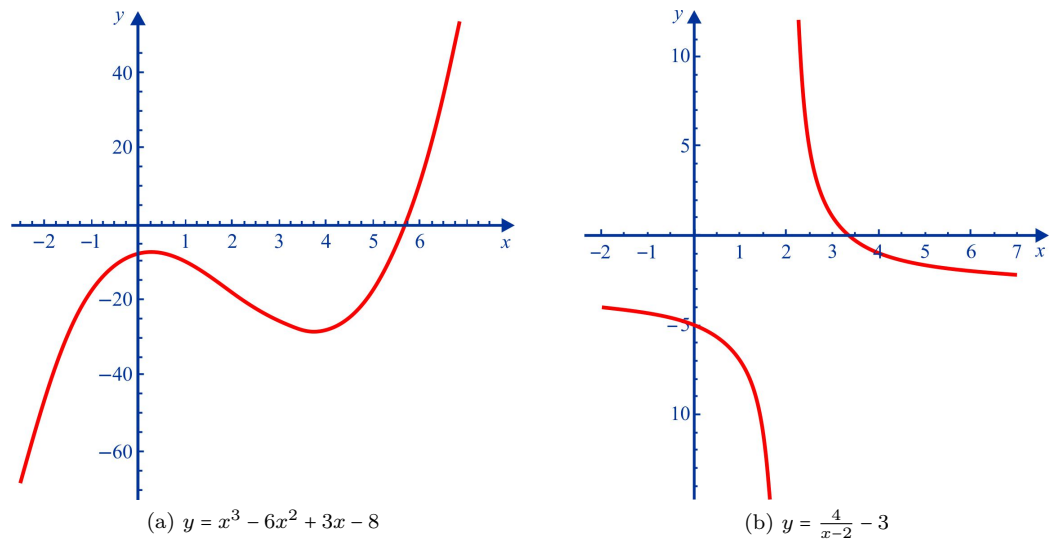



Figura 3.25: Gráficos das equações do Problema 3.

b) Nesse caso, a equação auxiliar é

$$y = \frac{4}{x-2} - 3.$$

Traçando o gráfico dessa equação, obtemos a curva mostrada na Figura 3.25b. Com base no gráfico, concluímos que a única raiz é dada por $x \approx 3{,}3$.

■ Inequações

É possível resolver graficamente inequações em uma variável seguindo passos similares àqueles apresentados acima, como ilustra o exemplo a seguir.

Problema 4. Solução gráfica de uma inequação linear

Uma determinada lâmpada incandescente custa R$ 2,40, enquanto uma lâmpada fluorescente de mesma iluminância custa R$ 14,50. Apesar de custar menos, a lâmpada incandescente consome mais energia, de modo que seu uso encarece a conta de luz. De fato, a cada mês de uso, gasta-se cerca de R$ 4,80 com a lâmpada incandescente e apenas R$ 1,20 com a lâmpada fluorescente.

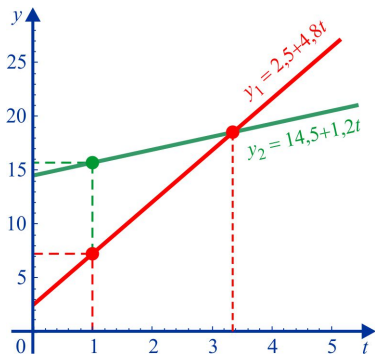
Determine em que situação a lâmpada fluorescente é mais econômica, considerando o custo de compra e o tempo de uso.

Solução.

Figura 3.26: Gráficos de $y_1 = 2{,}5 + 4{,}8t$ e $y_2 = 14{,}5 + 1{,}2t$.

Com base nos dados do enunciado, e definindo t como o número de meses de uso das lâmpadas, podemos dizer que o gasto total (incluindo a aquisição e o uso), em reais, associado à lâmpada incandescente é dado pela equação

$$y_1 = 2{,}50 + 4{,}8t.$$

Por sua vez, o custo associado à lâmpada fluorescente é descrito por

$$y_2 = 14{,}50 + 1{,}2t.$$

O gráfico das duas equações é dado na Figura 3.26, na qual a curva verde está associada à lâmpada fluorescente, e a curva vermelha à lâmpada incandescente.

Para determinar qual lâmpada é mais econômica, devemos comparar os valores de y_1 e y_2. Como o eixo y da Figura 3.26 representa o custo (em reais), se tomarmos um valor fixo de t, a lâmpada mais econômica será aquela cuja gráfico estiver por baixo.

Observamos, portanto, que a lâmpada incandescente é mais vantajosa nos primeiros meses, em virtude de seu baixo preço. Para $t = 1$, em particular, o gráfico mostra que $y_1 =$ R\$ 7,30, enquanto $y_2 =$ R\$ 15,70.

O gráfico também mostra que o custo das duas lâmpadas se equipara quando o tempo de uso atinge um valor próximo de 3,33, e que a lâmpada fluorescente é a mais econômica para $t > 3{,}33$, em virtude de seu baixo impacto na conta de luz.

Em termos matemáticos, dizemos que, para t fixo, a lâmpada fluorescente é mais vantajosa se

$$\underbrace{14{,}5 + 1{,}2t}_{\text{lâmpada fluorescente}} \le \underbrace{2{,}5 + 4{,}8t}_{\text{lâmpada incandescente}},$$

ou seja, se $y_2 \le y_1$. A partir do gráfico, concluímos que a solução dessa inequação é dada aproximadamente por

$$t \ge 3{,}33,$$

pois a curva relativa à lâmpada fluorescente está abaixo da curva da lâmpada incandescente nesse intervalo. Assim, a lâmpada fluorescente será a melhor opção se durar mais que 3,33 meses (ou seja, se não queimar em menos de três meses e dez dias).

Solução alternativa

Também podemos resolver esse problema convertendo a desigualdade acima em outra na qual o lado direito seja igual a zero. Nesse caso, a exemplo do que foi feito para a resolução de equações, escrevemos

$$14{,}5 + 1{,}2t \le 2{,}5 + 4{,}8t$$
$$14{,}5 + 1{,}2t - 2{,}5 - 4{,}8t \le 0$$
$$12 - 3{,}6t \le 0$$

Figura 3.27: Gráfico de $y = 12 - 3{,}6t$.

A vantagem dessa estratégia é que, em lugar de trabalhar com duas equações auxiliares, consideramos apenas a equação

$$y = 12 - 3{,}6t$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 3.27.

A solução da inequação $12 - 3{,}6t \le 0$ é o conjunto de valores de t para os quais $y \le 0$, ou seja, aqueles associados à parte do gráfico que está abaixo do eixo horizontal. Segundo a Figura 3.27, isso ocorre para $t \ge 3{,}33$ (parte vermelha da reta). Logo, a

lâmpada fluorescente será vantajosa se for usada por um tempo igual ou superior a 3,33 meses.

Observe que a variável auxiliar y corresponde à diferença entre o custo da lâmpada fluorescente e o custo da lâmpada incandescente. Dessa forma, a lâmpada fluorescente será a mais barata quando essa diferença for negativa, o que equivale a exigir que o gráfico da equação $y = 12 - 3{,}6t$ esteja abaixo do eixo horizontal.

Agora, tente o Exercício 9.

No exemplo acima, empregamos dois métodos para resolver uma inequação linear em uma variável. O primeiro método, embora mais intuitivo, é mais trabalhoso. Dessa forma, nos ateremos ao segundo processo, para o qual apresentamos um roteiro no quadro abaixo.

Roteiro para a solução gráfica de inequações

1. **Mova todos os termos para o lado esquerdo da inequação.**
   Dada a inequação $A \leq B$, em que A e B são expressões quaisquer, escreva $A - B \leq 0$. Para uma equação na forma $A \geq B$, escreva $A - B \geq 0$.

2. **Iguale a y o termo do lado esquerdo da inequação.**
   Escreva a equação auxiliar $y = A - B$.

3. **Trace o gráfico da equação em duas variáveis.**
   Trace o gráfico de $y = A - B$.

4. **Determine os pontos que satisfazem a inequação.**
   Determine os pontos em que $y \leq 0$, ou que $y \geq 0$, dependendo do sinal da inequação definida no Passo 1.

Problema 5. Solução gráfica de inequações quadráticas

Resolva graficamente as inequações.

a) $x^2 \leq 10 - 3x$

b) $4x^2 - 8x \geq 21$

c) $-x^2 + 5x + 6 \geq 0$

d) $x^2 - 2x + 6 \geq 0$

Solução.

a) A inequação $x^2 \leq 10 - 3x$ é equivalente a $x^2 + 3x - 10 \leq 0$. Traçando o gráfico da equação auxiliar

$$y = x^2 + 3x - 10,$$

obtemos a curva mostrada na Figura 3.28a. A partir do gráfico, concluímos que $y < 0$ para os pontos que estão abaixo do eixo-x (região vermelha da curva). Desse modo, a solução da inequação original é dada por

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 2\}.$$

b) Passando todos os termos da inequação $4x^2 - 8x \geq 21$ para o lado esquerdo, obtemos $4x^2 - 8x - 21 \geq 0$. Definindo, então, a equação auxiliar

$$y = 4x^2 - 8x - 21,$$

traçamos o gráfico mostrado na Figura 3.28b. Como se observa, $y > 0$ para os valores de x associados aos pontos vermelhos do gráfico, ou seja, aqueles acima do eixo-x. Portanto, a solução da inequação é

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } x \geq \frac{7}{2}\right\}.$$

c) À inequação $-x^2 + 5x + 6 \geq 0$ associamos a equação auxiliar

$$y = -x^2 + 5x + 6,$$

cujo gráfico é exibido na Figura 3.28c. Do gráfico, concluímos que $y \geq 0$ para

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 6\}.$$

d) Para a inequação $x^2 - 2x + 6 \geq 0$, definimos a equação auxiliar

$$y = x^2 - 2x + 6,$$

que tem como gráfico a curva da Figura 3.28d. Como a curva inteira está acima do eixo-x, podemos deduzir que $y \geq 0$ sempre, de modo que a inequação é satisfeita para todo x real ($x \in \mathbb{R}$).

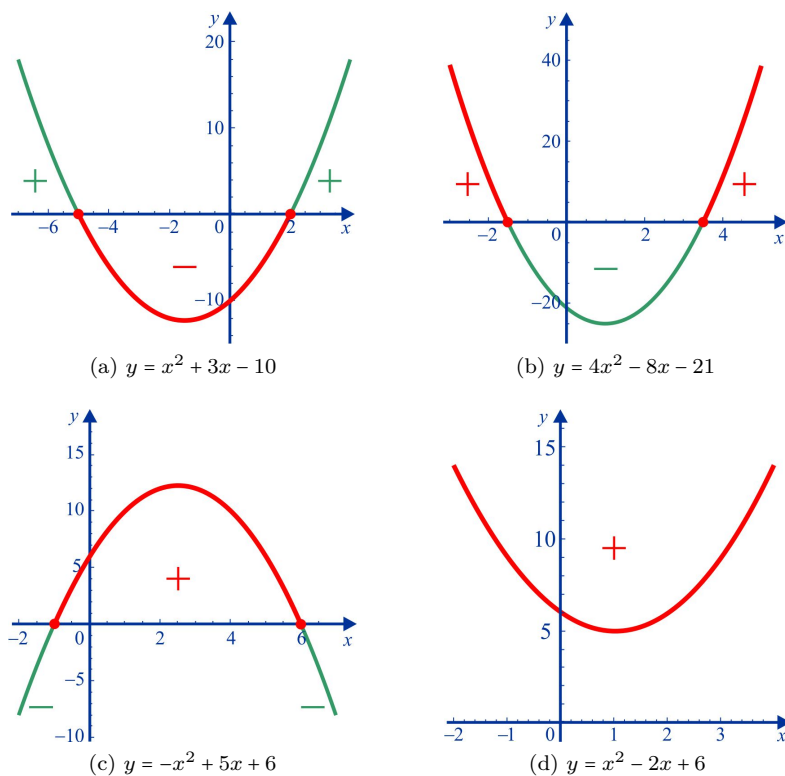



Figura 3.28: Gráficos das equações associadas ao Problema 5. As soluções das inequações correspondem aos trechos indicados em vermelho.

Agora, tente o Exercício 11.

Exercícios 3.3

1. Se um carro partir do quilômetro 25 de uma estrada, e viajar a uma velocidade constante de 60 km/h, a sua posição na estrada (ou seja, o quilômetro no qual o carro se encontra) no instante t (em horas) será dada pela expressão $60t + 25$. Determine, graficamente, o tempo que o carro gastará para chegar ao quilômetro 175 da referida estrada.

2. Um eletricista precisa cortar um fio de 6 m de comprimento em dois pedaços, de modo que um tenha 40 cm a menos que o triplo do outro. Determine, graficamente, o comprimento do menor pedaço de fio. (Exercício extraído da Seção 2.4.)

3. Resolva graficamente as equações.

   a) $4x = 10$ c) $\frac{x}{2} - 5 = 0$ e) $6 - \frac{3x}{4} = 0$
   b) $8 - 3x = 0$ d) $2x + 12 = 0$ f) $1 - \frac{2x}{3} = 0$

4. Resolva graficamente as equações.

   a) $9 - x^2 = 0$ e) $-2x^2 + 4x - 2 = 0$
   b) $2x^2 + 12x = 0$ f) $x^2 + 4 = 5x$
   c) $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ g) $x^2 = 6x - 9$
   d) $x^2 - 2x + 2 = 0$ h) $8x = x^2 + 20$

5. Resolva a equação $x^2 = x + 2$ traçando os gráficos de $y_1 = x^2$ e $y_2 = x + 2$ no intervalo $x \in [-3,3]$.

6. Resolva a equação $2x^2 = 3 - 5x$ traçando os gráficos de $y_1 = 2x^2$ e $y_2 = 3 - 5x$ no intervalo $x \in [-4,3]$.

7. João resolveu assinar um plano pré-pago de telefonia móvel. Analisando os preços, João chegou à conclusão de que os planos disponíveis são bastante semelhantes, exceto pelo custo de *roaming*, isto é, o custo das chamadas fora da região na qual o telefone está registrado.

   Para cada telefonema interurbano efetuado, a companhia A cobra R$ 2,40 para completar a chamada, além de outros R$ 1,50 por minuto de ligação. Por sua vez, a companhia B cobra uma taxa fixa de R$ 1,20, ao que se deve adicionar R$ 1,80 por minuto de conversa.

   Determine graficamente para que duração de chamada interurbana cada plano é mais barato.

8. (Exercício extraído da Seção 2.8.) Uma empresa possui 500 toneladas de grãos em seu armazém e precisa transportá-los a um cliente. O transporte pode ser feito por caminhões ou por trem. Para cada tonelada transportada por trem paga-se R$ 8,00 de custo fixo e R$ 0,015 por quilômetro rodado.

   O transporte rodoviário exige 25 caminhões. Para cada caminhão utilizado paga-se R$ 125,00 de custo fixo, além de R$ 0,50 por quilômetro rodado. Supondo que x seja a distância entre o armazém e o cliente, determine, graficamente, para que intervalo de x o transporte por trem é mais vantajoso que o transporte por caminhões.

9. Resolva graficamente as inequações.

   a) $3 - 2(x - 1) \le 7$ d) $5x - 9 \le 3 + 2x$
   b) $6 - 4x \ge 0$ e) $(x + 3)/2 \ge 6 - x$
   c) $12x - 30 \ge 0$ f) $4(3 - x) \le 3x - 2$

10. Após a administração de um comprimido de Formosex, a concentração do medicamento no plasma sanguíneo do paciente (em mg/ml) varia de acordo com a fórmula

$$-\frac{t^2}{2} + 12t$$

em que t é o tempo (em horas) transcorrido desde a ingestão do comprimido. Determine graficamente o período de tempo no qual a concentração plasmática é maior ou igual a 64 mg/ml.

11. Resolva graficamente as inequações.

   a) $x^2 + 2x \le 3$ e) $x^2 + 2x + 1 \le 0$
   b) $2x^2 \ge 50$ f) $-x^2 + 3x - 4 \ge 0$
   c) $\frac{x^2}{4} \le \frac{x}{2}$ g) $-2x^2 \le x - 1$
   d) $3x - x^2 \ge 0$ h) $x^2 + 4 \ge 4x$

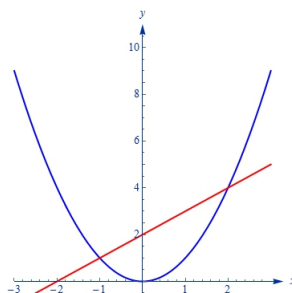
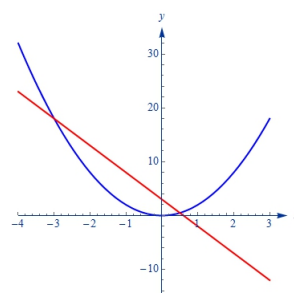
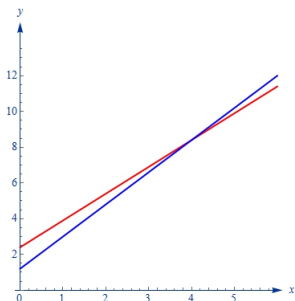
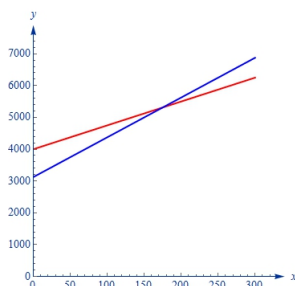
Respostas dos Exercícios 3.3

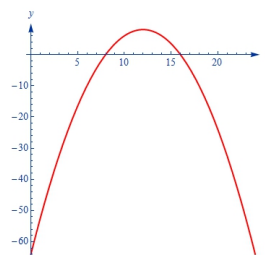
1. $t = 2{,}5$ horas

2. 1,6 m

3. a) $x = \frac{5}{2}$ c) $x = 10$ e) $x = 8$
   b) $x = \frac{8}{3}$ d) $x = -6$ f) $x = \frac{3}{2}$

4. a) $x = -3$ e $x = 3$
   b) $x = -6$ e $x = 0$
   c) $x = -1$, e, $x = 5/2$
   d) Não há solução real.
   e) $x = 1$
   f) $x = 1$ e $x = 4$
   g) $x = 3$
   h) Não há solução real.

5. Soluções: $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$.

6. Soluções: $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

7. Observando a figura abaixo, notamos que o plano da companhia B é mais vantajoso para ligações de menos de 4 minutos. Para ligações de mais de 4 minutos, a companhia A tem o melhor plano.

8. Observando a figura abaixo, notamos que o transporte por trem é mais vantajoso quando a distância é superior a 175 km.

9.
a) $x \geq -1$
b) $x \leq 3/2$
c) $x \geq 5/2$
d) $x \leq 4$
e) $x \geq 3$
f) $x \geq 2$

10. O gráfico da equação $y = -\frac{t^2}{2} + 12t - 64$ é dado abaixo. Dele, deduzimos que a concentração é maior ou igual a 64 mg/ml para t entre 8 e 16 horas.

11.
a) $-3 \leq x \leq 1$
b) $x \leq -5$ ou $x \geq 5$
c) $0 \leq x \leq 2$
d) $0 \leq x \leq 3$
e) $x = -1$
f) Não existe solução real
g) $x \leq -1$ ou $x \geq 1/2$
h) $\mathbb{R}$

3.4 Retas no plano

Apesar de o traçado do gráfico de equações já ter sido explorado da Seção 3.2, nenhum destaque foi dado, até o momento, a algum tipo particular de equação. Nessa seção, vamos discutir as características das equações lineares, que são representadas no plano Cartesiano por meio de retas.

Atenção

Embora toda equação linear na forma $y = mx + b$ corresponda a uma reta no plano, o contrário não é verdade, pois as retas verticais não podem ser representadas por uma equação nessa forma.

Reta no plano Cartesiano

Seja dada uma **equação linear** em duas variáveis

$$y = mx + b,$$

em que m e b são constantes reais. A representação dessa equação no plano Cartesiano é dada por uma **reta**.

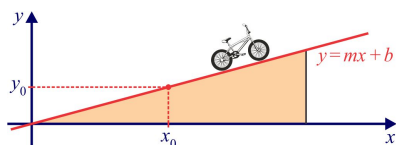



Figura 3.29: Uma rampa representada por uma reta no plano.

A Figura 3.29 mostra uma bicicleta subindo uma rampa. Como o gráfico dessa rampa é uma reta não vertical, podemos representá-la por meio de uma equação linear na forma $y = mx + b$.

Uma equação linear é caracterizada pelas constantes m e b. Observe que b nada mais é que o **intercepto-y** da reta, ja que, tomando $x = 0$, obtemos

$$y = m \cdot 0 + b \qquad \Rightarrow \qquad y = b.$$

Por sua vez, a constante m é denominada **inclinação** da reta.

Problema 1. Determinação da inclinação e do intercepto-y de uma reta

Dada a equação linear

$$-3x + 5y + 2 = 0,$$

determinar a inclinação e o intercepto-y da reta a ela associada.

Solução.

Para encontrar a inclinação e o intercepto-y da reta, convertemos a equação à forma $y = mx + b$, como mostrado abaixo.

$$
\begin{aligned}
-3x + 5y + 2 &= 0 && \text{Equação original.}\\
5y &= 3x - 2 && \text{Isolando o termo que envolve } y.\\
y &= \tfrac{3}{5}x - \tfrac{2}{5} && \text{Dividindo os dois lados por 5.}
\end{aligned}
$$

Logo, a reta tem inclinação $\frac{3}{5}$, e seu ponto de intercessão com o eixo-y é $(0, -\frac{2}{5})$.

Inclinação de uma reta

Para discutir o significado do coeficiente m, vamos recorrer a uma reta conhecida: a rampa do Palácio do Planalto, em Brasília, que reproduzimos na Figura 3.30.

Figura 3.30: A inclinação da rampa do Palácio do Planalto.

A **inclinação** da rampa é a medida usada para indicar o quão íngreme é subida ao palácio. Ela corresponde ao deslocamento vertical associado a um deslocamento de uma unidade na horizontal, ou seja,

$$\text{Inclinação} = \frac{\text{deslocamento vertical}}{\text{deslocamento horizontal correspondente}}.$$

No caso particular da rampa, dizemos que

$$\text{Inclinação} = \frac{\text{altura}}{\text{distância horizontal}}.$$

Figura 3.31: Uma escada encostada na parede.

Considere, agora, a escada reta mostrada na Figura 3.31. Nesse caso, conhecemos a altura do topo da escada, bem como a distância entre a base da escada e a parede, de modo que podemos determinar numericamente a inclinação:

$$\text{Inclinação da escada} = \frac{2\text{ m}}{1{,}4\text{ m}} \approx 1{,}43.$$

Note que, nesse exemplo, a inclinação não tem unidade, de modo que é equivalente dizer que a cada 1 m percorrido na horizontal, a escada sobe 1,43 m, ou que a cada 1 cm percorrido na horizontal, a escada sobe 1,43 cm.

Como se vê, a inclinação de uma reta é a razão entre a variação da altura, Δy, e a distância horizontal, Δx, entre quaisquer dois de seus pontos. Assim, conhecendo as coordenadas Cartesianas de dois pontos da reta, digamos (x_1,y_1) e (x_2,y_2), podemos calcular com exatidão a inclinação.

Inclinação da reta que passa por dois pontos

A inclinação **m** da reta que passa por (x_1,y_1) e (x_2,y_2), com $x_1 \neq x_2$, é dada por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

A Figura 3.32 mostra as medidas usadas no cálculo da inclinação da rampa que a bicicleta da Figura 3.29 tinha que subir, dados os pontos (x_1,y_1) e (x_1,y_1).

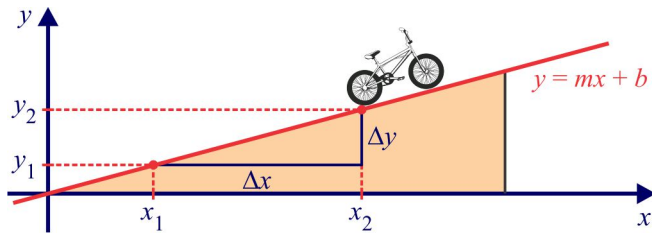



Figura 3.32: Medidas usadas para definir a inclinação de uma reta.

Figura 3.33: A reta que passa por (1,2) e (3,5).

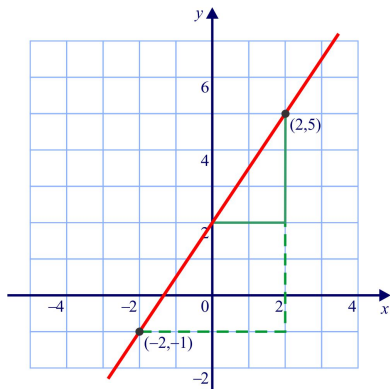



Figura 3.34: A reta que passa por (−2, −1) e (2,5).

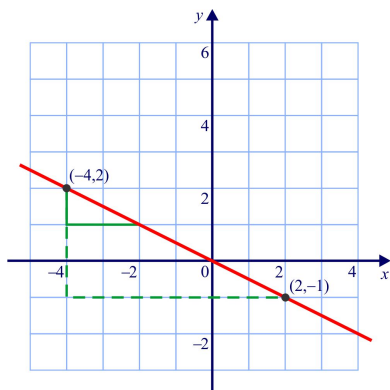



Figura 3.35: A reta que passa por (−4,2) e (2, −1).

Problema 2. Inclinação de uma reta a partir de dois pontos

Determinar as inclinações das retas que passam por

a) (1,2) e (3,5) b) (−2, −1) e (2,5) c) (−4,2) e (2, −1)

Solução.

a) A reta que passa pelos pontos $(x_1,y_1) = (1,2)$ e $(x_2,y_2) = (3,5)$ é apresentada na Figura 3.33. Para determinar sua inclinação, calculamos

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}.$$

Esse valor de m indica que, para cada duas unidades que andamos na horizontal (da esquerda para a direita), movemos três unidades na vertical (de baixo para cima).

b) A Figura 3.34 mostra a reta que passa por $(x_1,y_1) = (-2, -1)$ e $(x_2,y_2) = (2,5)$. Nesse caso, temos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Note que, apesar de a reta passar por pontos diferentes, a inclinação é a mesma da reta do item anterior, ou seja, movendo duas unidades da esquerda para a direita, a reta sobe três unidades.

c) Para os pontos $(x_1,y_1) = (-4,2)$ e $(x_2,y_2) = (2, -1)$, temos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{2-(-4)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Aqui, temos uma novidade: a inclinação é negativa. Isso ocorre sempre que, ao movermos da esquerda para a direita, a reta desce em lugar de subir. Como se observa na Figura 3.35, nesse exemplo, a cada duas unidades que andamos no sentido positivo do eixo-x, há um decréscimo de uma unidade na coordenada y.

Agora, tente o Exercício 2.

Em todos os problemas acima, associamos um dos pontos fornecidos ao par (x_1,y_1) e o outro ponto ao par (x_2,y_2). Como a escolha dos pontos foi arbitrária, poderíamos ter trocado os pontos, sem que isso alterasse o valor da inclinação.

Por exemplo, no problema (a) acima, obtemos o mesmo valor de m trocando os pares de lugar:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2-5}{1-3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

O que não podemos fazer é misturar as coordenadas do pontos, como mostrado abaixo para o mesmo problema (a).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{5-2}{1-3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \quad \text{☠ Errado!}$$

Nesse caso, a troca de ordem dos números do denominador (sem a troca correspondente no numerador) fez com que a inclinação da reta ficasse com o sinal errado.

■ Equação da reta a partir da inclinação e do intercepto-y

Como já vimos, se conhecermos a inclinação m de uma reta e o ponto $(0,b)$ no qual ela intercepta o eixo y, podemos escrever sua equação na forma

$$y = mx + b.$$

Por exemplo, a equação da reta que passa por $(0,1)$ e tem inclinação $\frac{1}{2}$ é

$$y = \tfrac{1}{2}x + 1.$$

Inclinação   Intercepto-y

Problema 3. Retas que passam pelo ponto (2,1)

A Figura 3.36 mostra sete retas que passam pelo ponto (2,1) e têm inclinações diferentes. Escreva a equação de cada reta.

Figura 3.36: Retas que passam pelo ponto (2,1).

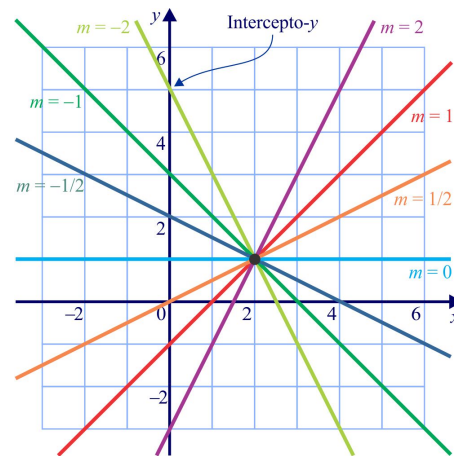



Tabela 3.5: Equações das retas do Problema 3.

Equação	Cor da reta
$y = 1$	Azul claro
$y = \frac{1}{2}x$	Laranja
$y = x - 1$	Vermelho
$y = 2x - 3$	Roxo
$y = -2x + 5$	Verde claro
$y = -x + 3$	Verde escuro
$y = -\frac{1}{2}x + 2$	Azul escuro

Solução.

Com base nas inclinações e nos interceptos-y dados na figura, é fácil escrever as equações das retas. No caso da reta verde clara, por exemplo, observamos que $m = -2$ e que a reta corta o eixo-y no ponto $(0,5)$, de modo que sua equação é

$$y = -2x + 5.$$

As equações de todas as demais retas do problema são dadas na Tabela 3.5. Observe que quanto maior o valor absoluto da inclinação, mais "íngreme" é a reta. Por outro lado, a reta é tão mais "suave" quanto mais próxima de zero está sua inclinação.

Problema 4. Retas paralelas

Veremos retas paralelas com mais detalhes no segundo volume desse livro, ao tratarmos de geometria analítica.

Duas retas (não verticais) são paralelas se têm a mesma inclinação. Identifique na Figura 3.37 cada uma das retas abaixo.

- $y = \frac{1}{2}x - 1.$
- $y = \frac{1}{2}x.$
- $y = \frac{1}{2}x + 1.$
- $y = \frac{1}{2}x + 2.$
- $y = \frac{1}{2}x + 3.$

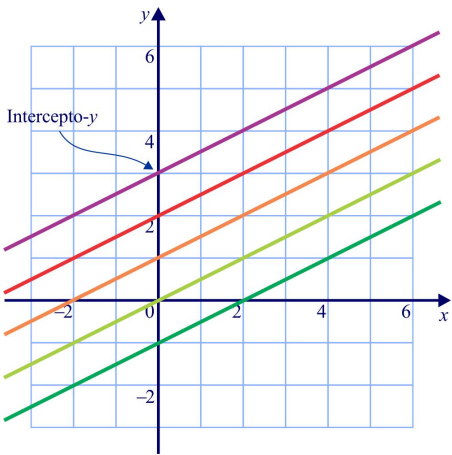



Figura 3.37: Retas paralelas com inclinação igual a 1/2.

Solução.

Observando o intercepto-y de cada reta, é possível estabelecer a relação indicada na tabela ao lado.

Equação	Cor da reta
$y = \frac{1}{2}x - 1$	Verde escuro
$y = \frac{1}{2}x$	Verde claro
$y = \frac{1}{2}x + 1$	Laranja
$y = \frac{1}{2}x + 2$	Vermelho
$y = \frac{1}{2}x + 3$	Roxo

Equação da reta a partir da inclinação e de um ponto

Suponha que conheçamos um ponto (x_1,y_1) pelo qual passa uma reta. Suponha, também, que (x,y) seja um ponto qualquer dessa mesma reta, com $x \neq x_1$. Nesse caso, a inclinação da reta é definida como

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Multiplicando, agora, os dois lados por $(x - x_1)$, obtemos

$$m(x - x_1) = y - y_1.$$

Note que essa equação é satisfeita por todos os pontos (x,y) da reta, incluindo o ponto (x_1,y_1). Assim, podemos dizer que essa é uma forma alternativa de se apresentar a equação da reta. De fato, essa forma é bastante adequada quando conhecemos a inclinação e um ponto pelo qual a reta passa.

Equação da reta da qual se conhece a inclinação e um ponto

A equação da reta que tem inclinação m e que passa pelo ponto (x_1, y_1) é

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Exemplo 5. Reta com inclinação e ponto conhecidos

Para encontrar a equação da reta que passa por (3,1) e tem inclinação 1/2, basta definir

$$m = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad (x_1,y_1) = (3,1).$$

e substituir esses valores na equação $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3).$$

Pronto, aí está a equação desejada. Entretanto, se você ainda prefere apresentar a equação da reta na forma $y = mx + b$, pode converter a equação acima fazendo

$$\begin{aligned} y - 1 &= \tfrac{1}{2}(x - 3) && \text{Equação original.} \\ y - 1 &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\cdot 3 && \text{Propriedade distributiva.} \\ y &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} + 1 && \text{Isolamento de } y. \\ y &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 4.

■ Equação da reta que passa por dois pontos conhecidos

Existe apenas uma reta que passa por dois pontos distintos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) do plano coordenado. Para determinar a equação dessa reta devemos, em primeiro lugar, calcular sua inclinação através da fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Em seguida, escrevemos a equação usando um dos pontos dados, como descrito no quadro acima. O exemplo a seguir ilustra essa estratégia de obtenção da equação.

Exemplo 6. Reta que passa por dois pontos

Para determinar a equação da reta que passa pelos pontos $(x_1,y_1) = (2,1)$ e $(x_2,y_2) = (3,-1)$, calculamos, primeiramente, sua inclinação:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-1) - 1}{3 - 2} = -2.$$

Usando, agora, o ponto $(2,1)$, escrevemos

$$y - 1 = -2(x - 2).$$

Caso queiramos converter essa equação à forma $y = mx + b$, devemos fazer

$$y - 1 = -2x - 2\cdot(-2) \qquad \Rightarrow \qquad y = -2x + 4 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = -2x + 5.$$

Observe que o mesmo resultado seria obtido se usássemos o ponto $(x_2,y_2) = (3,-1)$ para escrever a equação, em lugar de $(x_1,y_1) = (2,1)$. Nesse caso, teríamos

$$y - (-1) = -2(x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad y + 1 = -2(x - 3).$$

Apesar de essa equação parecer diferente da que foi obtida acima, um pouco de álgebra nos mostra que o resultado é o mesmo:

$$y + 1 = -2x - 2\cdot(-3) \qquad \Rightarrow \qquad y = -2x + 6 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = -2x + 5.$$

Agora, tente o Exercício 5.

Apesar de ser mais trabalhoso, também podemos obter diretamente a equação da reta na forma $y = mx + b$ a partir de dois pontos dados, como é mostrado no exemplo abaixo.

Exemplo 7. Outra forma de se obter uma reta que passa por dois pontos

Para determinar a reta que passa por $(2,1)$ e $(-2,3)$ podemos calcular, em primeiro lugar, a inclinação da reta, que é dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{(-2)-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Agora, para determinar o intercepto-y, usamos m e um dos pontos dados. Sabendo, por exemplo, que a reta passa por (2,1), podemos escrever

$y = mx + b$	Equação original.
$y = -\frac{1}{2} \cdot x + b$	Substituindo m.
$1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b$	Substituindo x e y.
$b = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2$	Isolando b.
$b = 2$	Simplificando.

Assim, a equação é $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

■ Retas horizontais e retas verticais

Em uma reta horizontal, todos os pontos têm a mesma coordenada y, ou seja, tomando dois pontos distintos, digamos (x_1,y_1) e (x_2,y_2), temos $y_1 = y_2$. Sendo assim, a inclinação da reta é

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0.$$

Logo, a equação da reta pode ser escrita simplesmente como $y = y_1$.

Por outro lado, em uma reta vertical, todos os pontos têm a mesma coordenada x. Nesse caso, enfrentaríamos um sério problema se quiséssemos calcular m, pois, como $x_1 = x_2$, teríamos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0}. \qquad \text{Impossível!}$$

Como a divisão por zero não está definida, não é possível escrever a equação de uma reta vertical na forma $y = mx + b$. De fato, a equação desse tipo de reta é simplesmente $x = x_1$.

Reta vertical e reta horizontal que passam por um ponto

Dado o ponto (x_1,y_1),

- A equação da **reta horizontal** que passa pelo ponto é $y = y_1$.
- A equação da **reta vertical** que passa pelo ponto é $x = x_1$.

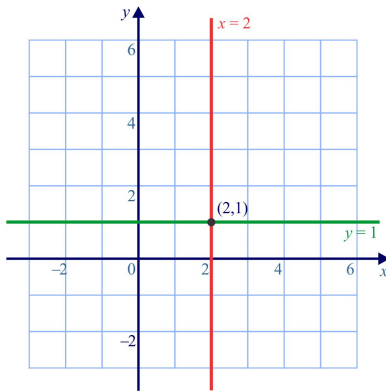



Figura 3.38: Reta vertical e reta horizontal que passam por (2,1).

Exemplo 8. Reta vertical e reta horizontal que passam por um ponto

A Figura 3.38 mostra a reta horizontal e a reta vertical que passam pelo ponto (2,1). Nesse caso, a equação da reta horizontal é

$$y = 1,$$

enquanto a reta vertical é descrita pela equação

$$x = 2.$$

■ Traçado do gráfico de equações lineares

Segundo o roteiro apresentado na Seção 3.2, o traçado do gráfico de uma equação exige que montemos uma tabela com vários pontos, marquemos todos eles no plano e tracemos uma curva suave ligando-os.

Felizmente, o gráfico de equações lineares é bem mais fácil de se obter, já que, nesse caso, é suficiente calcular dois pontos e traçar a reta que passa por eles.

O exemplo abaixo mostra três estratégias diferentes para se obter o gráfico de uma equação linear. Como essas estratégias são análogas, qualquer uma pode ser usada para o traçado de retas.

Problema 9. Traçado de retas

Trace os gráficos das equações abaixo

a) $y = 2x - 1$ b) $3y + 4x = 12$ c) $y = \frac{x}{2}$

Solução.

a) Observando a equação $y = 2x - 1$, notamos que $b = -1$, de modo que a reta cruza o eixo-y no ponto $(0, -1)$. Além disso, como $m = 2$, sabemos que, ao somarmos uma unidade a x, a reta sobe 2 unidades. Logo, partindo de $(0, -1)$, obtemos o ponto $(0 + 1, -1 + 2)$, ou simplesmente $(1,1)$. De posse desses dois pontos, é fácil obter o gráfico da equação, como mostra a Figura 3.39a

b) Para traçar o gráfico da equação $3y+4x = 12$, vamos determinar os dois interceptos. Tomando, em primeiro lugar $x = 0$, obtemos

$$3y = 12 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{12}{3} = 4.$$

Logo, a reta passa por $(0,4)$. Agora, fazendo $y = 0$, obtemos

Observe que, nesse caso, também poderíamos ter convertido a equação à forma $y = -\frac{4}{3}x + 4$ antes de traçar seu gráfico.

$$4x = 12 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{12}{4} = 3.$$

Assim, a reta também passa por $(3,0)$. Marcando os dois pontos no plano, e traçando a reta que passa por eles, obtemos o gráfico da Figura 3.39b.

c) Para obter o gráfico da equação $y = \frac{x}{2}$, vamos escolher dois valores quaisquer para x, e determinar os valores correspondentes de y. Escolhendo, por exemplo, $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, obtemos:

$$y_1 = \frac{0}{2} = 0 \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{4}{2} = 2.$$

De posse dos pontos $(0,0)$ e $(4,2)$, traçamos a reta mostrada na Figura 3.39c.

(a) $y = 2x - 1$

(b) $3y + 4x = 12$

(c) $y = \frac{x}{2}$

Figura 3.39: Gráficos das equações do Problema 9.

Agora, tente o Exercício 7.

Imagine, agora, que tenhamos o problema inverso, isto é, suponha que seja dado o gráfico de uma reta, e que queiramos determinar a equação linear correspondente. Nesse caso, a solução do problema pode ser facilmente encontrada tomando dois pontos quaisquer do gráfico, como mostra o exemplo abaixo.

Figura 3.40: Gráfico da reta do Exemplo 10.

Exemplo 10. Obtenção de uma equação linear a partir do gráfico

Dada a reta da Figura 3.40, vamos determinar a equação correspondente escolhendo dois pontos quaisquer do gráfico.

Observando a figura, notamos que a reta passa pelos pontos

$$(x_1,y_1) = (-1,-2) \qquad \text{e} \qquad (x_2,y_2) = (5,3).$$

Desse modo, sua inclinação é dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-2)}{5-(-1)} = \frac{5}{6}.$$

Tomando, agora, o ponto $(5,3)$, obtemos a equação

$$y - 3 = \frac{5}{6}(x - 5).$$

Agora, tente o Exercício 6.

■ Aplicações

Se uma equação linear é usada para relacionar duas grandezas reais x e y, então a inclinação da reta correspondente representa a **taxa de variação** de y com relação a x. Quando as grandezas têm a mesma unidade, costumamos usar o termo **razão**, em lugar de **taxa**. Os problemas abaixo mostram situações práticas nas quais a inclinação de uma reta representa uma razão ou uma taxa de variação.

Para uma discussão sobre o significado de razão e de taxa, consulte a Seção 1.6.

Problema 11. Projeto de uma estrada

Um engenheiro precisa projetar uma estrada que desça de um ponto que está a 50 m de altura até um ponto que está na altora 0, com um declive de 6%. Defina uma

equação que forneça a altura (y) da estrada em relação ao deslocamento horizontal (x). Determine, também, o comprimento horizontal da rampa.

Solução.

O termo "declive" é equivalente a "inclinação negativa". Ou seja, se a estrada tem um declive de 6%, então sua inclinação é

$$m = -\frac{6}{100}.$$

Observe que o declive não tem unidade, de modo que a estrada desce 6 m a cada 100 metros de distância horizontal, o que é o mesmo que dizer que ela desce 6 cm a cada 100 cm – ou 1 m – percorrido na horizontal. Nesse caso, dizemos que a inclinação é a **razão** entre a variação da altura e a variação da posição horizontal.

Supondo, então, que a estrada comece no ponto $x = 0$, no qual a altura é igual a 50 m, podemos dizer que o ponto $(x_1,y_1) = (0{,}50)$ satisfaz a equação que desejamos encontrar. Sendo assim, temos

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \Rightarrow \qquad y - 50 = -\frac{6}{100}(x - 0).$$

Isolando y nessa equação, obtemos

$$y = -0{,}06x + 50,$$

que é a equação da reta na forma $y = mx + b$.

Finalmente, para determinar o comprimento horizontal da rampa, observamos que ela irá acabar quando $y = 0$, o que ocorre para

$$0 = -0{,}06x + 50 \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}06x = 50 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{50}{0{,}06} \approx 833{,}33.$$

Logo, a rampa terá cerca de 833,33 metros.

Agora, tente o Exercício 15.

Problema 12. População de Grumixama

A população do município de Grumixama era de 1360 habitantes em 2004 e de 1600 habitantes em 2010. Com base nesses dados, e supondo que o crescimento populacional da cidade seja linear,

a) escreva uma equação que forneça a população de Grumixama, P, com relação a t, o tempo decorrido (em anos) desde o ano 2000;

b) determine a população que Grumixama possuía em 2000;

c) estime a população em 2020;

d) esboce o gráfico da equação para $0 \le t \le 40$;

e) determine aproximadamente em que ano a população atingirá 2600 habitantes.

Solução.

a) Supondo que $t = 0$ no ano 2000, temos $t = 4$ em 2004 e $t = 10$ em 2010. Logo, os pontos $(t_1,P_1) = (4, 1360)$ e $(t_2,P_2) = (10, 1600)$ satisfazem a equação, de modo que sua inclinação é

$$m = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} = \frac{1600 - 1360}{10 - 4} = \frac{240}{6} = 40 \text{ hab./ano.}$$

Observe que a inclinação m corresponde à **taxa de variação** populacional de Grumixama. Como a inclinação é positiva, a população da cidade **cresce** a uma taxa de 40 habitantes por ano.

Para encontrar a equação que fornece a população, P, em relação a t, usamos um dos pontos dados – digamos $(t_1,P_1) = (4,1360)$ – e escrevemos

$$P - P_1 = m(t - t_1) \qquad \Rightarrow \qquad P - 1360 = 40(t - 4).$$

Finalmente, isolando P nessa equação, obtemos

$$P = 40t + 1200.$$

b) Como consideramos que $t = 0$ no ano 2000, a população da cidade nesse ano corresponde ao intercepto-y da reta. Desse modo, Grumixama tinha 1200 habitantes em 2000.

Figura 3.41: Gráfico da equação do Problema 12.

c) Usando a equação linear que encontramos no item (a), podemos estimar que a população em 2020 (ou seja, quando $t = 20$) será de

$$40 \cdot 20 + 1200 = 2000 \text{ habitantes.}$$

d) O gráfico da equação é exibido na Figura 3.41. Nele, os pontos fornecidos no enunciado são mostrados em preto, enquanto o ponto correspondente ao ano 2000 aparece em laranja, e o ponto de 2020 aparece em verde.

e) Para determinar o ano em que Grumixama terá 2600 habitantes, devemos resolver a equação

$$2600 = 40t + 1200.$$

Isolando t nessa equação, obtemos

$$40t = 2600 - 1200 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1400}{40} = 35.$$

Assim, supondo que a população cresça de forma linear, a cidade terá 2600 habitantes em 2035.

Agora, tente o Exercício 11.

Problema 13. Densidade demográfica

Figura 3.42: População e área de municípios brasileiros, em 2000 (Fonte: IBGE).

A Figura 3.42 apresenta a população e a área de vários municípios brasileiros, segundo o Censo Demográfico 2000 do IBGE. Com base nos dados da figura,

a) determine aproximadamente a densidade demográfica de Campinas em 2000;

b) determine a cidade cuja densidade demográfica era a mais próxima daquela observada em Campinas;

c) indique as três cidades que possuíam as menores densidades demográficas em 2000.

Solução.

a) A densidade demográfica de um município é a razão entre sua população e sua área. Observando a Figura 3.42, podemos dizer que, no ano 2000, Campinas possuía uma densidade demográfica aproximadamente igual a

$$D_{Cam} \approx \frac{970.000}{800} = 1212{,}5 \text{ hab/km}^2.$$

b) Quando trabalhamos no plano em que o eixo horizontal representa a área e o eixo vertical fornece a população, a densidade demográfica de uma cidade é a inclinação (D) da reta que passa pela origem e pelo ponto que representa a cidade. Para constatar isso, basta notar que

Na fórmula da inclinsção, usamos

$(x_1,y_1) = (0,0)$ (origem) e

$(x_2,y_2) = (\text{Área, População})$.

$$\text{D} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{População} - 0}{\text{Área} - 0} = \frac{\text{População}}{\text{Área}}.$$

A reta que passa pela origem e pelo ponto que representa Campinas é mostrada na Figura 3.43a. Com base na figura, concluímos que a cidade com densidade demográfica mais próxima daquela existente em Campinas era Belém.

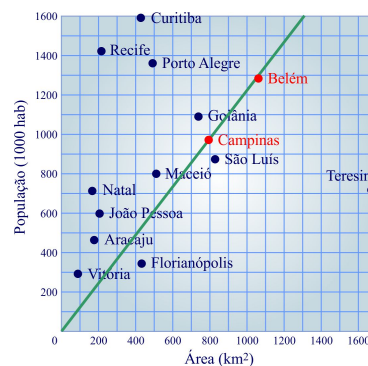
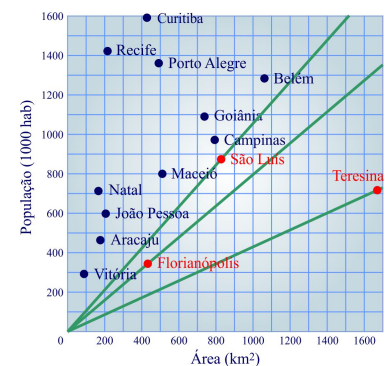
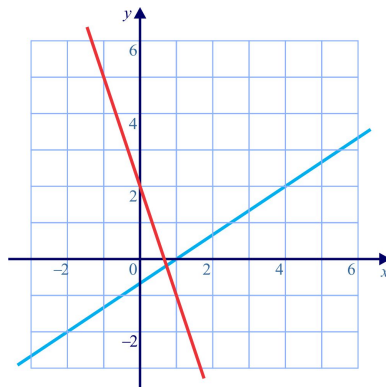
c) As cidades com menor densidade demográfica são aquelas cujas retas que passam por seus pontos e pela origem possuem as menores inclinações. Segundo a Figura 3.43b, essas cidades são, pela ordem, Teresina, Florianópolis e São Luís.

(a) Reta associada a Campinas

(b) Retas associadas a Teresina, Florianópolis e São Luís

Figura 3.43: Retas do Problema 13.

Agora, tente o Exercício 18.

Exercícios 3.4

1. Encontre as inclinações das retas mostradas na figura abaixo.

2. Determine as inclinações das retas que passam pelos pares de ponto abaixo.

a) $(4,1)$ e $(2,3)$
b) $(1,2)$ e $(-2,-4)$
c) $(-5,-2)$ e $(3,-2)$
d) $(-4,5)$ e $(1,-10)$
e) $(6,4)$ e $(-3,1)$
f) $(-3,4)$ e $(7,2)$
g) $(-2,-6)$ e $(-1,1)$
h) $(5,-2)$ e $(-9,5)$

3. Escreva as equações das retas definidas pelas inclinações e interceptos abaixo.

a) Intercepto-y: -1; inclinação: $4/5$.
b) Intercepto-y: 2; inclinação: $-3/4$.
c) Intercepto-y: 4; inclinação: -3.
d) Intercepto-y: -3; inclinação: $1/3$.
e) Intercepto-y: $1/2$; inclinação: 2.
f) Intercepto-y: 0; inclinação: -1.

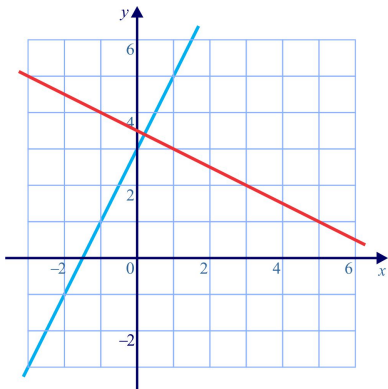
4. Determine as equações das retas que satisfazem as condições indicadas. Em seguida, trace seus gráficos.

a) Passa por $(2,-1)$ e tem inclinação 3.

b) Passa por (1,5) e tem inclinação −3.
c) Passa por (−2,1) e tem inclinação 1/3.
d) Passa por $(6,-4)$ e tem inclinação −1/3.
e) Passa por (−4,8) e tem inclinação −2.
f) Passa por $(-3,-2)$ e tem inclinação 3/2.

5. Encontre as equações das retas que satisfazem as condições indicadas.

a) Passa por $(-1,-3)$ e intercepta o eixo-y na ordenada 1.
b) Passa por (1,2) e por (2,1).
c) Passa por $(4,-2)$ e por $(-3,-2)$.
d) Intercepta o eixo-y na ordenada 3 e o eixo-x na abscissa −2.
e) Intercepta o eixo-y na ordenada 2 e o eixo-x na abscissa 1.
f) Passa por $(-2,-6)$ e intercepta o eixo-x na abscissa 10.
g) Passa por (−6,4) e por $(2,-1)$.
h) Passa por (−2,8) e por (3,4).
i) Passa por (−5,0) e por $(0,-5)$.
j) Passa por (3,14) e por $(-4,-28)$.
k) Passa por $(-1,\frac{1}{2})$ e por $(2,\frac{19}{2})$.
l) Passa por (3,5; −0,6) e por (−2; 2,7).

6. Determine as equações das retas mostradas na figura abaixo.

7. Trace os gráficos das equações abaixo.

a) $y=-\frac{2}{3}x+1$
b) $y=5x-2$
c) $y=-2x$
d) $y=4$
e) $x-y=-3$
f) $3y-x+4=0$

8. Encontre as equações das retas que satisfazem as condições abaixo. Em seguida, trace os gráficos correspondentes.

a) Passa por (−2,1) e $(-2,5)$.
b) Passa por (−7,8) e $(10,8)$.
c) Reta vertical que passa por $(3,-1)$.
d) Reta horizontal que passa por $(6,-4)$.

9. Dados os pontos A(-1,2) e B(3,-1)

a) Marque os pontos no plano Cartesiano, considerando as abscissas no intervalo [−3,5] e as ordenadas em $[-2,3]$.
b) Determine a equação da reta que passa pelos pontos. Trace essa reta no gráfico.
c) Determine a ordenada do ponto dessa reta no qual a abscissa vale 1.
d) Determine a abscissa do ponto da reta que tem ordenada 0.

10. Trabalhando em uma loja de roupas, Gláucia recebe R$ 1200,00 de salário mensal fixo, além de uma comissão de R$ 0,09 para cada real vendido.

a) Determine uma equação que expresse o valor recebido por Gláucia em relação ao valor dos produtos que ela vende em um mês.
b) Se, no mês passado, Gláucia recebeu R$ 2280,00 de salário, calcule quantos reais em roupas ela conseguiu vender.

11. Uma determinada árvore cresce a uma taxa constante, tendo alcançado 3 m passados 5 anos de seu plantio, e atingido 7 m decorridos 13 anos do plantio.

a) Defina uma equação que forneça a altura da árvore em relação ao tempo transcorrido desde seu plantio.
b) Determine aproximadamente a altura da árvore quando foi plantada.
c) Determine em que ano (após o plantio) a árvore atingirá 15 m.

12. A cidade de Cascatinha tinha 15.000 habitantes em 2006, tendo passado a 18.500 habitantes em 2011.

a) Supondo que a população da cidade tenha crescido de forma constante nesse período, exiba a população de Cascatinha em um gráfico no qual o eixo horizontal fornece o número de anos transcorridos desde o ano 2000.
b) Determine a equação da reta que passa pelos pontos dados.
c) Indique o que significam a inclinação da reta e o seu ponto de interseção com o eixo-y.
d) Com base em sua equação, estime a população de Cascatinha em 2020.

13. Um fazendeiro usa milho para produzir dois tipos de ração animal. Cada quilograma da ração A consome 0,4 kg de milho, enquanto um quilograma da ração B exige apenas 0,3 kg de milho. No momento, o fazendeiro dispõe de 10 kg de milho, que pretende usar integralmente para produzir as rações A e B.

a) Suponha que x seja a quantidade (em kg) de ração A e que y seja a quantidade de ração B que o fazendeiro pode produzir com o milho disponível. Escreva uma equação que relacione x, y e a quantidade de milho de que o fazendeiro dispõe.
b) Represente essa equação como uma reta no plano Cartesiano, considerando que x e y estão entre 0 e 40.

c) Se o fazendeiro decidir produzir 16 kg de ração A, quanto ele poderá produzir da ração B?

d) Se o fazendeiro decidir usar o milho apenas na ração A, quantos quilogramas poderá produzir?

14. O dono de uma indústria de móveis descobriu que há uma relação linear entre o custo diário de produção de cadeiras em sua fábrica e o número de cadeiras produzidas em um dia. Assim, se a indústria produz 100 cadeiras em um dia, o custo total de produção é de R$ 2200,00. Por outro lado, se o número de cadeiras produzidas em um dia sobe para 300, o custo total de produção atinge R$ 4800,00.

a) Exiba os dados fornecidos no enunciado em um gráfico no qual o eixo horizontal forneça o número de cadeiras produzidas em um dia e o eixo vertical forneça o custo total de produção. Trace no gráfico a reta que passa pelos pontos dados.

b) Determine a equação da reta.

c) Indique o que significam a inclinação da reta e o seu ponto de interseção com o eixo-y.

d) Determine o custo total de produção de um dia no qual foram fabricadas 400 cadeiras.

15. Depreciação é a perda de valor de um produto com o tempo de uso. Uma máquina custa R$ 50.000,00 e tem uma depreciação constante de R$ 2.400,00 por ano (ou seja, seu valor diminui em R$ 2.400,00 a cada ano).

a) Escreva uma equação que relacione o valor da máquina ao número de anos de uso.

b) Determine após quantos anos de uso o valor da máquina será inferior a R$ 2000,00.

c) Exiba sua equação em um gráfico no qual o eixo horizontal forneça o tempo de uso da máquina, em anos.

16. Um artesão que vende pulseiras descobriu que, cobrando R$ 8,00 por pulseira, é possível vender 12 unidades em uma manhã. Por outro lado, se as pulseiras custassem R$ 5,00, o número de compradores subiria para 18 por manhã. Responda as perguntas abaixo, supondo que o número de pulseiras vendidas varie linearmente com o preço.

a) Escreva uma equação que forneça o número de pulseiras vendidas em relação ao preço da peça.

b) Determine qual deve ser o preço da pulseira para que o artesão consiga vender 15 unidades em uma manhã.

c) Determine quantas pulseiras o artesão consegue vender cobrando R$ 12,00 por unidade.

17. Adotando uma dieta milagrosa, Pedro vem perdendo 0,85 kg por semana, tendo reduzido seu peso para 126,4 kg após 16 semanas do início do regime.

a) Determine o peso que Pedro tinha ao iniciar o regime.

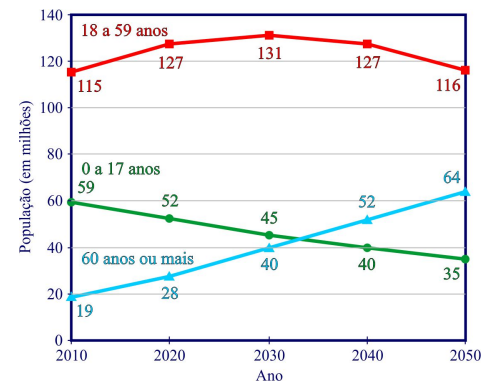
b) Defina uma equação que forneça o peso de Pedro, y (em kg), em relação ao tempo, x (em semanas), desde o início da dieta.

c) Determine em quantas semanas (desde o início da dieta) seu peso chegará a 100 kg.

18. O município de Campinas é dividido em cinco distritos: norte, sul, leste, sudoeste e noroeste. A tabela abaixo fornece a área de cada distrito, bem como os casos de dengue observados em 2013.

Distrito	Área (km^2)	Casos de dengue
Norte	175	2977
Sul	120	2723
Leste	350	1878
Sudoeste	80	1709
Noroeste	75	2143

Suponha que, como uma medida de combate à dengue, o município de Campinas tenha decidido fazer uma nebulização (ou pulverização) de inseticida, atendendo, em primeiro lugar, o distrito com maior número de casos de dengue por km^2, no ano de 2013. Mostre os pontos correspondentes aos cinco distritos de Campinas em um gráfico no qual o eixo-x forneça a área e o eixo-y o número de casos de dengue. Trace retas passando pela origem e por esses pontos e, com base nas retas, indique o primeiro distrito em que ocorrerá nebulização.

19. Segundo o IBGE, nos próximos anos, a participação das gerações mais velhas na população do Brasil aumentará. O gráfico ao lado mostra uma estimativa da população brasileira por faixa etária, entre os anos de 2010 e 2050. Os números apresentados no gráfico indicam a população estimada, em milhões de habitantes, no início de cada ano. Considere que a população varia linearmente ao longo de cada década.

a) Calcule as inclinações dos segmentos de reta associados à população de 18 a 59 anos, e determine em qual década essa faixa da população crescerá mais rápido e em qual década ela decrescerá mais rápido.

b) Determine, em termos percentuais, a taxa de variação da população total do país entre 2040 e 2050.

c) Escreva a equação do segmento de reta relativo à população com 60 anos ou mais, no período entre 2030 e 2040.

d) Escreva a equação do segmento de reta relativo à população com 17 anos ou menos, no período entre 2030 e 2040.

e) Com base nos itens (c) e (d), determine, aproximadamente, em que ano o número de habitantes com 60 anos ou mais irá ultrapassar o número de habitantes com até 17 anos.

20. A tabela abaixo mostra o desempenho dos três candidatos a prefeito de Conceição do Passa Três, segundo as últimas pesquisas eleitorais.

Candidato	Votos válidos (%)	
	Há 45 dias	Há 25 dias
Ademar	44	39
Juarez	32	33
Juscelino	24	28

Supondo que os resultados das pesquisas sejam exatos e que os candidatos tenham mantido uma tendência linear de variação das intenções de voto, que percentual de votos cada um receberia se a eleição para prefeito fosse realizada hoje?

21. A massa de uma esfera de naftalina decresce com o tempo, devido à sublimação. Supondo que a taxa de decrescimento seja proporcional à área da superfície da esfera, pode-se mostrar que o raio, r, da esfera varia linearmente com o tempo, t.

a) Sabendo que, em um certo instante, o raio tinha 0,8 mm e que, quatro dias mais tarde, ele era de apenas 0,75 mm, encontre uma equação que forneça r (em milímetros) em termos do tempo decorrido (em dias) a partir do momento em que $r = 0{,}8$ mm.

b) Determine o tempo gasto para a completa sublimação da naftalina.

Respostas dos Exercícios 3.4

1. Azul: $\frac{2}{3}$. Vermelha: -3.

2. a) -1 b) 2 c) 0 d) -3 e) $\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{5}$ g) 7 h) $-\frac{1}{2}$

3. a) $y = \frac{4}{5}x - 1$ b) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ c) $y = -3x + 4$ d) $y = \frac{x}{3}x - 3$ e) $y = 2x + \frac{1}{2}$ f) $y = -x$

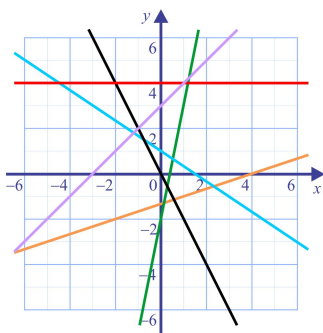
4. a) $y = 3x - 7$ b) $y = -3x + 8$ c) $y = x/3 + 5/3$ d) $y = -x/3 - 2$ e) $y = -2x$ f) $y = 3x/2 + 5/2$

5. a) $y = 4x + 1$ b) $y = 3 - x$ c) $y = -2$ d) $y = \frac{3}{2}x + 3$ e) $y = -2x + 2$ f) $y = \frac{x}{2} - 5$ g) $y = -\frac{5x}{8} + \frac{1}{4}$ h) $y = -\frac{4x}{5} + \frac{32}{5}$ i) $y = -x - 5$ j) $y = 6x - 4$ k) $3x + \frac{7}{2}$ l) $-0{,}6x + 1{,}5$

6. Azul: $y = 2x + 3$. Vermelha: $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

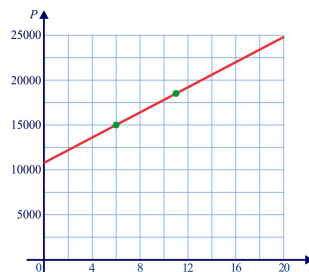
7. As retas são mostradas no gráfico abaixo. A relação entre o item e a cor da reta é:

a) Azul b) Verde c) Preta d) Vermelha e) Lilás f) Laranja

8. a) $x = -2$ b) $y = 8$ c) $x = 3$ d) $y = -4$

9. a) ... b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ c) $y = 1/2$ d) $x = 5/3$

10. a) $y = 1200 + 0{,}09x$ b) R$ 12.000,00 em roupas.

11. a) $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 5)$ ou $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ b) Meio metro c) 29 anos

12. a)

b) $y = 700x + 10800$
c) A inclinação da reta corresponde ao crescimento anual da população. O intercepto-y é o número de habitantes em 2000.
d) 24.800 habitantes.

13. a) $0{,}4x + 0{,}2y = 10$
b)

c) 12 kg
d) 25 kg

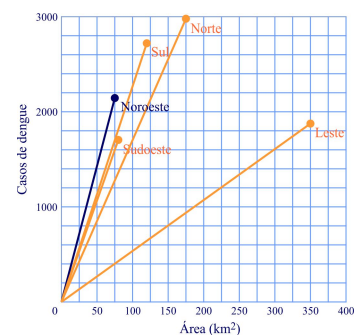
14. a)

b) $y = 13x + 900$
c) A inclinação da reta corresponde ao custo de produção por cadeira. O intercepto-y é o custo fixo de produção.
d) R$ 6100,00.

15. a) $y = 50000 - 24009x$ b) Após 20 anos.

16. a) $y = 28 - 2x$ b) R$ 6,50 c) 4 pulseiras

17. a) 140 kg b) $y = 140 - 0{,}85x$ c) 47 semanas

18. O primeiro distrito a receber a nebulização será o noroeste, como mostra o gráfico.

19. a) Crescerá mais rápido entre 2010 e 2020, e decrescerá mais rápido entre 2040 e 2050.
b) Haverá uma redução de 1,8% da população entre 2040 e 2050.
c) $P_1 = 40 + 1{,}2t$, supondo que t é o número de anos decorridos a partir de 2030.
d) $P_2 = 45 - 0{,}5t$
e) Aproximadamente em 2032.

20. Ademar: 32,75%; Juarez: 34,25%; Juscelino: 33%.

21. a) $r = -0{,}0125t + 0{,}8$ b) 64 dias

3.5 Funções

Nas seções anteriores desse capítulo, vimos como usar uma equação para relacionar duas grandezas. Por exemplo, quando o açougueiro nos informa que o quilograma de filé custa R$ 24,00, deduzimos que há uma relação entre o peso x da peça de carne que pretendemos comprar (cuja unidade é o quilograma) e o valor y a ser pago (que é dado em reais). Mais especificamente, essa relação é

$$y = 24x.$$

Logo, se quisermos levar 2,375 kg de carne, teremos que pagar a pequena fortuna de $24 \times 2{,}375 = 57$ reais. Por outro lado, se o filé pesar 1,800 kg, o valor a ser pago será igual a $24 \times 1{,}8 =$ R$ 43,20.

A equação acima descreve como o preço *depende* do peso da peça de carne. Nessa equação, a variável x da equação é denominada **variável independente**, enquanto y é a **variável dependente**, pois seu valor é obtido a partir de x.

O lado direito da equação, ou seja, o termo $24x$ é a regra que usamos para obter o preço a pagar a partir do peso da carne. A regra que nos permite obter o valor da variável dependente (y) a partir da variável independente (x) é chamada **função**. Logo, temos

$$y \quad = \quad \underbrace{24x}_{\text{função de } x}$$

> A partir de agora, em lugar de dizermos que a variável y está relacionada a x, passaremos a dizer que *y é função de x*.

Para que possamos nos referir a uma função que já foi definida, precisamos atribuir-lhe um nome. Por serem muito econômicos nas palavras, os matemáticos costumam usar uma letra para designar uma função. Sendo assim, no problema do açougue, diremos que f é a função que fornece o preço da carne em relação ao peso da peça.

Nada nos impede de atribuir um nome mais complexo à função do problema do açougue, tal como "PreçoDoFilé". Entretanto, é mais prático usar um nome curto, como f.

O valor resultante da aplicação de uma função f, definida com relação a uma variável x, é representado por $f(x)$. No caso do açougue, escrevemos

$$\underbrace{f(x)}_{\text{valor resultante}} \quad = \quad \underbrace{24x}_{\text{função de } x}$$

o que significa que, a regra (ou fórmula) que converte um peso de filé, x, em seu preço é $24x$.

Voltando, então, à nossa equação original, concluímos que $y = f(x)$, ou seja, a variável independente y (preço da carne) é o resultado da aplicação da função f à variável dependente x (peso da carne).

Atenção

Observe que

- f é o nome da função;
- $f(x)$ é o valor da função em x.

Vejamos, agora, qual o preço de algumas peças de filé com pesos variados:

1. O preço de uma peça de 3 kg é

$$f(3) = 24 \cdot 3 = 72 \text{ reais.}$$

2. Por uma peça de 1.75 kg, pagamos

$$f(1{,}75) = 24 \cdot 1{,}75 = 42 \text{ reais.}$$

Observe que podemos aplicar a função a uma variável a real, supondo que ela represente o peso do pedaço de carne que desejamos comprar.

3. Por uma peça de a kg, pagamos

$$f(a) = 24a \text{ reais.}$$

A expressão $f(3)$ pode ser lida como "*o valor de f em 3*", ou simplesmente como "*f de 3*". Dito de outra forma, $f(3)$ é o valor de y quando $x = 3$.

Exemplo 1. Outras funções

Uma função pode representar qualquer tipo de relação de dependência entre duas grandezas. Assim, por exemplo, dizemos que

- A área de um quadrado é função do comprimento do lado do quadrado.
- O custo de envio de uma carta é função do peso da carta.
- O custo de uma viagem de táxi é função da distância percorrida.
- A força gravitacional entre dois objetos é função da distância entre eles.
- A pressão exercida por um gás é função da temperatura.

Problema 2. Cálculo de uma função

Dada a função f definida pela fórmula

$$f(x) = 2x^2 + 1,$$

determine

a) $f(1)$ b) $f(0)$ c) $f(-1)$ d) $f(\sqrt{2})$ e) $f(-\sqrt{2})$ f) $f(w)$

Solução.

a) $f(1) = 2 \cdot (1)^2 + 1 = 3$

b) $f(0) = 2 \cdot (0)^2 + 1 = 1$

c) $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 3$

d) $f(\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 1 = 5$

e) $f(-\sqrt{2}) = 2 \cdot (-\sqrt{2})^2 + 1 = 5$

f) $f(w) = 2 \cdot (w)^2 + 1 = 2w^2 + 1$

Agora, tente o Exercício 1.

Problema 3. Corrida de táxi

Voltando ao problema do táxi apresentado no Capítulo 2, vamos supor que o preço a ser pago por uma viagem de táxi inclua uma bandeirada de R$ 3,44 e um custo de R$ 0,90 para cada quilômetro rodado.

a) Escreva uma função c que forneça o custo, em reais, de uma corrida de x quilômetros.

b) Determine o custo de uma viagem de 8,5 km, bem como custo o de uma viagem de 12 km.

Solução.

a) O custo da corrida inclui uma parcela fixa (que não depende de x) correspondente a R$ 3,44. Além disso, para percorrer x quilômetros, é preciso pagar $0{,}90x$ reais. Logo, a função custo é dada por

$$c(x) = 3{,}44 + 0{,}9x.$$

b) O custo de uma viagem de 8,5 km é igual a

$$c(8{,}5) = 3{,}44 + 0{,}9 \cdot 8{,}5 = 11{,}09 \text{ reais.}$$

Já uma viagem de 12 km sai por

$$c(12) = 3{,}44 + 0{,}9 \cdot 12 = 14{,}24 \text{ reais.}$$

Note que $c(0)$ corresponde à bandeirada, ou seja, ao valor pago pelo passageiro ao pegar o táxi, mesmo sem percorrer qualquer distância.

Agora, tente o Exercício 6.

■ Definição de função

Para o problema do açougue, fornecemos uma função de duas maneiras: através da equação

$$y = 24x$$

e através da fórmula (ou regra)

$$f(x) = 24x.$$

Entretanto, também podemos apresentar funções

a) **Graficamente,** como no eletrocardiograma da Figura 3.44. Embora nenhum eixo seja mostrado explicitamente nessa figura, a curva foi traçada supoondo-se a existência de um eixo-x, usado para representar o tempo, bem como de um eixo-y, que fornece o potencial elétrico entre dois pontos da superfície do corpo de uma pessoa. Assim, o gráfico mostra o potencial em função do tempo. Uma curva que fuja ao padrão estipulado pelos cardiologistas pode indicar que o paciente tem alguma cardiopatia.

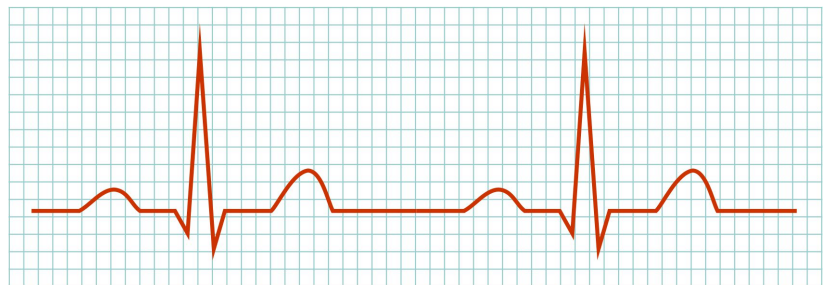



Figura 3.44: Um eletrocardiograma.

b) **Numericamente,** por meio de uma tabela que contenha uma lista de pares ordenados. Como exemplo, considere a Tabela 3.6, que fornece a alíquota do imposto de renda em função do rendimento mensal (em reais) de um contribuinte, em 2013.

Tabela 3.6: Alíquota do imposto de renda em função do rendimento mensal.

Rendimento mensal (R$)	**Alíq. (%)**
Até 1637,11	0
De 1637,12 a 2453,50	7,5
De 2453,51 a 3271,38	15
De 3271,39 a 4087,65	22,5
Mais que 4087,65	27,5

Em muitos casos práticos, é indispensável recorrer a gráficos ou tabelas para se apresentar uma função. Por exemplo, não seria prático descrever por meio de uma equação ou fórmula a função f fornecida pelo eletrocardiograma de um paciente. Entretanto, lendo o gráfico, somos capazes de calcular $f(5)$, ou $f(t)$ para um instante de tempo t qualquer. A função descrita pela Tabela 3.6 também não pode ser definida por meio de uma única equação, embora possa ser fornecida através de uma fórmula.

Mais um exemplo de função que não pode ser representada por meio de uma equação simples é a função trigonométrica **seno**, que é dada por

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots$$

Nesse caso, como a função é a soma de um número infinito de termos, a forma mais prática de se definir uma equação na qual y é igual ao seno de x consiste em escrever, simplesmente, $y = sen(x)$.

Vimos, portanto, que uma função pode ser representada por equações, fórmulas, gráficos, tabelas etc. Mas será que toda equação, curva ou tabela nas variáveis x e y define y como uma função de x?

Infelizmente, não. Tomando como exemplo a equação

$$y^2 - x = 0,$$

notamos que, com exceção de $x = 0$, é possível associar a cada valor de x dois valores de y. Assim, para $x = 4$, a variável y pode assumir tanto o valor 2 como −2. Já para $x = 9$, a variável y pode valer 3 ou −3. Essa duplicidade não é admissível para funções, conforme indicado no quadro a seguir.

Definição de função

Uma **função** f é uma relação que associa a cada elemento x de um conjunto D, chamado **domínio**, um *único* elemento $f(x)$ (ou y) de um conjunto C, denominado **contradomínio**.

À primeira vista, essa definição parece difícil de compreender, pois contém três ingredientes novos: uma *relação* – que é expressa pela função – e dois *conjuntos*, D e C. Vejamos se esses conceitos ficam mais claros se os ilustramos com o auxílio de um exemplo simples.

Exemplo 4. Área de um quadrado

Se você tem bons conhecimentos de geometria, certamente sabe que, em um quadrado, a área está relacionada ao comprimento do lado. Mais especificamente, uma vez conhecido o comprimento do lado, x, é possível calcular a área usando a função f descrita pela fórmula

Observe que cada valor de x está relacionado a um único valor de $f(x)$.

$$f(x) = x^2.$$

Nesse exemplo, o domínio D deve conter todos os comprimentos possíveis para o lado do quadrado. Como o lado de um quadrado não pode ser menor ou igual a zero, podemos definir D como o conjunto de todos os números reais positivos, ou seja,

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Por sua vez, o contradomínio é qualquer conjunto que contenha os possíveis valores da área. Como exemplo, podemos definir

Observe que, nesse caso, C contém valores negativos, apesar de a área de um quadrado ser sempre positiva.

$$C = \mathbb{R}.$$

É costume apresentar a relação definida por uma função por meio de um **diagrama de flechas**. Um diagrama associado ao Exemplo 4 é mostrado na Figura 3.45. Note que cada elemento x em D está associado a um elemento de C cujo valor é igual a x^2.

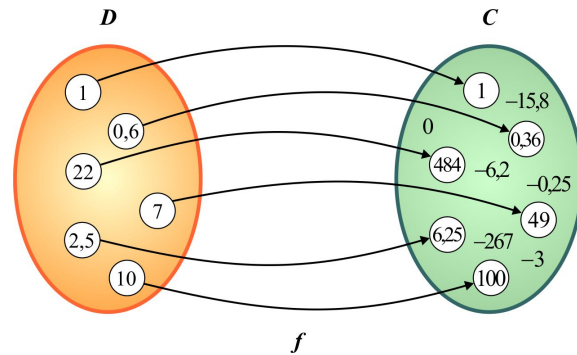



Figura 3.45: Diagrama de flechas da função que fornece a área de um quadrado.

Para que seja mais fácil compreender a definição de função (que foi apresentada acima de uma forma um tanto Hermética), resumimos em um quadro as suas principais características.

Características de uma função

Seja D o domínio e C o contradomínio de uma função f, que associa a $x \in D$ um valor $y \in C$. Nesse caso,

1. Todo elemento de D deve estar associado a um elemento de C (ou seja, f deve estar definida para todo elemento x do domínio D).

2. Nem todo elemento de C precisa estar associado a um elemento de D (como o zero e os valores negativos do conjunto C da Figura 3.45).

3. Um elemento de D não pode estar associado a dois elementos de C (ou seja, a função não pode fornecer dois valores de y para um único x).

4. Um elemento de C pode estar associado a mais de um elemento de D (ou seja, dois valores de x podem estar associados a um mesmo y).

Ao contrário da de número 3, a característica 4 permite que uma função associe o mesmo y a dois valores de x. Isso ocorre, por exemplo, quando um supermercado cria uma promoção "leve dois e pague um". Nesse caso, há um único preço y associado a duas quantidades x do mesmo produto.

A terceira característica do quadro acima é a condição, imposta anteriormente, de que o valor $f(x)$ seja único. Para entender porque não é permitido associar dois valores de y a um único x, basta voltar ao exemplo do açougue e imaginar o seguinte diálogo entre um freguês e o açougueiro:

— *Quanto custam 3 kg de filé?*

— *O preço pode ser R$ 72,00 ou R$ 85,00.*

Não faz sentido, não é verdade? Ao fornecer x – o peso de uma peça de carne – o freguês espera receber como resposta um único valor de $f(x)$ – o preço.

Vejamos alguns exemplos nos quais a terceira condição não é satisfeita.

Problema 5. Verificação da condição 3

Os dados da Tabela 3.7 permitem a definição de y como uma função de x?

Tabela 3.7: Dados do Problema 5.

x	y
0	1
1	0
1	2
2	−3
2	5

Solução.

Certamente, não. Observe que há dois valores de y associados a $x = 1$, o mesmo acontecendo com $x = 2$. Dessa forma, os dados apresentados na tabela violam a

terceira condição acima, segundo a qual um elemento do domínio não pode estar associado a dois elementos do contradomínio.

Problema 6. Verificação da condição 3

Verifique se a equação

$$y^2 + x^2 - 16 = 0$$

permite a definição de y como uma função de x.

Solução.

Isolando a variável y nessa equação, obtemos

$$y^2 + x^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 16 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{16 - x^2}.$$

O sinal $\pm$ indica que, para cada valor de x (exceto $x = 4$), há dois valores de y:

$$\sqrt{16 - x^2} \quad \text{e} \quad -\sqrt{16 - x^2}.$$

Assim, por exemplo, se $x = 2$, temos $y = \sqrt{12}$ e $y = -\sqrt{12}$. Nesse caso, a equação não permite a definição de y como uma função de x.

Agora, tente o Exercício 2.

Domínio e imagem

Vimos que o domínio de uma função é o conjunto de todos os valores que a variável independente pode assumir. No Problema 3, por exemplo, a variável x fornece a distância percorrida por um táxi, que pode corresponder a qualquer valor real maior ou igual a zero (supondo que o táxi possa reabastecer). Dessa forma, é adequado definir

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Já no Problema 2, a função foi descrita apenas pela fórmula $f(x) = 2x^2 + 1$. Nesse caso, como não é possível especificar um conjunto ou intervalo no qual f tenha sentido prático, o domínio é dado *implicitamente* pela definição de f. Em outras palavras, o domínio é o conjunto de todos os valores de x para os quais f está definida. Como a expressão $2x^2 + 1$ pode ser calculada para todo x real, escrevemos

$$D = \mathbb{R}.$$

Problema 7. Descobrindo o domínio

Determine o domínio da função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Solução.

O domínio é o conjunto de todos os valores de x para os quais $\frac{1}{x^2-1}$ está definida. Como a única exigência para que isso ocorra é que o denominador dessa expressão não seja zero, temos

Lembre-se de que podemos trabalhar com o símbolo "$\neq$" da mesma forma com que trabalhamos com "$=$".

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 1.$$

Logo, o domínio de f é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \ \text{ e } \ x \neq 1\}.$$

Agora, tente o Exercício 3.

Segundo a definição de função, o contradomínio C de uma função f pode ser qualquer conjunto que contenha, dentre outros elementos, os valores de $f(x)$. Como essa exigência é branda, C pode ser demasiadamente amplo. Sendo assim, é costume trabalhar com o conjunto que contém apenas os valores gerados por f, ao qual damos o nome de **conjunto imagem**.

Conjunto imagem

Dada uma função f, com domínio D, denominamos **conjunto imagem** (ou simplesmente Im) o conjunto de todos os valores $f(x)$ obtidos a partir de $x \in D$.

Tomemos como exemplo o problema da corrida de táxi, no qual temos $c(x) = 3{,}44 + 0{,}9x$. Nesse caso, como o domínio foi definidor por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, o valor a ser pago pelo passageiro poderá assumir qualquer valor real maior ou igual a 3,44 (o valor da bandeirada), de modo que

$$Im = \{c \in \mathbb{R} \mid c \geq 3{,}44\}.$$

Problema 8. Domínio e conjunto imagem

Para cada uma das funções abaixo, determine o domínio e o conjunto imagem.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Solução.

a) A expressão $2x^2 + 1$ pode ser calculada para qualquer x real. Desse modo,

$$D = \mathbb{R}.$$

Por outro lado, como $x^2 \geq 0$ para todo x real, concluímos que $2x^2 + 1 \geq 1$. Assim,

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}.$$

b) Para que a expressão $\sqrt{x-1}$ possa ser calculada, é preciso que

$$x - 1 \geq 0,$$

o que ocorre quando $x \geq 1$. Logo,

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}.$$

Para determinar o conjunto imagem dessa função, basta notar que a raiz quadrada não produz resultados negativos, donde

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

Agora que já analisamos alguns aspectos algébricos das funções, vejamos como representá-las geometricamente.

■ Gráficos de funções

O **gráfico** de f é o conjunto de pares ordenados

$$(x, f(x)),$$

tal que x pertence ao domínio de f.

Como sabemos traçar gráficos de equações, é mais fácil interpretar o gráfico de f como o conjunto dos pares (x,y) que satisfazem a equação

$$y = f(x),$$

desde que f esteja definida para x.

Exemplo 9. Traçado do gráfico de uma função

Para traçar o gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 1,$$

montamos a Tabela 3.8, que contém alguns pares ordenados na forma (x, y), com $y = f(x)$. Em seguida, marcamos esses pontos no plano Cartesiano e traçamos uma curva suave, como mostra a Figura 3.46.

Atenção
Ao traçarmos o gráfico de uma função f no plano Cartesiano, mostramos os valores de $f(x)$ no eixo vertical (ou eixo-y), destinando o eixo horizontal à variável x. Devemos tomar o cuidado de não trocar os eixos.

Tabela 3.8

x	$f(x)$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8

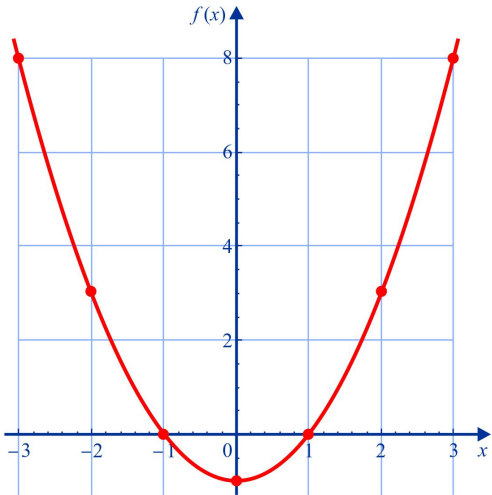



Figura 3.46: Gráfico de $f(x) = x^2 - 1$.

Exemplo 10. Traçado do gráfico de uma função

Agora, vamos traçar o gráfico de

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Como o domínio dessa função é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, montamos a Tabela 3.9, que não contém valores negativos de x. Marcando, então, os pontos da tabela no plano Cartesiano e traçando uma curva, obtemos o gráfico da Figura 3.47.

Tabela 3.9

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2

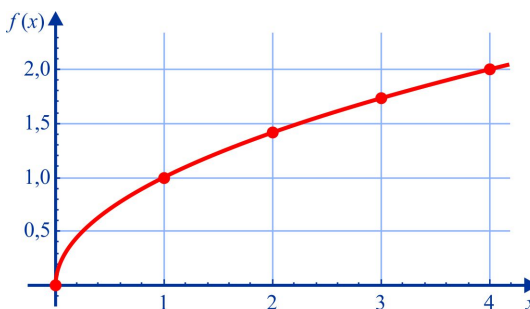



Figura 3.47: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

Agora, tente o Exercício 5.

Já vimos que nem toda equação que envolve as variáveis x e y define y como função de x, pois há casos em que a equação associa dois valores de y a um único valor de x, o que não é permitido para funções.

Argumento semelhante pode ser usado para mostrar que nem toda curva no plano está associada a uma função, uma vez que só é possível haver um valor $f(x)$ associado a cada x pertencente ao domínio de uma função f, o que nem sempre ocorre com curvas no plano. Para determinar se uma curva é ou não a representação geométrica de uma função, usamos o teste abaixo.

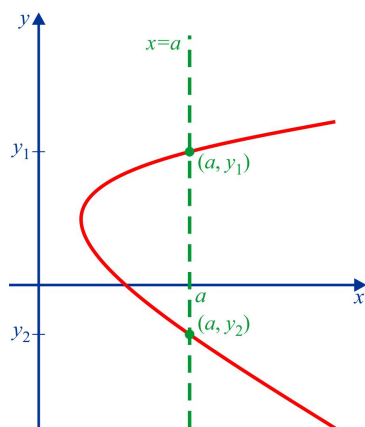



Figura 3.48: Curva que não satisfaz o teste da reta vertical.

Teste da reta vertical

Um gráfico no plano Cartesiano representa uma função se, e somente se, nenhuma reta vertical o intercepta mais de uma vez.

A Figura 3.48 mostra uma curva que é interceptada duas vezes pela reta vertical verde. Nesse caso, como há dois valores de y (ou seja, y_1 e y_2) associados a $x = a$, a curva não é o gráfico de uma função.

Problema 11. Teste da reta vertical

Usando o teste da reta vertical, verifique quais gráficos da Figura 3.49 representam funções.

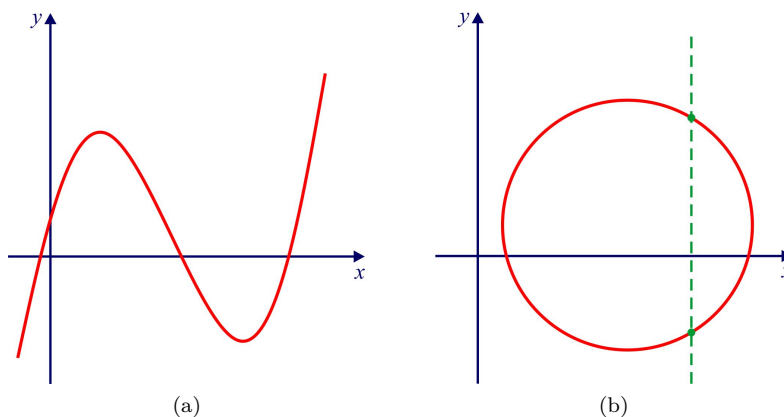



Figura 3.49: Gráficos do Problema 11

Solução.

a) Como se observa, não é possível traçar uma reta vertical que corte mais de uma vez a curva da Figura 3.49a. Logo, trata-se do gráfico de uma função.

b) A reta verde mostrada na Figura 3.49b corta a curva em dois pontos, de modo que não se trata do gráfico de uma função.

Note que não é possível representar uma circunferência usando apenas uma função.

Problema 12. Teste da reta vertical

Usando o teste da reta vertical, verifique quais gráficos da Figura 3.50 representam funções.

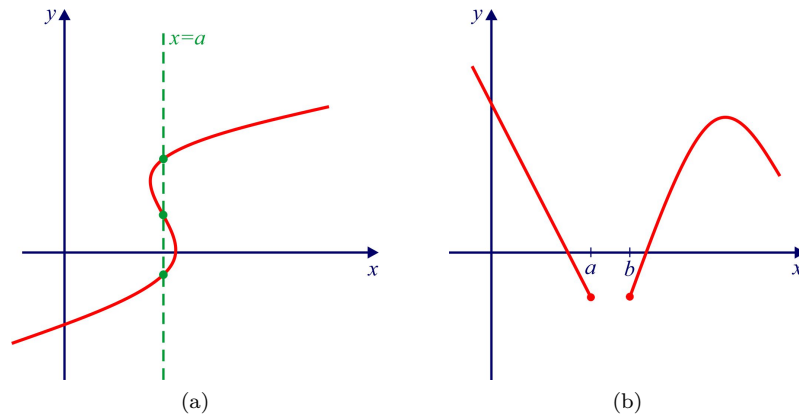



Figura 3.50: Gráficos do Problema 12

Solução.

a) Na Figura 3.50a, a reta vertical verde corta o gráfico em três pontos. Logo, o gráfico não representa uma função.

b) O gráfico da Figura 3.50b representa uma função, já que não há reta vertical que o corte em mais de um ponto. Além disso, notamos que a função não está definida para $x \in (a,b)$.

Agora, tente o Exercício 4.

Exercícios 3.5

1. Calcule as funções nos pontos indicados.

a) $f(x) = -2(x+1)$
$f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(a)$, $f(-a)$

b) $g(y) = 3(y-2)^2$
$g(-2)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$

c) $h(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$
$h(0)$, $h(-2)$, $h(1/2)$, $h(a)$, $h(a-1)$

d) $f(w) = w - \frac{2}{w}$
$f(-1)$, $f(1/2)$, $f(x)$, $f(1/x)$, $f(2z)$

e) $f(y) = \frac{1}{y^2}$
$f(-1)$, $f(3)$, $f(1/5)$, $f(2x)$, $f(1/x^2)$

f) $f(y) = \sqrt{y-5} + 5$
$f(5)$, $f(9)$, $f(45/4)$, $f(x+5)$

g) $f(y) = \frac{1}{1+\sqrt{y}}$
$f(0)$, $f(4)$, $f(1/4)$, $f(9x)$, $f(x-1)$

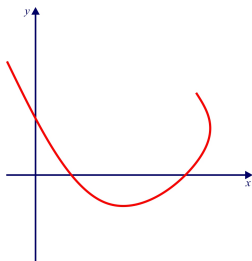
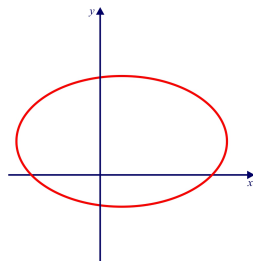
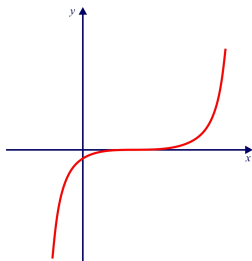
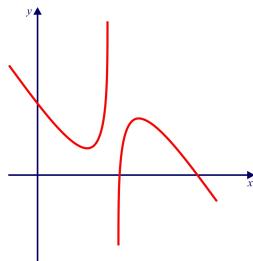
h) $f(y) = \frac{|4-y|}{y}$
$f(-1)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(x+2)$, $f(4-x)$

2. Verifique algebricamente se as equações abaixo permitem a definição de y como uma função de x.

a) $12 - 2y = 0$
b) $x^2 - y + 9 = 0$
c) $x - y^2 + 4 = 0$
d) $\sqrt{x-2} + y = 3$
e) $(x-3)^2 + y = x^2$
f) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
g) $y - 2 = 0$
h) $y^3 - x = 0$
i) $|2x-3| + y = 0$
j) $|y| = x + 5$

3. Determine o domínio das funções.

a) $f(x) = 3x + 2$
b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
c) $f(x) = \frac{1}{2x+5}$
d) $g(x) = \sqrt{x+9}$
e) $f(x) = \sqrt{5-2x}$
f) $f(x) = \sqrt{4x-3}$
g) $p(x) = \sqrt[3]{x-2}$
h) $f(x) = \frac{5x}{5x-13}$
i) $g(x) = \frac{3x+1}{4x+6}$
j) $h(x) = \frac{1}{2x-1}$
k) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x+1}$
l) $f(x) = \frac{\sqrt{1-5x}}{x^2+4}$
m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
n) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x-7}}$
o) $f(x) = \frac{1}{|x|-6}$
p) $f(x) = \frac{1}{|x-4|+2}$
q) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
r) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

4. Usando o teste da reta vertical, indique quais gráficos representam funções.

a)
c)
b)
d)
5. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo com base em uma tabela de valores da função em pontos que você escolheu.

a) $f(x) = 5$
b) $f(x) = 2x + 1$
c) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$
d) $f(x) = 2\sqrt{x}$

6. Na superfície do oceano, a pressão da água é a mesma do ar, ou seja, 1 atm. Abaixo da superfíce da água, a pressão aumenta 1 atm a cada 10 m de aumento na profundidade.

a) Escreva uma função $P(x)$ que forneça a pressão (em atm) com relação à profundidade (em m), Considere que $x = 0$ m na superfície da água do mar.
b) Determine a pressão a 75 m de profundidade.

7. Um instalador de aparelhos de ar condicionado cobra R$ 50,00 pela visita, além de R$ 75,00 por hora de serviço (sem incluir o custo do material por ele utilizado).

a) Escreva uma função $C(t)$ que forneça o custo de instalação de um aparelho de ar condicionado, em relação ao tempo gasto pelo instalador, em horas.
b) Se a instalação de um aparelho consumir 3,5 horas, qual será o custo da mão de obra?

8. Uma piscina tinha 216.000 litros de água quando foram abertos todos os seus drenos. Desde então, a água tem escoado da piscina a uma taxa de 200 litros por minuto.

a) Escreva a função $V(t)$ que fornece o volume de água da piscina depois de transcorridos t minutos do início da drenagem.
b) Determine o tempo necessário para esvaziar completamente a piscina.

9. Um *notebook* custa R$ 2.900,00 e perde 12% de seu valor inicial a cada ano de uso.

a) Escreva a função $V(t)$ que fornece o valor do *notebook* após t anos de uso.
b) Determine após quantos anos de uso o valor do *notebook* chega a R$ 800,00, momento em que é conveniente trocá-lo.

10. Calcule
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
para as funções e os valores de a fornecidos abaixo. Simplifique os resultados e suponha sempre que os denominadores são diferentes de zero.

a) $f(x) = 3x + 4$, $a = 2$
b) $f(x) = x^2 + 6$, $a = 4$

11. Calcule
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
para as funções e os valores de a fornecidos abaixo. Simplifique os resultados e suponha sempre que os denominadores são diferentes de zero.

a) $f(x) = 2x - 5$, $a = 6$
b) $f(x) = x^2 - 3x$, $a = 1$

12. Define-se como ponto fixo de uma função f o número real x tal que $f(x) = x$. Seja dada a função
$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + 1.$$

a) Calcule os pontos fixos de $f(x)$.
b) Trace o gráfico da função f e o gráfico de $g(x) = x$, indicando os pontos calculados no item (a).

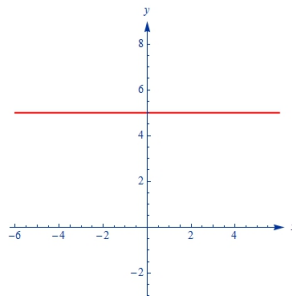
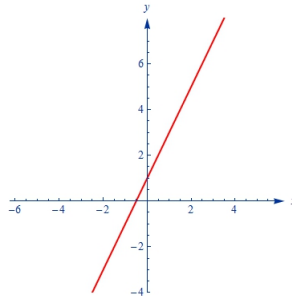
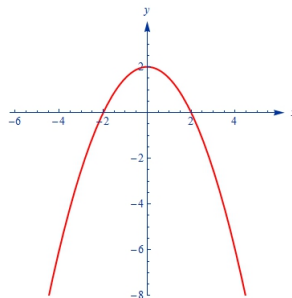
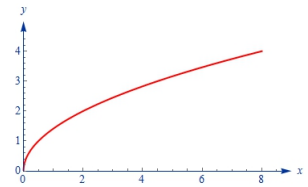
Respostas dos Exercícios 3.5

1.
a) $2;\ 0;\ -2;\ -4;\ -2-a;\ -2+a$
b) $48;\ 27;\ 12;\ 3;\ 0$
c) $-1;\ -\frac{1}{3};\ -2;\ \frac{1+a}{a^2-1};\ \frac{1}{a-2}$
d) $1;\ -\frac{7}{2};\ x-\frac{2}{x};\ -2x+\frac{1}{x};\ 2z-\frac{1}{z}$
e) $1;\ \frac{1}{9};\ 25;\ \frac{1}{4x^2};\ x^4$
f) $5;\ 7;\ \frac{15}{2};\ 5+\sqrt{x}$
g) $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{1+3\sqrt{x}};\ \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}$
h) $-5;\ \frac{1}{3};\ 0;\ \frac{|2-x|}{2+x};\ \frac{|x|}{4-x}$

2.
a) Sim
b) Sim
c) Não
d) Sim
e) Sim
f) Não
g) Sim
h) Sim
i) Sim
j) Não

3.
a) $\mathbb{R}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5/2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -9\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5/2\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3/4\}$
g) $\mathbb{R}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 13/5\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3/2\}$
j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1/2\}$
k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3,\ x \neq -1\}$
l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1/5\}$
m) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ x \neq 9\}$
n) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7/2\}$
o) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -6 \text{ e } x \neq 6\}$
p) $\mathbb{R}$
q) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
r) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

4.
a) Não representa função
b) Representa função
c) Não representa função
d) Representa função

5.
a)

b)

c)

d)

6.
a) $P(x) = 1 + x/10$ (considerando que a profundidade é um número positivo)
b) 8,5 atm

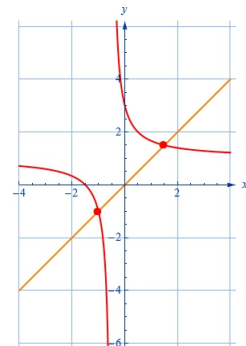
7.
a) $C(t) = 50 + 75t$
b) R$ 312,50

8.
a) $V(t) = 216000 - 200t$
b) 18 horas

9.
a) $V(t) = 2900 - 348t$
b) Após cerca de 6 anos de uso

10.
a) 3
b) $x + 4$

11.
a) $\frac{12}{h}$
b) $\frac{2(h-1)}{h}$

12.
a) $x_1 = -1$ e $x_2 = 3/2$
b)

3.6 Obtenção de informações a partir do gráfico

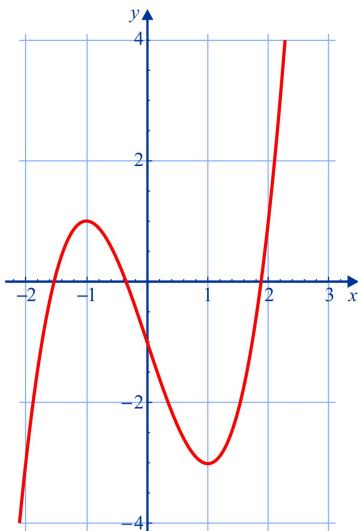



Figura 3.51: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

A análise de um gráfico nos permite obter muitas informações acerca da função a ele associada. Como veremos a seguir, essas informações incluem desde o valor da função em pontos específicos até a presença de mínimos e máximos.

■ Valor da função

O propósito mais óbvio de um gráfico é fornecer valores aproximados da função para os pontos do intervalo no qual ela foi retratada. O problema abaixo ilustra como podemos usar um gráfico para extrair esses valores.

Problema 1. Valores de uma função

O gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x - 1$ é mostrado na Figura 3.51. A partir do gráfico, determine

a) os valores de $f(0)$ e $f(-1)$;

b) os valores de x para os quais $f(x) = -3$;

c) os valores de x para os quais $f(x) \geq 1$;

d) os valores de x em que $-3 \le f(x) \le 1$.

Solução.

a) Observando a Figura 3.52a, concluímos que

$$f(0) = -1 \qquad \text{e} \qquad f(-1) = 1.$$

b) Os valores de x em que $f(x) = -3$ são aqueles correspondentes aos pontos que estão, ao mesmo tempo, sobre o gráfico de f e sobre a reta $y = -3$. Segundo a Figura 3.52b, isso ocorre quando

$$x = -2 \qquad \text{ou} \qquad x = 1.$$

c) Os valores de x para os quais $f(x) \ge 1$ são aqueles nos quais a curva cruza a reta $y = 1$ou está acima desta. Isso ocorre para os pontos marcados em verde na curva da Figura 3.52c, ou seja, para

$$x = -1 \qquad \text{ou} \qquad x \ge 2.$$

d) A Figura 3.52d mostra que $-3 \le f(x) \le 1$ para

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 2\}.$$

(a) $f(0)$ e $f(2)$ (b) $f(x) = -3$ (c) $f(x) \ge 1$ (d) $-3 \le f(x) \le 1$

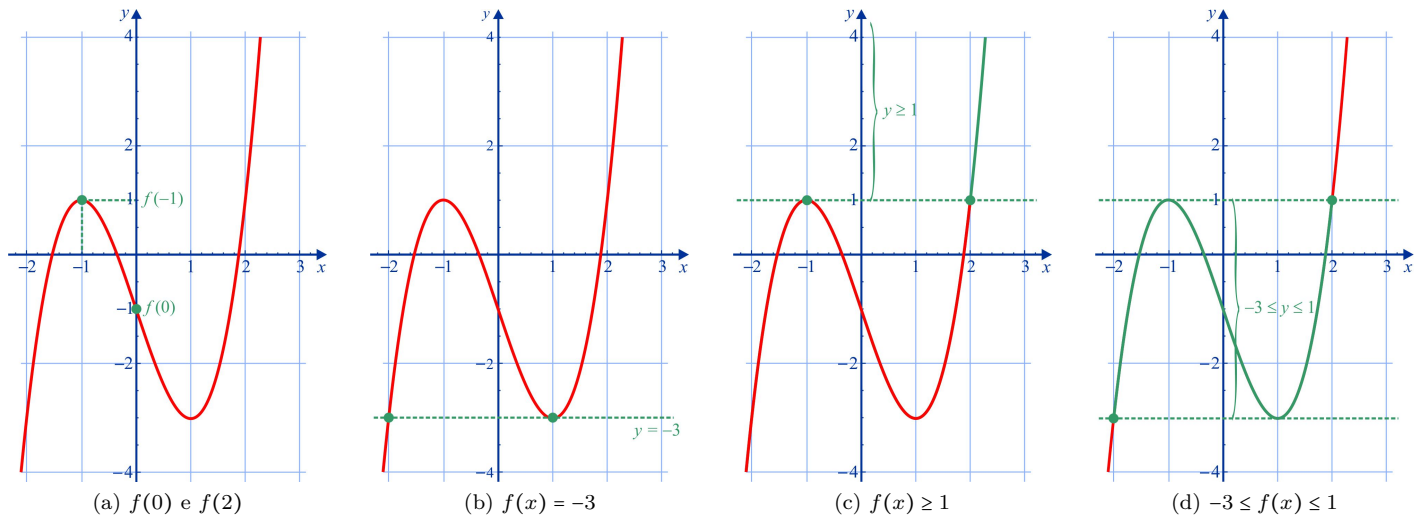



Figura 3.52: Gráficos do Problema 1.

■ Domínio e conjunto imagem

O domínio e o conjunto imagem de uma função também podem ser facilmente determinados a partir de seu gráfico:

> **O domínio** é o conjunto de valores sobre o eixo-x para os quais a função está definida.
>
> **O conjunto imagem** é o conjunto de valores do eixo-y associados a pontos do gráfico.

Problema 2. Domínio e conjunto imagem

Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ a partir de seu gráfico.

Solução.

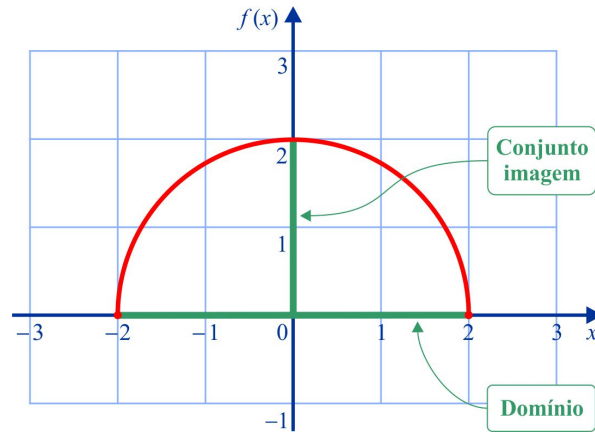



Figura 3.53: Gráfico de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

O gráfico da função é a curva vermelha mostrada na Figura 3.53. Observe que f não está definida para $x < -2$ e $x > 2$ pois, nesse casos, o termo dentro da raiz é negativo. Logo o domínio de f é o intervalo verde indicado no eixo-x, ou seja,

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 2\}.$$

O conjunto imagem de f é o conjunto de valores sobre o eixo-y relacionados a pontos da curva. Esse conjunto também está indicado em verde, e corresponde a

$$Im = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\}.$$

Problema 3. Domínio e conjunto imagem

Determine o domínio e o conjunto imagem das funções cujos gráficos são dados na Figura 3.54.

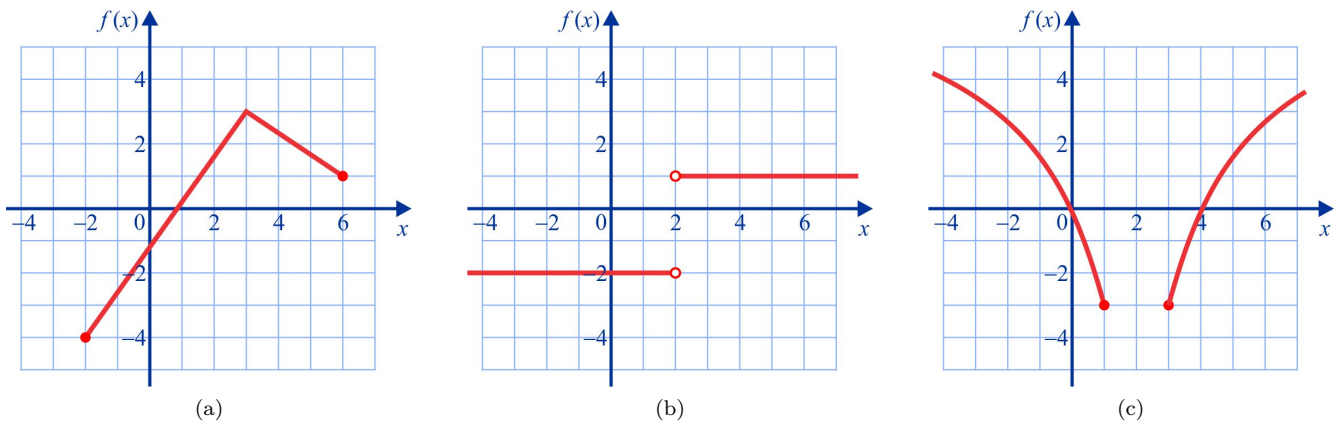



Figura 3.54: Gráficos do Problema 3.

Solução.

a) A função f representada na Figura 3.54a está definida apenas para $x \in [-2{,}6]$. Além disso, os valores de $f(x)$ variam de -4 a 3. Logo,

$$D = [-2, 6] \qquad \text{e} \qquad Im = [-4, 3].$$

b) Observando a Figura 3.54b, notamos que a função f não está definida em $x = 2$, já que as duas retas vermelhas possuem bolas abertas para esse valor de x. Por outro lado, as linhas mostradas na figura excedem as laterais da área quadriculada, indicando que f também está definida para $x < -4$ e para $x > 7$. Desse modo, podemos supor que a função f esteja definida para todo $x \in \mathbb{R}$, com exceção de $x = 2$, donde

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}.$$

Observando, agora, o eixo-y, notamos que $f(x)$ só pode valer -2 e 1, de modo que

$$Im = \{-2,\ 1\}.$$

c) Embora a Figura 3.54c inclua apenas uma parte do eixo-x, o gráfico sugere que a função está definida para $x < -4$ e para $x > 7$. Assim, temos

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\}.$$

De forma análoga, apesar de não conhecermos o valor da função em todos os pontos do domínio, a figura nos permite supor que

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -3\}.$$

■ Zeros da função

Os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 0$ são chamados **zeros** de f. Esses valores correspondem aos interceptos-x do gráfico da função.

Problema 4. Zeros de funções

Determinar graficamente os zeros de

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3 - x^2 + 2x.$$

Solução.

A Figura 3.55 mostra os gráficos das duas funções. Na figura da esquerda, observamos que o zero de $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ é $x = -2$ (a coordenada x do ponto verde indicado no gráfico). O mesmo valor poderia ter sido obtido algebricamente, resolvendo-se a equação $\frac{x}{2} + 1 = 0$:

$$\frac{x}{2} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{2} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2.$$

Segundo a Figura 3.55b, os zeros de $g(x) = 3 - x^2 + 2x$ são $x = -1$ e $x = 3$. Naturalmente, esses interceptos-x também podem ser obtidos algebricamente, bastando para isso que resolvamos a equação $3 - x^2 + 2x = 0$.

(a) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ (b) $g(x) = 3 - x^2 + 2x$

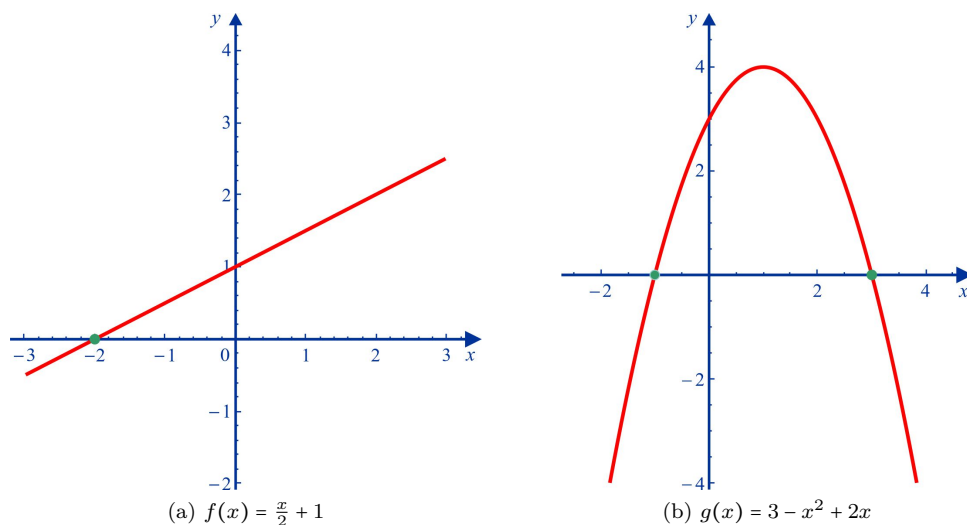



Figura 3.55: Gráficos do Problema 4.

Intervalos de crescimento e decrescimento

Nem sempre é suficiente conhecer o valor de uma função em alguns pontos. Muitas vezes, é importante saber se a função vai aumentar ou diminuir a partir de certo valor de x. Dito de outra forma, é importante conhecer os intervalos nos quais uma função é crescente e os intervalos nos quais ela é decrescente.

As figuras 3.56 e 3.57 mostram intervalos nos quais f é, respectivamente, crescente e decrescente. Como se observa, f é crescente se a cuva sobe ao movermos da esquerda para a direita sobre o eixo-x. De modo análogo, f é decrescente se, ao movermos da esquerda para a direita sobre o eixo-x, o gráfico de f desce.

Figura 3.56: f crescente.

Figura 3.57: f decrescente.

Intervalos de crescimento e decrescimento

Seja f uma função definida em um intervalo D. Dizemos que

1. f é **crescente** em D se, dados quaisquer x_1 e x_2 em D, tais que $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;
2. f é **decrescente** em D se, dados quaisquer x_1 e x_2 em D, tais que $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;
3. f é **constante** em D se, dados quaisquer x_1 e x_2 em D, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$;

Exemplo 5. Intervalos de crescimento e decrescimento

Considerando a função f cujo gráfico é mostrado na Figura 3.58, podemos dizer que

- f é crescente no intervalo (a,b), bem como em (d,e).
- f é decrescente nos intervalo (b,c) e (e,g).
- f é constante em $[c,d]$.

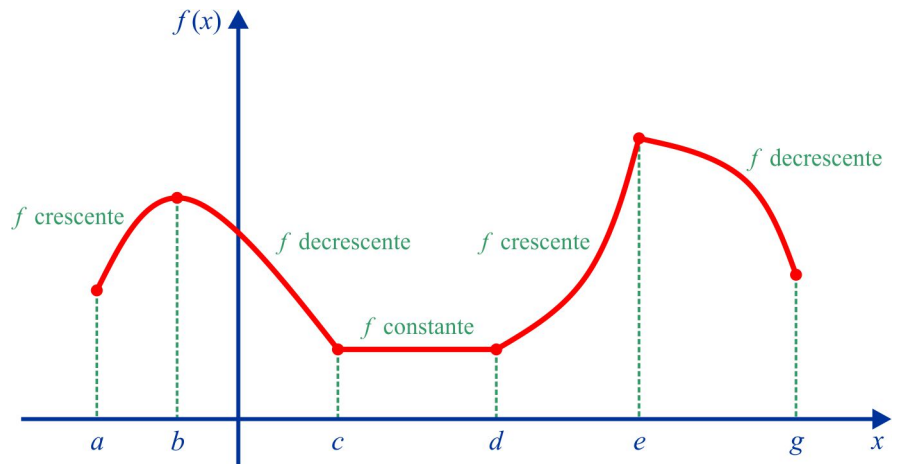
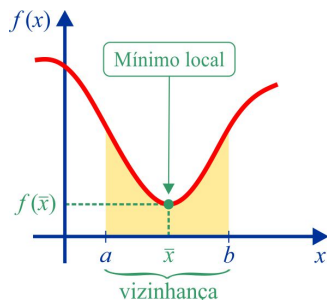



Figura 3.58: Função do Exemplo 5.

A determinação algébrica dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função é um assunto abordado no curso de Cálculo.

■ Máximos e mínimos

Assim como é importante saber em que intervalos uma função aumenta ou diminui, também é relevante conhecer seu valor máximo ou mínimo. Vejamos como caracterizar esses **pontos extremos**.

Máximos e mínimos locais

1. O valor $f(\bar{x})$ é um **máximo local** – ou **máximo relativo** – de f se existe um intervalo (a,b), contendo $\bar{x}$, tal que

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \qquad \text{para todo } x \in (a,b).$$

O valor $\bar{x}$ é chamado **ponto de máximo local**.

2. O valor $f(\bar{x})$ é um **mínimo local** – ou **mínimo relativo** – de f se existe um intervalo (a,b), contendo $\bar{x}$, tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \text{para todo } x \in (a,b).$$

O valor $\bar{x}$ é chamado **ponto de mínimo local**.

Figura 3.59: Máximo local.

Figura 3.60: Mínimo local.

Quando nos referimos aos máximos e mínimos, usamos o adjetivos *local* e *relativo* para deixar claro que a análise diz respeito apenas a uma vizinhança de $\bar{x}$. A Figura 3.59 ilustra a situação, mostrando que, na vizinhança (a,b) definida em torno do ponto $\bar{x}$, o maior valor que a função f assume é $f(\bar{x})$, que por isso mesmo, é denominado máximo local. Por sua vez, a Figura 3.60 mostra uma vizinhança (a,b) em torno de $\bar{x}$, na qual o menor valor de f é justamente $f(\bar{x})$, o mínimo local.

Nada impede que a função assuma um valor maior que um máximo local, desde que isso não ocorra nas proximidades de $\bar{x}$. Dessa forma, uma função pode ter vários máximos e mínimos relativos, como mostra a Figura 3.61, na qual a, c e e são pontos de máximo local, enquanto b, d e g são pontos de mínimo local.

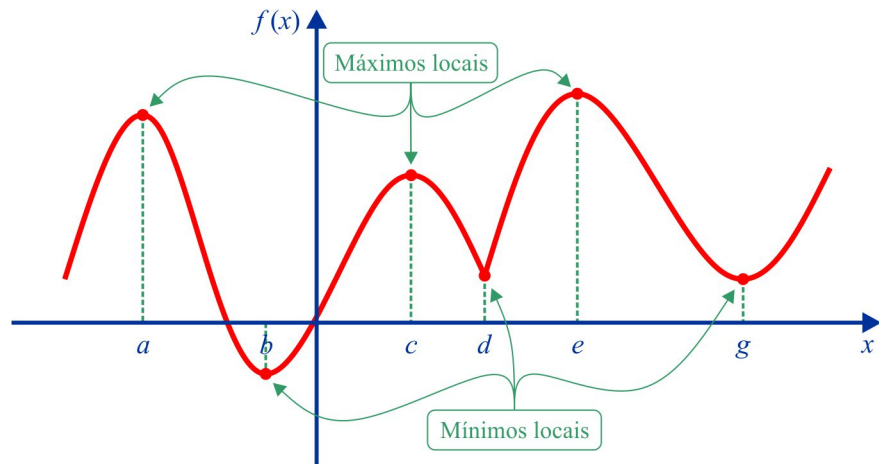



Figura 3.61: Função com vários pontos extremos.

Pontos de máximo e de mínimo local têm grande aplicação prática. Se uma função está associada, por exemplo, a um gasto (de dinheiro, energia, matérias-primas, trabalho etc), o ponto de mínimo será aquele que proporciona a maior economia possível. Por outro lado, para funções que envolvem o aproveitamento de recursos disponíveis, é comum calcular o ponto de máximo, como mostra o exemplo a seguir.

Problema 6. Cercando um pasto

Um fazendeiro pretende usar 400 m de cerca para delimitar uma área retangular que servirá de pasto. Responda aos itens abaixo, lembrando que a área de um terreno retangular com largura l e profundidade p é dada por $l \cdot p$, e que o perímetro desse terreno retangular é igual a $2l + 2p$.

a) Relacione a profundidade à largura do pasto, considerando o uso dos 400 m de cerca.

b) Escreva uma função que forneça a área cercada em relação à largura do pasto.

c) Calcule a área de pasto, supondo que sua largura é igual a 75 m. Faça o mesmo para uma largura de 150 m.

d) Determine o domínio da função que você obteve.

e) Esboce o gráfico da função.

f) Indique em quais intervalos a função é crescente e em quais ela é decrescente.

g) Com base no gráfico, indique se é possível cercar uma área de 12.000 m^2.

h) Ainda com base no gráfico, determine a maior área que pode ser cercada e as dimensões do terreno nesse caso.

Solução.

a) Usando toda a cerca disponível, o perímetro do pasto corresponderá a 400 m, donde

$$2l + 2p = 400 \qquad \Rightarrow \qquad 2p = 400 - 2l \qquad \Rightarrow \qquad p = 200 - l.$$

b) A área do pasto é o produto da largura (l) pela profundidade (p). Agora que sabemos que $p = 200 - l$, temos

$$A(l) = l \cdot (200 - l) = 200l - l^2.$$

Observe que um pasto com 75 m de largura teria uma profundidade de 115 m. Já a uma largura de 150 m corresponderia uma profundidade de 50 m.

c) Usando a função acima, obtemos

$$A(75) = 200 \cdot 75 - 75^2 = 9375 \qquad \text{e} \qquad A(150) = 200 \cdot 150 - 150^2 = 7500.$$

Logo, um pasto de 75 m de largura teria 9.375 m^2 de área. Já a área de um pasto com 150 m de largura seria igual a 7.500 m^2.

Como $A(l)$ está definida para todo l real, poderíamos ter escolhido $D = \mathbb{R}$. Entretanto, embora matematicamente correta, essa escolha não teria aplicação prática.

d) Como um terreno não pode ter profundidade negativa, devemos considerar $p \geq 0$. Por outro lado, para que a largura nunca seja menor que zero, é preciso que $200 - p \geq 0$, o que equivale a exigir que $p \leq 200$. Assim, podemos considerar

$$D = \{l \in \mathbb{R} \mid 0 \leq l \leq 200\}.$$

e) O gráfico da função é dado na Figura 3.62.

f) Como se observa na Figura 3.62, a função é crescente no intervalo $(0{,}100)$ e é decrescente em $(100{,}200)$.

Figura 3.62: Gráfico de $A(l)$.

g) Não é possível cercar uma área de 12.000 m^2, pois 12.000 não pertence à imagem do gráfico.

h) Da Figura 3.62, concluímos que a função assume seu valor máximo em $p = 100$, que é o único ponto de máximo local do domínio. A largura correspondente a esse valor de p é dada por

$$l = 200 - p = 200 - 100 = 100 \text{ m}.$$

Por sua vez, a área máxima é

$$A(100) = 200 \cdot 100 - 100^2 = 10.000 \text{ m}^2.$$

■ Simetria

Os gráficos de algumas funções possuem uma característica geométrica bastante importante, chamada *simetria*. O gráfico de $f(x) = x^2$, por exemplo, é simétrico com relação ao eixo-y, o que significa que a parte da curva que está à esquerda do eixo é uma imagem refletida da porção que está à direita dele, conforme mostra a Figura 3.63a. Do ponto de vista algébrico, essa simetria é caracterizada pelo fato de que

$$f(x) = f(-x).$$

Uma função cujo gráfico é simétrico com relação ao eixo-y é denominada **par**.

Outro simetria comum é a que ocorre com relação à origem, como se observa na Figura 3.63b. Nesse caso de simetria, a curva não se altera quando viramos o livro de cabeça para baixo, o que, algebricamente corresponde a dizer que

$$f(x) = -f(-x).$$

Uma função com essa propriedade é chamada **ímpar**. O quadro a seguir resume as características principais das funções pares e ímpares.

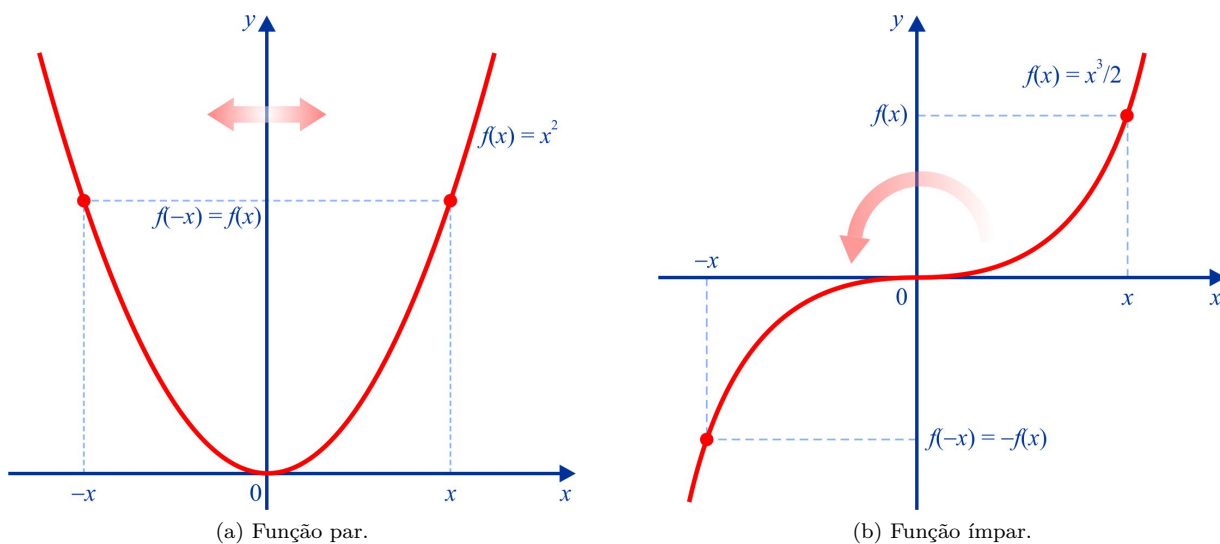
(a) Função par.

(b) Função ímpar.

Figura 3.63: Função par e função ímpar.

Funções pares e ímpares

1. Uma função f é **par** se seu gráfico é simétrico com relação ao eixo-y, isto é, se

$$f(-x) = f(x)$$

para todo x no domínio de f.

2. Uma função f é **ímpar** se seu gráfico é simétrico com relação à origem, isto é, se

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo x no domínio de f.

Problema 7. Teste de simetria

Verifique quais funções abaixo são pares e quais são ímpares.

a) $f(x) = x^3 - 16x$ b) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 10$ c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 16(-x) \\ &= -x^3 + 16x \\ &= -(x^3 - 16x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Como $f(-x) = -f(x)$, a função é ímpar.

b)

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 12(-x)^2 + 10 \\ &= x^4 - 12x^2 + 10 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Nesse caso, $f(-x) = f(x)$, de modo que a função é par.

c)

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 2(-x)^2 + 1 \\ &= -x^3 - 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

Como $f(x)$ não é igual a $-f(x)$ ou a $f(-x)$, a função não é par nem ímpar.

Agora, tente o Exercício 19.

Alem de possuir aplicações algébricas, a simetria é muito útil para o traçado do gráfico de funções, como mostra o problema abaixo.

Problema 8. Gráficos de funções simétricas

Esboce os gráficos das funções abaixo.

a) $f(x) = x^3 - 16x$

b) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 10$

Solução.

a) Como vimos no Problema 7, a função $f(x) = x^3 - 16x$ é ímpar, de modo que podemos esboçar seu gráfico conhecendo apenas a parte relativa a $x \geq 0$. Montando, então, a Tabela 3.10, marcamos os pontos em vermelho na Figura 3.64. Em seguida, traçamos uma curva suave que liga esses pontos, e refletimos o gráfico em torno da origem, para obter a parte da curva que está à esquerda do eixo-y.

Tabela 3.10

x	$f(x)$
0	0
1	-15
2	-24
3	-21
4	0
5	45

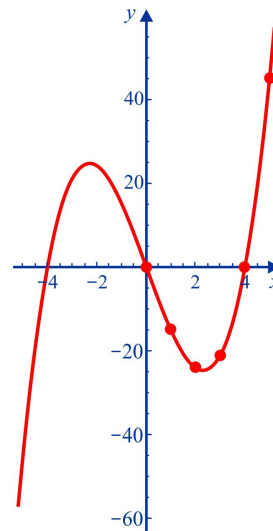



Figura 3.64: Gráfico de $f(x) = x^3 - 16x$.

b) Também vimos no Problema 7 que a função $f(x) = x^4 - 12x^2 + 10$ é par. Logo, seu gráfico também pode ser traçado apenas com base na parte à direita do eixo-y. A

Tabela 3.11 mostra os pares ordenados correspondentes aos pontos vermelhos da Figura 3.65. Com base nesses pontos, traçamos a parte da curva referente a $x \geq 0$, e a refletimos em torno do eixo vertical.

Tabela 3.11

x	$f(x)$
0.0	10.00
0.5	7.06
1.0	-1.00
1.5	-11.94
2.0	-22.00
2.5	-25.94
3.0	-17.00
3.5	13.06
4.0	74.00

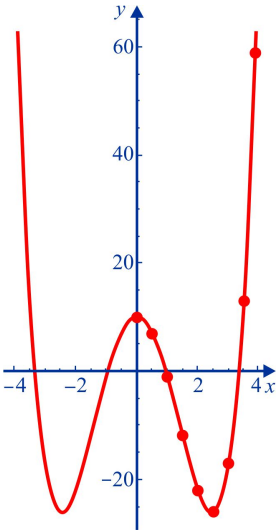



Figura 3.65: Gráfico de $f(x) = x^4 - 12x^2 + 10$.

Agora, tente o Exercício 20.

Exercícios 3.6

1. O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine

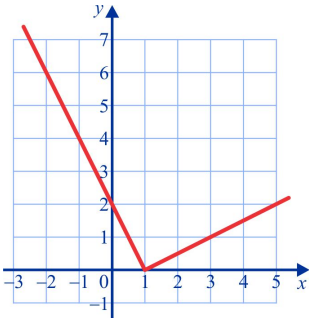
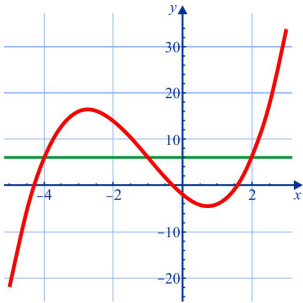
a) os valores de $f(-2)$, $f(0)$ e $f(4)$;

b) o conjunto imagem de f;

c) os pontos em que $f(x) = 2$;

d) os pontos em que $f(x) < 1$;

e) os pontos de máximo e mínimo local;

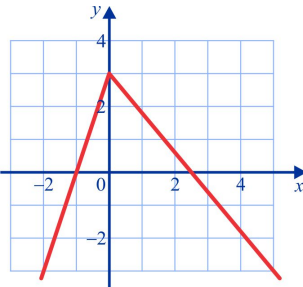
f) os intervalos de crescimento e decrescimento.

2. A figura abaixo mostra o gráfico de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 2$ e a reta $y = 6$. A partir do gráfico, indique as soluções de $f(x) \geq 6$.

3. O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine

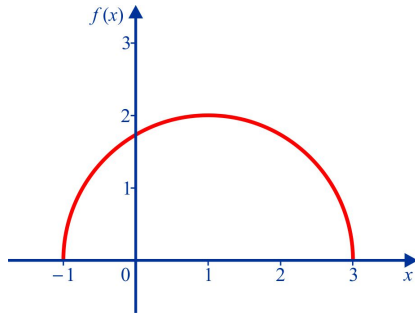
a) o conjunto imagem de f;

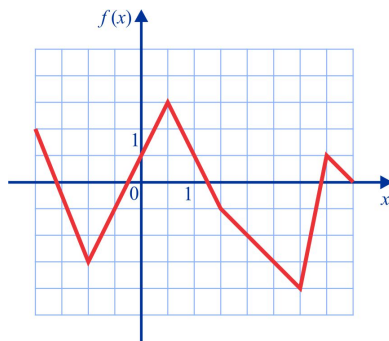
b) os zeros de f;

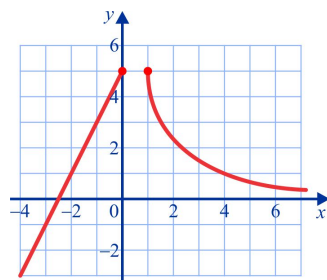
c) os pontos em que $-3 \leq f(x) \leq 0$;

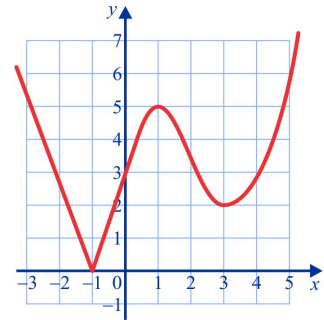
d) os pontos de máximo e mínimo local;

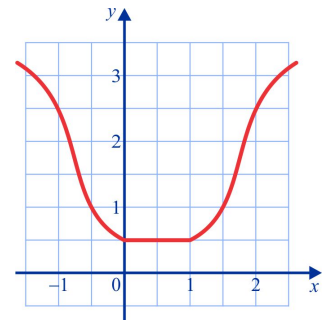
e) os intervalos de crescimento e decrescimento.

4. O gráfico da função $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine

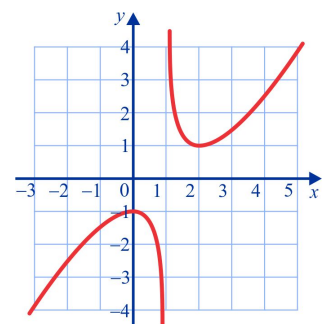
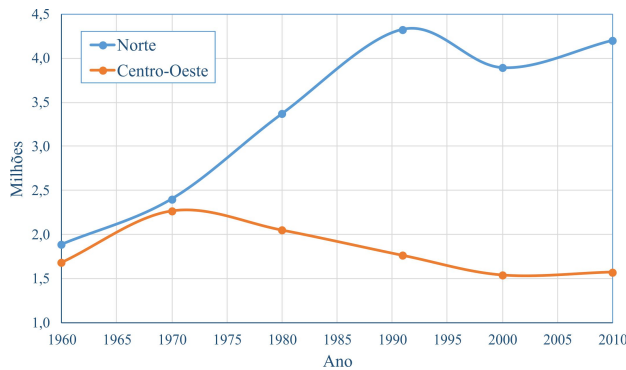
a) os valores de $f(0)$, $f(0{,}5)$ e $f(2)$;
b) o domínio de f;
c) o conjunto imagem de f;
d) os zeros de f;
e) os intervalos de crescimento e decrescimento;
f) os pontos de máximo e mínimo local.

5. Dada a função f cujo gráfico é representado abaixo, determine, para o domínio especificado,

a) os valores de $f(-1)$, $f(2)$ e $f(3)$;
b) os valores de x para os quais $f(x) = -0{,}5$;
c) os valores de x para os quais $f(x) < -1$;
d) os intervalos em que f é crescente e decrescente;
e) os pontos de máximo e mínimo local de f e os valores da função nesses pontos.

6. O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine

a) o domínio de f;
b) o conjunto imagem de f;
c) os pontos em que $f(x) \geq 1$;
d) os intervalos de crescimento e decrescimento.

7. O gráfico da função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine

a) o conjunto imagem de f;
b) os zeros de f;
c) os intervalos de crescimento e decrescimento;
d) os pontos de máximo e mínimo local.

8. O gráfico da função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine

a) o conjunto imagem de f;
b) os pontos em que $f(x) \leq 2{,}5$;
c) os intervalos de crescimento e decrescimento;
d) os pontos de máximo e mínimo local.

9. O gráfico da função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine

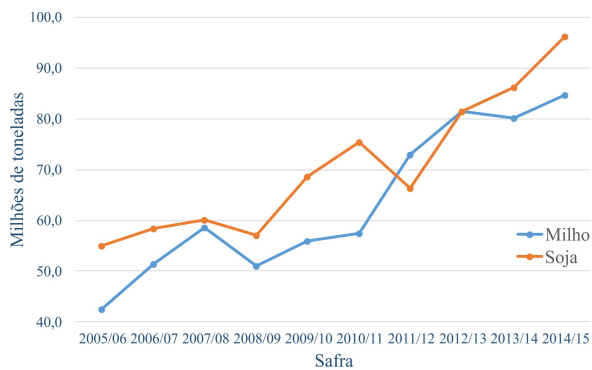
a) o domínio de f;
b) o conjunto imagem de f;
c) os intervalos de crescimento e decrescimento;
d) os pontos de máximo e mínimo local.

10. O gráfico abaixo mostra a população rural das regiões norte e centro-oeste do Brasil, ao longo do tempo, segundo o IBGE.

a) Determine em que período a população rural da região norte superou 3 milhões de habitantes.

b) Determine em que período a população rural da região centro-oeste superou 2 milhões de habitantes.

c) Forneça os intervalos de crescimento e decrescimento da população rural das duas regiões.

d) Indique em que décadas do século XX o crescimento da população rural da região norte foi mais intenso.

e) Determine os pontos de máximo e mínimo local dos gráficos.

11. A produção brasileira de milho e soja, em milhões de toneladas, no período compreendido entre as safras de 2005/06 e 2014/15 é mostrada abaixo. Os dados foram extraídos das séries históricas fornecidas pela CONAB - Companhia Nacional de Abastecimento.

a) Determine em que safras a produção de soja foi maior ou igual a 60 milhões de toneladas.

b) Determine em que safras a produção de milho foi superior a 70 milhões de toneladas.

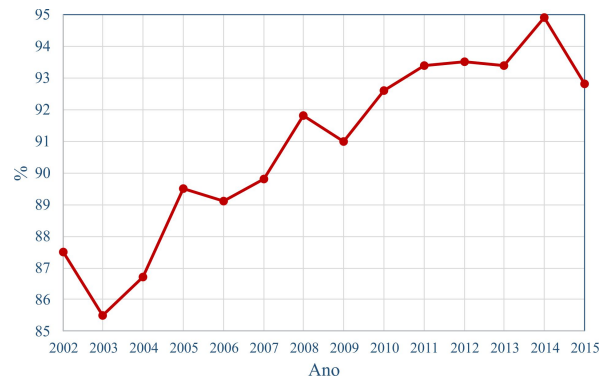
c) Forneça os intervalos de crescimento e decrescimento da produção de soja.

d) Indique entre quais safras houve o maior crescimento da produção de milho. Forneça esse crescimento.

e) Indique entre quais safras houve a maior queda da produção de soja. Calcule em quantas toneladas a produção foi reduzida.

f) Determine o crescimento percentual da produção de milho e de soja entre as safras de 2005/06 e 2014/15.

g) Determine os pontos de máximo e mínimo local dos gráficos.

12. Dá-se o nome de *taxa de ocupação* ao percentual de pessoas ocupadas em relação ao número de pessoas dispostas a trabalhar. O gráfico abaixo mostra a taxa de ocupação na região metropolitana de São Paulo, em junho de cada ano, segundo o IBGE.

a) Determine entre quais anos consecutivos houve o maior aumento do desemprego em junho, ou seja, a maior variação negativa da taxa de ocupação.

b) Determine entre quais anos consecutivos houve o maior aumento da taxa de ocupação em junho. Calcule a variação da taxa nesse caso.

c) Determine em que anos a taxa de ocupação foi superior a 90%.

d) Forneça os intervalos de crescimento e decrescimento da taxa de ocupação.

e) Determine quais anos apresentaram a maior e a menor taxa de ocupação em junho.

13. Sejam dadas as funções $f(x) = \frac{1}{6}x - 2$ e $g(x) = 3 - \frac{2}{3}x$.

a) Exiba os gráficos de f e g no plano Cartesiano.

b) Determine para que valores de x a desigualdade $f(x) \leq g(x)$ é satisfeita.

14. Dadas as funções f e g cujos gráficos são representados abaixo, determine, para o domínio especificado,

a) os pontos nos quais $f(x) \leq 0{,}5$;

b) os pontos nos quais $g(x) \geq 0{,}5$;

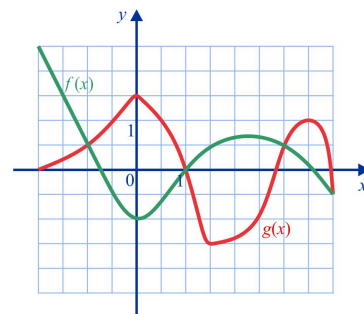
c) os pontos nos quais $f(x) \geq g(x)$;

d) os intervalos em que f é crescente ou decrescente;

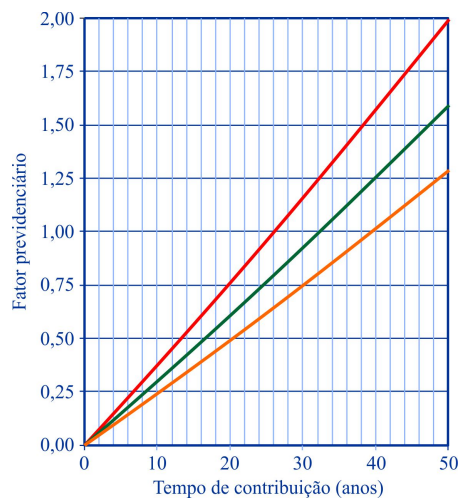
e) os intervalos em que g é crescente ou decrescente;

f) os pontos de máximo e mínimo local de f e o valor da função nesses pontos;

g) os pontos de máximo e mínimo local de g e o valor da função nesses pontos;

h) valores aproximados para os zeros de f.

15. O fator previdenciário, f, é um coeficiente usado para a correção do valor da aposentadoria por tempo de serviço de uma pessoa que contribuiu para a previdência social. Esse fator é calculado no momento da aposentadoria e depende do tempo de contribuição (T_c), da idade (A) e da expectativa de sobrevida (E_s) do contribuinte, segundo a fórmula

$$f = \frac{0{,}31T_c}{E_s}\left[1 + \frac{A + 0{,}31T_c}{100}\right].$$

Os valores do fator previdenciário em relação ao tempo de contribuição, para pessoas com 60, 65 e 70 anos, são dados no gráfico abaixo. Com base no gráfico, estime a expectativa de sobrevida de um contribuinte de 70.

16. Uma companhia de turismo cobra R$ 1200,00 por um pacote turístico individual, mas dá um bom desconto quando os turistas viajam em grupos. Se um grupo tem x pessoas, com $x \leq 70$, cada integrante paga apenas

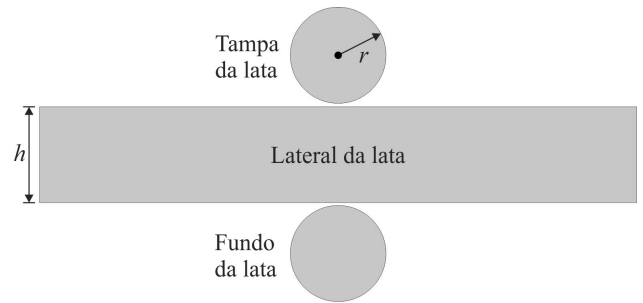
$$C(x) = 1200 - 12x.$$

Sabendo que a receita da empresa com cada grupo é dada pelo produto do valor pago por pessoa pelo número de membros do grupo,

a) escreva a função $R(x)$ que fornece a receita obtida pela empresa de turismo com um grupo de x pessoas;

b) trace o gráfico da função para $x \in [10,70]$;

c) indique qual tamanho de grupo fornece a maior receita.

17. Um fabricante de tintas precisa projetar uma lata de metal que comporte 1 litro e tenha formato cilíndrico. A quantidade de metal consumida na fabricação da lata é proporcional à área de sua superfície. A figura a seguir mostra a planificação da lata.

Lembre-se de que o volume de um cilindro de altura h e raio da base r é dado por πhr^2. Além disso, a área de um retângulo de base b e altura h é igual a bh, a área de um círculo de raio r é dada por πr^2, e o perímetro desse círculo é igual a $2\pi r$.

a) Escreva a área da tampa da lata em relação a r.

b) Escreva a área da lateral da lata em relação a r e h (dica: observe que há uma relação entre uma das dimensões da lateral e o perímetro da tampa).

c) Escreva a área da superfície da lata em relação a r e h.

d) Escreva h em função de r, usando o fato de que o volume da lata é igual a 1 litro = 1000 cm^3.

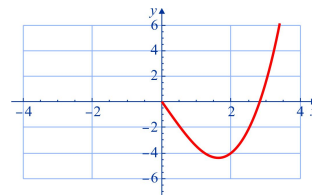
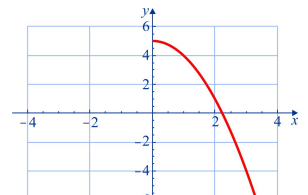
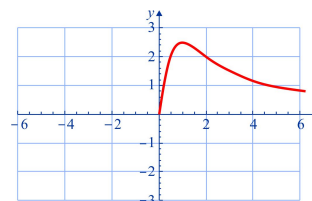
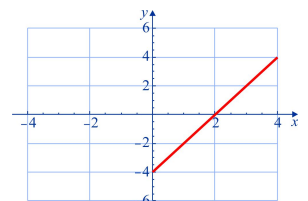
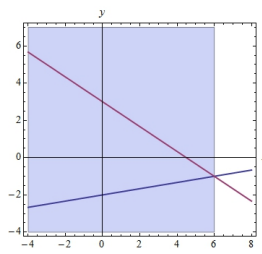
e) Usando as respostas dos itens (c) e (d), escreva uma função que forneça a área da superfície em relação apenas ao raio da base da lata, r.

f) Defina o domínio da função que você obteve no item anterior.

g) Trace o gráfico da função para r entre 2 e 10.

h) Determine em que intervalos a função é crescente e em quais é decrescente.

i) A partir do gráfico, determine o raio da base que proporciona o menor gasto de metal, bem como a altura da lata.

18. Complete os gráficos das funções abaixo, supondo que eles possuem o tipo de simetria indicado.

19. Determine algebricamente se as funções abaixo são pares, ímpares ou não possuem simetria.

a) $f(x) = 4$
b) $f(x) = -2x$
c) $f(x) = 2x - 1$
d) $f(x) = x^2 - 3$
e) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
f) $f(x) = -x^3 + 2x$
g) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x$
h) $f(x) = x^6 - 3x^4 + x^2 - 15$
i) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
k) $f(x) = x\sqrt{x}$
l) $f(x) = |x|$

20. Levando em conta a simetria, trace os gráficos das funções dos itens (d), (f), (i) e (j) do Exercício 19.

Respostas dos Exercícios 3.6

1. a) $f(-2) = 6$; $f(0) = 2$; $f(4) = 1{,}5$
b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
c) $x = 0$ e $x = 5$
d) $0{,}5 < x < 3$.
e) $x = 1$ é ponto de mínimo local, com $f(1) = 0$. Não há máximo local.
f) f é decrescente em $(-\infty, 1)$ e crescente em $(1, \infty)$.

2. $-4 \leq x \leq -1$ e $x \geq 2$

3. a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$
b) $x = -1$ e $x = 2{,}5$
c) $[-2, -1] \cap [2{,}5; 5]$.
d) $x = 0$ é ponto de máximo local, com $f(0) = 3$. Não há mínimo local.
e) f é crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, \infty)$.

4. a) $f(0) \approx 1{,}7$; $f(0{,}5) \approx 1{,}9$; $f(2) \approx 1{,}7$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$
c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$
d) $x = -1$ e $x = 3$
e) f é crescente em $(-1, 1)$ e decrescente em $(1, 3)$.
f) $x = 1$ é ponto de máximo local, com $f(1) = 2$. Não há mínimo local.

5. a) $f(-1) = -1{,}5$; $f(2) = -1$; $f(3) = -2$
b) $x = -1{,}4$; $x = -0{,}5$; $x = 1{,}5$ e $x = 3{,}3$
c) $-1{,}2 \leq x \leq 0{,}75$ e $2{,}666\ldots \leq x \leq 3{,}1$
d) Crescente em $(-1; 0{,}5)$ e $(3; 3{,}5)$. Decrescente em $(-2; -1)$, $(0{,}5; 3)$ e $(3{,}5; 4)$.
e) Pontos de máximo local: $x = 0{,}5$ ($f(0{,}5) = 1{,}5$) e $x = 3{,}5$ ($f(3{,}5) = 0{,}5$). Pontos de mínimo local: $x = -1$ ($f(-1) = -1{,}5$) e $x = 3$ ($f(3) = -2$).

6. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq 0 \text{ ou } 1 \leq x < \infty\}$
b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$
c) $[-2, 0] \cap [1, 4]$
d) Crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(1, \infty)$.

7. a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
b) $x = -1$
c) Crescente em $(-1; 1)$ e $(3; \infty)$. Decrescente em $(-\infty; -1)$ e $(1; 3)$.
d) Ponto de máximo local: $x = 1$ ($f(1) = 5$). Pontos de mínimo local: $x = -1$ ($f(-1) = 0$) e $x = 3$ ($f(3) = 2$).

8. a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1/2\}$
b) $[-1, 2]$
c) Decrescente em $(-\infty; 0)$ e crescente em $(1, \infty)$
d) Pontos de mínimo local: $x \in [0, 1]$. Não há ponto de máximo local.

9. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$
b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$
c) Crescente em $(-\infty; 0)$ e $(2; \infty)$. Decrescente em $(0; 1)$ e $(1; 2)$.
d) Ponto de máximo local: $x = 0$ ($f(0) = -1$). Ponto de mínimo local: $x = 2$ ($f(2) = 1$)

10. a) De 1976 a 2010.
b) De 1964 a 1981.
c) Norte: crescente de 1960 a 1991 e de 2000 a 2010; decrescente entre 1991 e 2000.
Centro-oeste: crescente de 1960 a 1970 e de 2000 a 2010; decrescente entre 1970 e 2000.
d) Nas décadas de 70 e 80.
e) Norte: máximo e 1991 e mínimo em 2000.
Centro-oeste: máximo em 1970 e mínimo em 2000.

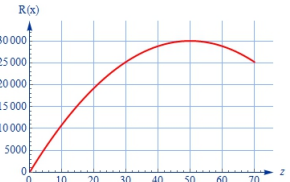
11. a) Nas safras de 2007/08 e 2009/10 em diante.
b) A partir da safra de 2011/12.
c) Crescente entre as safras de 2005/06 e 2007/08, entre 2008/09 e 2010/11 e de 2011/12 em diante. Decrescente entre as safras de 2007/2008 e 2008/2009 e entre 2010/11 e 2011/12.
d) Entre as safras de 2010/11 e 2011/12. O crescimento foi de cerca de 15 milhões de toneladas.
e) Entre as safras de 2010/11 e 2011/12. A queda foi de cerca de 9 milhões de toneladas.
f) Milho: cerca de 100%. Soja: cerca de 75%.
g) Milho: máximos nas safras de 2007/08 e 2012/13; mínimos nas safras de 2008/09 e 2013/14.
Soja: máximos nas safras de 2007/08 e 2010/11; mínimos nas safras de 2008/09 e 2011/12.

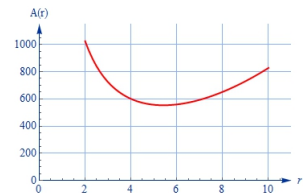
12. a) Entre 2014 e 2015.
b) Entre 2004 e 2005. Nesse período, a taxa de ocupação subiu 2,8%.
c) De 2008 a 2015.
d) Crescente de 2003 a 2005, de 2006 a 2008, de 2009 a 2012 e de 2013 a 2014. Decrescente entre 2002 e 2003, 2005 e 2006, 2008 e 2009, 2012 e 2013 e entre 2014 e 2015.
e) A menor taxa de ocupação ocorreu em 2003 (85,5%) e a maior em 2014 (94,9%).

13. a)

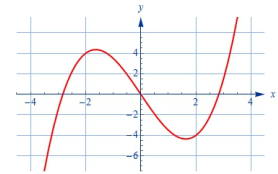
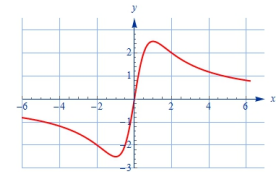
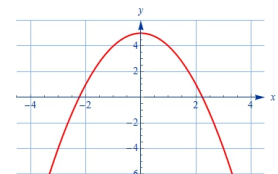
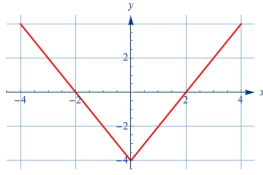
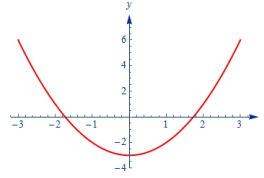
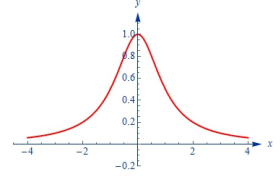
b) $x \leq 6$

14. a) $-1 \leq x \leq 1{,}5$ e $x \geq 3$
b) $-1 \leq x \leq 0{,}8$ e $3 \leq x \leq 3{,}9$
c) $x \leq -1$ e $1 \leq x \leq 3$
d) Crescente em $(0; 2{,}25)$. Decrescente em $(-2, 0)$ e em $(2{,}25; 4)$.
e) Crescente em $(-2, 0)$ e em $(1{,}5; 3{,}5)$. Decrescente em $(0; 1{,}5)$ e $(3{,}5; 4)$.
f) Ponto de máximo local: $x = 2{,}25$ ($f(2{,}25) = 0{,}7$). Ponto de mínimo local: $x = 0$ ($f(0) = -1$).
g) Pontos de máximo local: $x = 0$ ($f(0) = 1{,}5$) e $x = 3{,}5$ ($f(3{,}5) = 1$). Ponto de mínimo local: $x = 1{,}5$ ($f(1{,}5) = -1{,}5$).
h) $x = -2$; $x = 1$; $x = 2{,}8$; $x = 3{,}95$

15. 14,4 anos

16. a) $R(x) = 1200x - 12x^2$
b)
c) 50 pessoas

17. a) $A_T = \pi r^2$
b) $A_L = 2\pi r h$
c) $A = 2A_T + A_L = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
d) $h = \frac{1000}{\pi r^2}$
e) $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$
f) $D = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$
g)
h) Decrescente em $(0; 5{,}42)$ e crescente em $(5{,}42; \infty)$.
i) $r \approx 5{,}42$ cm e $h \approx 10{,}84$ cm.

18. a)

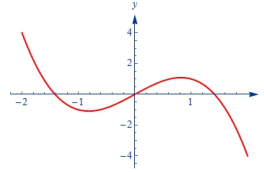
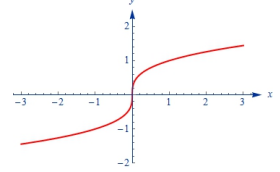
b)
c)

d)

19.

a) Par	e) Nada	i) Par
b) Ímpar	f) Ímpar	j) Ímpar
c) Nada	g) Ímpar	k) Nada
d) Par	h) Par	l) Par

20. a)

b)

c)

d)

3.7 Funções usuais

■ Função linear e função afim

Na Seção 2.2, vimos como usar a regra de três para estabelecer a relação entre grandezas diretamente proporcionais. Usaremos, agora, o conceito de função para estabelecer a mesma relação.

Problema 1. Custo do telefonema

Uma empresa telefônica cobra R$ 0,60 por uma ligação de 15 minutos. Sabendo que o custo da ligação é diretamente proporcional à duração da conversa, determine o custo de um telefonema de t minutos.

Solução.

Se o custo é diretamente proporcional ao tempo de ligação, então o custo por minuto corresponde à constante de proporcionalidade, sendo igual a

$$m = \frac{0{,}60 \text{ reais}}{15 \text{ min}} = 0{,}04 \text{ reais/min},$$

ou seja, 4 centavos por minuto. Assim, para uma ligação t minutos, o custo, em reais, é dado pela função

$$C(t) = 0{,}04t.$$

Usando essa função, a companhia telefônica é capaz de calcular facilmente o valor de qualquer ligação telefônica.

Funções na forma

$$f(x) = mx,$$

como aquela encontrada no Exemplo 1, são denominadas **funções lineares**. Uma versão mais geral desse tipo de função é dada a seguir.

Linear ou afim?

A diferença entre função linear e função afim só é relevante para os matemáticos mais empedernidos, de modo que não há mal em usar qualquer um dos dois termos para nomear as funções definidas por $f(x) = mx + b$.

Função afim

Uma função f é chamada **função afim ou linear** se pode ser escrita na forma

$$f(x) = mx + b,$$

em que m e b são coeficientes reais constantes.

O gráfico de uma função afim é a reta cuja inclinação é igual a m, e cujo intercepto-y é b. Conhecendo o valor da função para dois valores diferentes de x, podemos determinar a expressão da função, bem como traçar o seu gráfico.

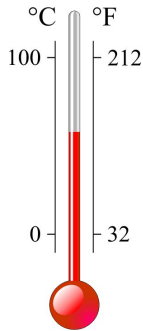



Figura 3.66: Relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit.

Problema 2. Conversão de unidades

Em quase todos os países, a unidade de medida de temperatura é o grau Celsius ($°C$). Entretanto, nos Estados Unidos e em algumas de suas possessões, a temperatura é apresentada em graus Fahrenheit ($°F$). Escreva uma função afim que converta uma temperatura em graus Fahrenheit para graus Celsius, sabendo que $32°F$ correspondem a $0°C$, e que $212°F$ correspondem a $100°C$. Em seguida, trace o gráfico da função.

Solução.

O objetivo do problema é determinar a função

$$C(t) = mt + b,$$

que converte uma temperatura t, em graus Fahrenheit, na temperatura correspondente em graus Celsius. Para que possamos encontrar os coeficientes m e b, o enunciado nos fornece duas informações:

$$C(32) = 0 \qquad \text{e} \qquad C(212) = 100.$$

Com base nesses dados, escrevemos os pares ordenados

$$(x_1,y_1) = (32,0) \qquad \text{e} \qquad (x_2,y_2) = (212,100),$$

que nos permitem obter a inclinação da reta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9},$$

donde

$$C(t) = \frac{5}{9}t + b.$$

Observe que também seria possível obter m e b resolvendo o sistema linear

$$0 = 32m + b$$
$$100 = 212m + b$$

Finalmente, lembrando que $C(32) = 0$, escrevemos

$$0 = \frac{5}{9} \cdot 32 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = -\frac{160}{9}.$$

Assim, a função é dada por

$$C(t) = \frac{5}{9}t - \frac{160}{9}.$$

Como o gráfico de C é uma reta, podemos traçá-lo no plano usando apenas os dois pares ordenados já fornecidos. O resultado é apresentado na Figura 3.67.

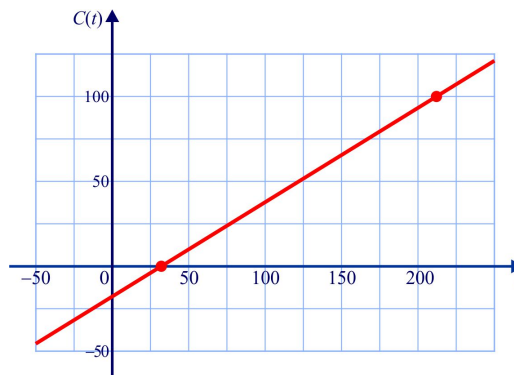



Figura 3.67: Gráfico de $C(t) = 5t/9 - 160/9$.

Agora, tente os Exercícios 17 e 19.

Atenção

Ao traçarmos o gráfico de uma função linear ou afim, não devemos marcar muitos pontos no plano, ligando-os em seguida. Quando isso é feito, a curva resultante pouco se parece com uma reta, como a que é mostrada abaixo. Para evitar gráficos assim, usamos apenas dois pontos, como na Figura 3.67

Figura 3.68: Gráfico incorreto de uma função afim.

As principais características das funções lineares e afins são:

- O domínio e o conjunto imagem são compostos por todos os números reais.
- A função tem um único zero se $m \neq 0$.
- A função é crescente se $m > 0$, e decrescente se $m < 0$.
- A função não tem máximos ou mínimos locais.

■ Função potência

Dada uma constante natural n, uma função na forma

$$f(x) = x^n,$$

é chamada **função potência**. A Figura 3.69 mostra o gráfico de algumas funções potência bastante conhecidas.

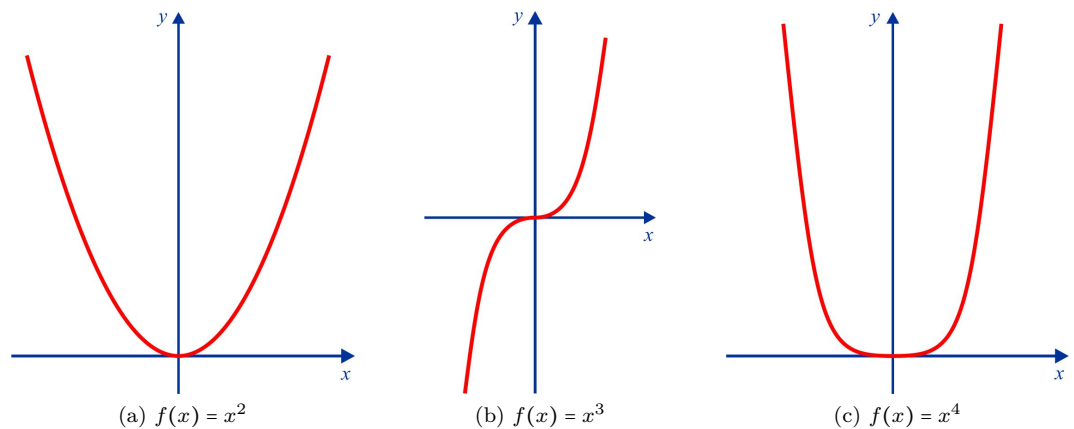



Figura 3.69: Gráficos das funções potência usuais.

Observe que as funções cujos gráficos são mostrados nas Figuras 3.69a e 3.69c têm expoente par. Já a Figura 3.69b mostra a função $f(x) = x^3$, cujo expoente é impar. A paridade do expoente afeta diretamente as características das funções potência, que são apresentadas abaixo.

Não se esqueça de que, ao elevarmos um número real a um expoente par, obtemos sempre um número positivo.

- O domínio de f é $\mathbb{R}$.
- O conjunto imagem é $\mathbb{R}$ se o expoente é ímpar e é $[0, \infty)$ se o expoente é par.
- Há um único zero em $x = 0$.
- Quando o expoente é par, f é decrescente para $x < 0$, e crescente para $x > 0$. Quando o expoente é ímpar, f é crescente em $(-\infty, \infty)$.
- Não há máximos locais.
- A função tem um ponto de mínimo local em $x = 0$ quando o expoente é par, e não tem mínimos locais quando o expoente é ímpar.
- Quando o expoente é par, f é par. Quando o expoente é ímpar, f é ímpar.

Função raiz

Lembrete
Também podemos representar uma função raiz na forma $x^{1/n}$.

Dada uma constante natural n maior que 1, uma função na forma

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

é chamada **função raiz**.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = x^{1/3}$

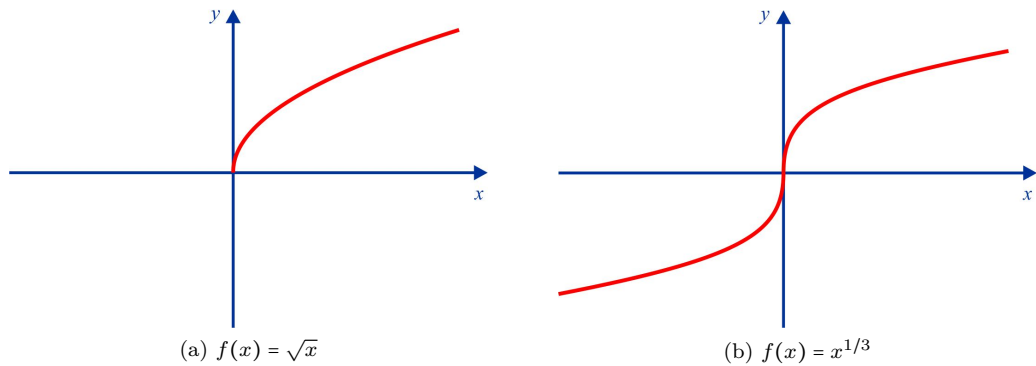



Figura 3.70: Gráficos das funções raiz quadrada e raiz cúbica.

A Figura 3.70 mostra os gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Observando a figura, notamos que a paridade do índice da raiz afeta as características do gráfico, de forma similar ao que ocorreu com as funções potência. Para uma função raiz,

Não se esqueça de que, quando o índice é par, não é possível extrair uma raiz de um número negativo.

- o domínio é $\mathbb{R}$ se o índice n é impar, e é $[0,\infty)$ se n é par;
- o conjunto imagem é $\mathbb{R}$ se o índice é ímpar e é $[0,\infty)$ se o índice é par;
- há um único zero em $x = 0$;
- a função é crescente em todo o domínio;
- não há máximos ou mínimos locais.
- Quando o índice é ímpar, f é ímpar.

Funções recíprocas

Funções na forma

$$f(x) = \frac{1}{x^n},$$

em que n é um número natural, são chamadas **funções recíprocas**. Os gráficos das funções recíprocas $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \frac{1}{x^2}$ são apresentados na Figura 3.71.

As principais características das funções recíprocas são:

- O domínio inclui todos os valores reais, exceto o zero.
- O conjunto imagem é $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ se o expoente é ímpar e $(0,\infty)$ se o expoente é par.
- A função não tem zeros.
- Quando o expoente é ímpar, a função é decrescente em todos os pontos do domínio. Já quando o expoente é par, f é crescente para $x < 0$ e decrescente para $x > 0$.
- Não há máximos ou mínimos locais.

(a) $f(x) = 1/x$ (b) $f(x) = 1/x^2$

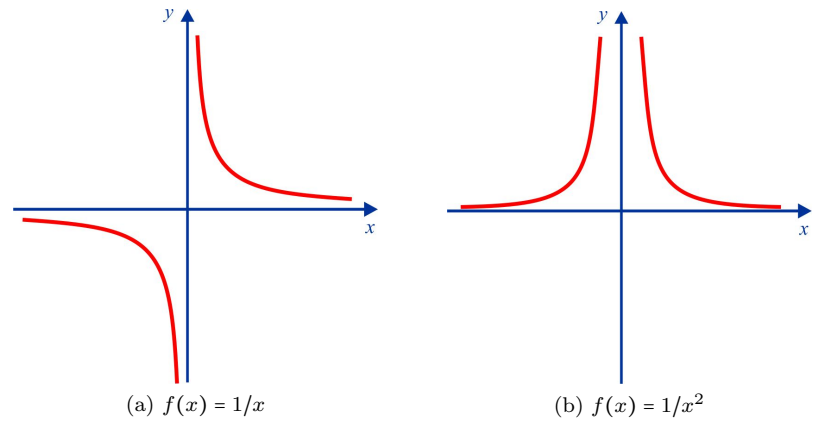



Figura 3.71: Gráficos de algumas funções recíprocas.

- Quando o expoente é par, f é par. Quando o expoente é ímpar, f é ímpar.

A constante k que aparece nessa definição de f é usada para ajustar a função recíproca ao dados do problema.

A função recíproca $f(x) = k/x$ é empregada para associar grandezas inversamente proporcionais, como ilustra o problema a seguir.

Problema 3. Tempo de viagem

Viajando à velocidade constante de 60 km/h, um carro faz um determinado percurso em 2 horas. Escreva uma função $t(v)$ que forneça o tempo de viagem (em horas), em relação à velocidade do carro (em km/h). Em seguida, trace o gráfico da função.

Solução.

O tempo de viagem (t) e a velocidade do carro (v) são grandezas inversamente proporcionais. Nesse caso, como vimos no Capítulo 2, o produto entre as grandezas é igual à constante de proporcionalidade, k, ou seja,

$$k = t \cdot v.$$

Como se percebe, a constante de proporcionalidade nada mais é que a distância a ser percorrida pelo carro.

Substituindo os valores dados no enunciado, temos

$$k = 2 \text{ h} \cdot 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \text{ km}.$$

Logo, a função desejada é

$$t(v) = \frac{120}{v}.$$

Naturalmente, essa função só faz sentido para $v > 0$, pois não queremos que o carro ande para trás ($v < 0$) ou fique parado ($v = 0$). Sendo assim, podemos esboçar o gráfico de t considerando apenas a parte positiva do eixo-v (horizontal).

A Tabela 3.12 contém os pares usados para produzir o gráfico, que é mostrado na Figura 3.72.

Tabela 3.12

v	t
5	24
10	12
20	6
40	3
60	2
80	1,5
100	1,2

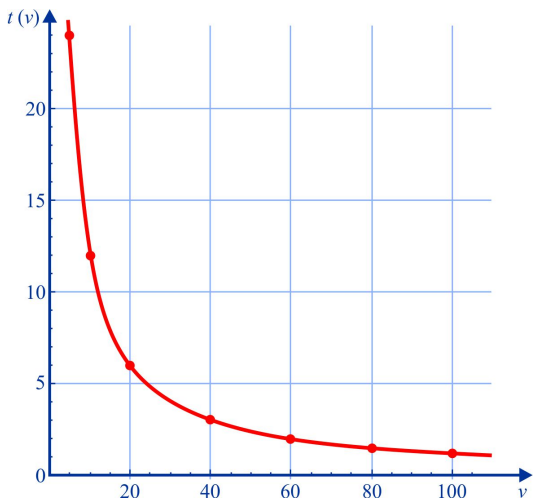



Figura 3.72: Gráfico de $t(v) = 120/v$.

Usando a regra de três tradicional

Tabela 3.13: Velocidade × tempo

Veloc. (km/h)	Tempo (h)
↑ 60	2 ↓
v	t

Também poderíamos ter determinado a função a partir da regra de três tradicional, representada na Tabela 3.13, na qual aparecem os dados do problema e as variáveis v e t.

Lembrando que a velocidade e o tempo são inversamente proporcionais, escrevemos

$$60 \cdot 2 \; = \; v \cdot t(v).$$

Finalmente, calculando o produto do lado esquerdo e dividindo ambos os lados da equação por v, obtemos

$$t(v) = \frac{120}{v}.$$

Agora, tente o Exercício 22.

■ Funções definidas por partes

Vários tributos e contas que pagamos têm fórmulas complexas, com várias faixas de tarifas e alíquotas. Isso ocorre, por exemplo, com as contas de luz e telefone, com o imposto de renda, e com os preços cobrados pelos correios.

Em casos assim, a função que descreve o valor a ser pago é definida por partes, ou seja, há uma função para cada intervalo de tarifa ou alíquota. Vejamos alguns exemplos.

Problema 4. Conta telefônica

A tarifa mensal de um plano de telefonia fixa tem duas faixas de preço:

- Os clientes que efetuam até 400 minutos mensais em ligações pagam o valor fixo de R$ 42,00 por mês.
- Para cada minuto adicional (ou seja, que excede os 400 minutos), paga-se R$ 0,04.

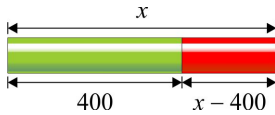
Determine a função que fornece o valor mensal da conta telefônica.

Solução.

Figura 3.73: Período de x minutos dividido em duas partes.

Vamos supor que um cliente fale x minutos por mês. Nesse caso, se suas ligações ultrapassarem os 400 minutos, o tempo adicional equivalerá a $x - 400$, como mostrado na Figura 3.73.

Para determinar a função f que fornece o valor da conta mensal, devemos considerar as duas situações previstas no plano:

- se $x \leq 400$, então $f(x) = 42$;
- se $x > 400$, então $f(x) = 42 + 0{,}04(x - 400)$.

Resumindo esse casos, temos a seguinte *função definida por partes:*

$$f(x) = \begin{cases} 42, & \text{se } x \leq 400, \\ 42 + 0{,}04(x - 400), & \text{se } x > 400. \end{cases}$$

Problema 5. Traçado do gráfico de uma função definida por partes

Trace o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0, \\ x + 2, & \text{se } 0 \leq x < 2, \\ 8 - 2x, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Solução.

Tabela 3.14

$\bar{x}$	$f(x)$	$f(\bar{x})$
-2	$-x$	2
-1	$-x$	1
0	$x + 2$	2
1	$x + 2$	3
2	$8 - 2x$	4
4	$8 - 2x$	0

Observamos que

- Para $x < 0$, o gráfico de f coincide com a reta $y = -x$.
- Para $0 \leq x < 2$, o gráfico é o mesmo que o de $y = x + 2$.
- Já para $x \geq 2$, o gráfico de f está sobre a reta $y = 8 - 2x$.

Como dois pontos são suficientes para definir uma reta, cada trecho do gráfico pode ser traçado com o auxílio de dois pares ordenados. Escolhendo, então, os valores de x indicados na Tabela 3.14, obtemos o gráfico mostrado na Figura 3.74.

Figura 3.74: Gráfico da função do Problema 5.

Agora, tente o Exercício 3.

Problema 6. Conta d'água

Em 2013, as tarifas de abastecimento de água cobradas pela SANASA para consumidores da categoria residencial social seguiam as regras apresentadas na Tabela 3.15.

Tabela 3.15: Tarifa de consumo de água em Campinas.

Consumo mensal	Tarifa	Parcela a deduzir
Até 10 m^3	R$ 10,00	–
Mais que 10 até 30m^3	R$ 1,27/m^3	R$ 2,70

Escreva a função f que fornece o custo mensal em relação ao consumo, x, em m^3. Esboce o gráfico da função.

Solução.

Assim como ocorre com a conta telefônica, a tarifa de abastecimento de água tem duas categorias, dependendo do valor da variável x, que representa o volume de água gasto em um mês:

- se $x \leq 10$ m^3, então a tarifa é fixa e vale R$ 10,00, ou seja, $f(x) = 10$;
- se $x > 10$ m^3, então paga-se R$ 1,27 para cada metro cúbico consumido, devendo-se descontar, do valor final, a parcela de R$ 2,70. Em notação matemática, isso corresponde à fórmula
$$f(x) = 1{,}27x - 2{,}70.$$

Reunindo os dois casos, obtemos a função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{se } x \leq 10, \\ 1{,}27x - 2{,}7, & \text{se } x > 10. \end{cases}$$

Você sabia?
O propósito da parcela a reduzir é evitar que a função tenha um salto. Sem ela, quem consumisse 10 m^3 pagaria R$ 10,00, e quem gastasse 10,01 m^3 de água pagaria R$ 12,70, o que não parece justo. Incluindo a parcela a deduzir, os consumidores que gastam 10,01 m^3 de água, pagam R$ 10,01, uma valor próximo daquele cobrado de quem consome 10 m^3.

Vamos supor que o domínio de f seja $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 30\}$, já que não é possível consumir uma quantidade negativa de água, e os consumidores que gastam mais de 30 m^3 não são beneficiados pela tarifa social. No intervalo $[0, 10]$, o gráfico da função é o mesmo da reta $y = 10$. Já para $[10, 30]$, o gráfico está sobre a reta $y = 1{,}27x - 2{,}7$. Sendo assim, os três pontos apresentados na Tabela 3.16 são suficientes para que esbocemos a curva. O gráfico da função é apresentado na Figura 3.75.

Tabela 3.16

x	f(x)
0	10
10	10
30	35,4

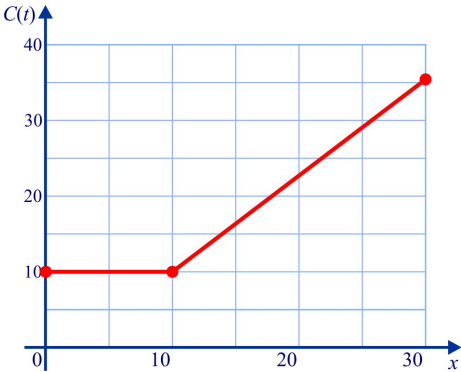



Figura 3.75: Gráfico da função que fornece o valor da conta d'água.

Agora, tente os Exercícios 28 e 29.

Função valor absoluto

A **função valor absoluto** ou **função modular** é uma função definida por partes, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Também representamos essa função por meio da notação $f(x) = |x|$.

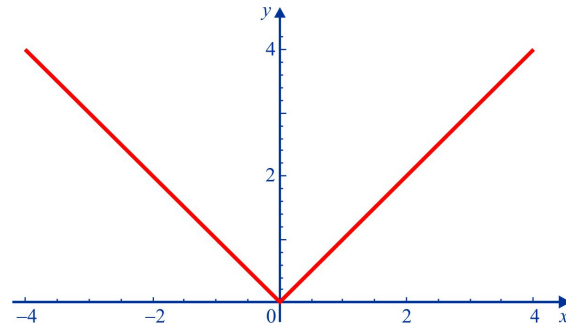



Figura 3.76: Gráfico da função valor absoluto.

A Figura 3.76 apresenta o gráfico da função modular, cujas características são indicadas a seguir.

- O domínio é $\mathbb{R}$.
- O conjunto imagem é $[0,\infty)$.
- Há um zero em $x = 0$.
- A função é decrescente em $(-\infty,0)$ e crescente em $(0,\infty)$.
- Não há máximos locais.
- Há um único ponto de mínimo local, em $x = 0$.
- A função é par.

Exercícios 3.7

1. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo com base em uma tabela de valores da função em pontos que você escolheu.

a) $f(x) = 3 - 2x$
b) $f(x) = 2x^2 - 3$
c) $f(x) = (x-1)^2$
d) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
e) $f(x) = \sqrt{1+x}$
f) $f(x) = 2/x$

2. Calcule o valor das funções abaixo nos pontos $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 0{,}5$; $x = 1$ e $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3+x, & \text{se } x \leq -1, \\ 2-3x, & \text{se } x > -1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1, \\ x^2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

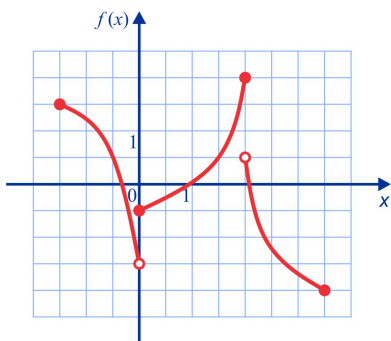
3. Trace o gráfico das funções abaixo para $x \in [-2,4]$.

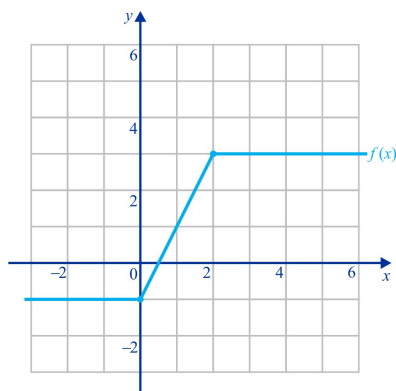
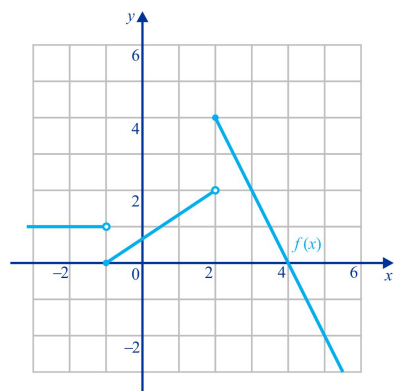
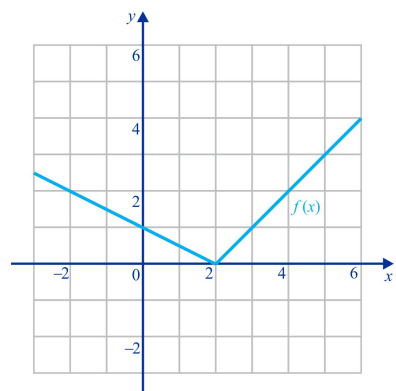
a) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \leq 2, \\ x, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0, \\ -1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1, \\ x^2 - 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

4. Dada a função f cujo gráfico é representado abaixo, determine, para o domínio especificado,

a) o domínio e a imagem de f;
b) os valores de $f(-1{,}5)$, $f(0)$ e $f(2)$;
c) os pontos nos quais $f(x) \geq 0{,}5$;
d) os intervalos em que f é crescente ou decrescente;
e) os pontos de máximo e mínimo local de f e os valores da função nesses pontos.

5. As figuras abaixo mostram os gráficos de funções definidas por partes. Escreva a expressão de cada função.

a)

b)

c)

6. Determine os conjuntos imagem das funções do Exercício 5.

7. Um silo que já continha um certo volume de soja está recebendo mais grãos. Sabe-se que, 4 h após o início do enchimento, o silo tinha 400 m^3 de soja, e que são adicionados 60 m^3 de soja por hora.

a) Defina a função linear (ou afim) $V(t)$ que fornece o volume de soja no silo decorridas t horas do início do enchimento.

b) Se o silo comporta 1600 m^3, determine o instante em que ele ficará cheio de soja.

8. O número de veículos de uma cidade cresceu linearmente a partir do ano 2000. Sabendo que a cidade tinha 150 mil veículos em 2004 e 210 mil veículos em 2012,

a) Defina uma função que forneça a o número de veículos (em milhares) em relação ao tempo (em anos) transcorrido desde o ano 2000.

b) Determine aproximadamente o número de veículos no ano 2000.

c) Determine em que ano a cidade terá 360 mil veículos.

9. O gasto público com ensino atingiu 5,2% do PIB brasileiro em 2007, e 6,1% do PIB em 2011.

a) Escreva uma função linear (ou afim), $E(t)$, que forneça aproximadamente o percentual do PIB gasto com ensino no Brasil, com relação ao número de anos, t, decorridos desde 2007.

b) A meta de gasto com ensino fixada em lei corresponde a 10% do PIB. Usando $E(t)$, estime em que ano essa meta será atingida.

10. Para desafogar o trânsito, a prefeitura de uma grande cidade vem investindo na construção de corredores de ônibus. A soma dos comprimentos dos corredores tem aumentado linearmente desde o início da atual gestão, tendo atingido 80 km após 3 meses do início do mandato do prefeito, e 179 km ao final de 12 meses.

a) Defina uma função que forneça o comprimento total dos corredores (em km), em relação ao tempo, x (em meses), desde o início da atual gestão.

b) Determine quantos quilômetros de corredores já existiam no momento em que o prefeito tomou posse.

c) Determine em quanto tempo a cidade contará com 300 km de corredores.

11. A geração de energia eólica no Brasil saltou de 342 GWh em 2006 para 2177 GWh em 2010.

a) Escreva uma função linear (ou afim) $E(t)$ que forneça aproximadamente a energia gerada (em GWh) com relação ao número de anos, t, decorridos desde 2006.

b) Esboce o gráfico de $E(t)$.

12. O número de habitantes de Mapará vem crescendo nos últimos anos segundo a função linear $m(t) = 1100 + 50t$, em que t é o tempo, em anos, contado a partir do ano

2000 (ou seja, $t = 0$ no ano 2000). Já a população de Caititu vem diminuindo ao longo dos anos, tendo baixado dos 2350 habitantes no ano 2000 para 1750 em 2008.

a) Defina a função linear (ou afim) $c(t)$ que fornece o número de habitantes de Caititu em relação ao tempo t, em anos, transcorrido desde 2000.

b) Determine em que instante as duas cidades tiveram o mesmo número de habitantes.

13. Pela Lei de Hooke, a força axial F (em Newtons, N) necessária para esticar uma mola por x metros, a partir de sua posição de repouso, é diretamente proporcional a x. Uma dada mola pode ser esticada em 20 cm aplicando-se uma força axial de 15 N.

a) Seguindo a Lei de Hooke, escreva a expressão de $F(x)$ para a mola do enunciado.

b) Determine o alongamento produzido por uma força de 24 N.

14. O tronco de um carvalho plantado no século 17, na França, possuía 2,5 m de diâmetro em 1805 e 5,5 m de diâmetro em 2003. Suponha que o diâmetro do tronco do carvalho tenha crescido a uma taxa constante.

a) Determine aproximadamente o ano em que o carvalho foi plantado.

b) Determine uma equação que forneça o diâmetro do tronco em relação à idade do carvalho.

c) Determine em que ano o diâmetro do carvalho atingirá 6 m.

15. Ludovico está juntando euros para fazer uma viagem à Europa. Depois de receber um ajuda inicial de seus pais, ele passou a poupar um valor fixo de euros por mês. Sabendo que, após seis meses do início da poupança, Ludovico tinha 1200 euros, e após 10 meses, ele já possuía 1700 euros,

a) Determine a função linear (ou afim) $p(t)$ que fornece o valor que Ludovico tem em euros após t meses do início da poupança.

b) Determine o valor, em euros, da ajuda inicial que os pais de Ludovico lhe deram.

c) Trace o gráfico de $p(t)$ para $t \in [0,18]$.

d) Determine após quantos meses de poupança Ludovico obterá os 5200 euros necessários para sua viagem.

16. Uma indústria alimentícia desenvolveu uma dieta de engorda para porcos. Quando submetido à dieta, um porco que possuía 25 kg consegue aumentar 15 kg por mês.

a) Escreva uma função $P(t)$ que forneça o peso do porco em relação ao tempo (em meses), supondo que seu peso inicial corresponda a 25 kg.

b) Determine a duração da dieta, em meses, supondo que o porco é abatido quando atinge 100 kg.

c) Represente sua função no plano Cartesiano, indicando o instante do abate.

17. A pressão de um volume constante de gás varia linearmente com a temperatura. Em uma experiência de um laboratório, observou-se que a pressão de um certo volume de um gás correspondia a 800 mmHg, a 20°C, e a 900 mmHg, a 60°C.

a) Escreva uma função $P(T)$ que forneça a pressão desse volume de gás (em mmHg) em relação à temperatura.

b) Represente sua função no plano Cartesiano.

c) Determine a pressão a 85°C.

d) Determine a que temperatura a pressão é igual a 700 mmHg.

18. Um clube vem perdendo sócios a um ritmo constante ano após ano, tendo registrado 14 mil sócios em 2004 e apenas 8 mil sócios em 2013.

a) Defina uma função linear (ou afim) $S(t)$ que forneça o número de sócios do clube no ano t, supondo que t seja zero no ano 2000.

b) O clube pretende fechar suas portas se o número de sócios chegar a 2 mil. Usando a função que você encontrou no item (a), determine em que ano isso ocorrerá.

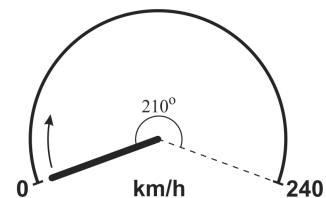
19. Em uma determinada região do planeta, a temperatura média anual subiu de 13,35°C em 1995 para 13,8°C em 2010. Suponha que o aumento linear da temperatura, observado entre 1995 e 2010, será mantido nos próximos anos.

a) Escreva uma função $T(t)$ que forneça a temperatura naquela região em relação ao tempo decorrido (em anos) a partir de 1990.

b) Use a sua função para prever a temperatura média em 2012.

c) Represente essa equação como uma reta no plano Cartesiano, destacando o que acontece em 2012.

d) O que representam a inclinação da reta e o ponto de interseção com o eixo-y?

20. O velocímetro é um instrumento que indica a velocidade de um veículo. A figura abaixo mostra o velocímetro de um carro que pode atingir 240 km/h. Observe que o ponteiro no centro do velocímetro gira no sentido horário à medida que a velocidade aumenta.

a) Suponha que o ângulo de giro do ponteiro seja diretamente proporcional à velocidade. Nesse caso, qual é o ângulo entre a posição atual do ponteiro (0 km/h) e sua posição quando o velocímetro marca 104 km/h.

b) Um determinado velocímetro fornece corretamente a velocidade do veículo quando esse trafega a 20 km/h, mas indica que o veículo está a 70 km/h quando a velocidade real é de 65 km/h. Supondo que o erro de aferição do velocímetro varie linearmente com a velocidade por ele indicada, determine a função $v(x)$ que representa a velocidade real do veículo quando o velocímetro marca uma velocidade de x km/h.

21. A frequência natural de vibração de uma corda (como a do violino) é inversamente proporcional ao comprimento da corda. Suponha que uma determinada corda produza uma frequência de 440 Hz quando mede 33 cm.

a) Escreva uma função $F(c)$ que relacione a frequência e o comprimento da corda do enunciado (em metros).

b) Determine a frequência da corda quando seu comprimento é reduzido para 25 cm.

22. Os funcionários de uma indústria gastam R$ 132,00 todo mês com seguro saúde.

a) Se um funcionário recebe R$ 1000,00 por mês, que percentual do salário ele gasta com seguro saúde?

b) Escreva uma função f que forneça o percentual do salário gasto com seguro saúde para um funcionário cujo salário mensal seja de x reais.

c) Trace o gráfico de $f(x)$ para $x \geq 132$.

23. Para um determinado carro, a distância necessária para pará-lo completamente é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade na qual ele trafegava antes de o freio ser acionado. Suponha que, quando está a 80 km/h, o carro gasta 32 m para parar completamente.

a) Escreva uma função $D(v)$ que forneça a distância (em m) gasta para parar o carro, em relação à velocidade deste (em km/h).

b) Determine a distância que será percorrida antes de parar o carro quando ele trafega a 110 km/h.

24. A tabela abaixo fornece o custo de envio de uma carta simples pelo correio, em relação ao peso da carta. Escreva a função que representa esse custo.

Peso (g)	Preço (R$)
Até 20	0,75
Mais de 20 até 50	1,15
Mais de 50 até 100	1,60
Mais de 100 até 150	2,00
Mais de 150 até 200	2,45
Mais de 200 até 250	2,85
Mais de 250 até 300	3,30
Mais de 300 até 350	3,70
Mais de 350 até 400	4,15
Mais de 400 até 450	4,55
Mais de 450 até 500	5,00

25. O telefone celular de Gláucia tem um plano de acesso à internet com uma tarifa mensal de R$ 50,00, que dá direito à transferência de 750 megabytes de dados. Para cada megabyte transferido além desse limite, Gláucia paga R$ 0,08. Observe que o valor pago pelo acesso à internet é independente do gasto com telefonemas.

a) Defina a função $C(x)$ que fornece o gasto mensal de Gláucia com o acesso à internet através de seu telefone celular, em relação à quantidade de dados transferidos, x, em megabytes.

b) Determine quantos megabytes Gláucia consegue transferir por mês com R$ 70,00.

c) Trace o gráfico de C(x) para x (em megabytes) no intervalo [0,1500].

26. Na cidade de Pindaíba, a conta de água e esgoto tem duas faixas de preço. Quem consome até 10 m^3 por mês paga o valor fixo de R$ 40,00. Para cada metro cúbico adicional no mês, o consumidor paga R$ 6,50.

a) Escreva a função $c(v)$ que fornece o custo mensal de água e esgoto em Pindaíba, com relação ao volume de água consumido (em m^3).

b) Determine o valor da conta de uma casa na qual o consumo mensal atingiu 16 m^3.

c) Trace o gráfico de $c(v)$ para v entre 0 e 20 m^3.

27. Sabrina recebe r reais por hora de trabalho, se trabalha até 36 horas semanais. Quando trabalha mais de 36 horas em uma mesma semana, Sabrina recebe hora-extra, na qual há um acréscimo de 50% do valor pago pela hora normal. Sabe-se que, quando trabalha exatamente 36 horas, Sabrina ganha R$ 720,00 por semana.

a) Determine r, o valor que Sabrina ganha por hora normal de trabalho.

b) Defina a função $S(h)$ que fornece o valor semanal recebido por Sabrina, em relação ao número de horas trabalhadas.

c) Determine quantas horas Sabrina precisa trabalhar para receber R$ 990,00 em uma semana.

d) Sabendo que Sabrina não pode trabalhar mais que 60 horas por semana, esboce o gráfico de $S(h)$.

28. Uma companhia de distribuição de mercadorias cobra R$ 20,00 pela entrega de qualquer encomenda com peso menor ou igual a 2 kg. Para cada quilograma excedente, a companhia cobra R$ 2,50.

a) Defina a função $C(p)$ que fornece o custo de entrega de uma encomenda em relação ao seu peso, p, em kg.

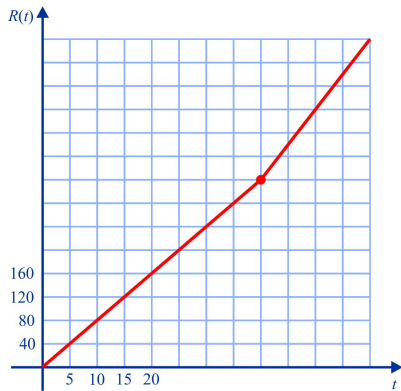
b) Determine (algebricamente) o peso máximo de uma encomenda que pode ser transportada com R$ 145,00.

c) Trace o gráfico de $C(p)$ para p no intervalo $[0,10]$.

29. A remuneração semanal de Roberto depende do número de horas de trabalho, que são divididas em horas normais e horas extras. O gráfico abaixo mostra a função $R(t)$, que fornece o valor em reais que Roberto recebe por semana, em função do número de horas trabalhadas, t. Com base no gráfico

a) Determine a expressão analítica de $R(t)$.

b) Determine a partir de quantas horas semanais de trabalho Roberto passa a ganhar por horas extras.

c) Determine quanto Roberto recebe pela hora normal e pela hora extra.

30. Duas locadoras de automóveis oferecem planos diferentes para a diária de um veículo econômico. A locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R$ 30,00, além de R$ 0,40 por quilômetro rodado. Já a locadora Mercúrio tem um plano mais elaborado: ela cobra uma taxa fixa de R$ 90,00 com uma franquia de 200 km, ou seja, o cliente pode percorrer 200 km sem custos adicionais. Entretanto, para cada km rodado além dos 200 km incluídos na franquia, o cliente deve pagar R$ 0,60.

a) Determine a função que descreve o custo diário de locação (em reais) de um automóvel na locadora Saturno, em relação à distância percorrida (em km).

b) Faça o mesmo para a locadora Mercúrio.

c) Represente em um mesmo plano Cartesiano as funções que você obteve nos itens (a) e (b).

d) Determine para quais intervalos cada locadora tem o plano mais barato.

e) Supondo que a locadora Saturno vá manter inalterada a sua taxa fixa, indique qual deve ser seu novo custo por km rodado para que ela, lucrando o máximo possível, tenha o plano mais vantajoso para clientes que rodam quaisquer distâncias.

31. A tabela abaixo fornece as informações usadas para o cálculo mensal do imposto de renda em 2012.

Renda mensal (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir (R$)
Até 1.637,11	0,0	0,00
De 1.637,12 a 2.453,50	7,5	122,78
De 2.453,51 a 3.271,38	15,0	306,80
De 3.271,39 a 4.087,65	22,5	552,15
Acima de 4.087,65	27,5	756,53

a) Escreva uma função $I(r)$ que forneça o valor mensal do imposto (em reais) em relação ao rendimento (em reais).

b) Calcule o valor do imposto pago por Joana, que recebe R$ 2.000,00 por mês, e por Lucas, que tem um salário mensal de R$ 4.500,00.

c) Esboce o gráfico de $I(r)$ para $0 \leq r \leq 6000$.

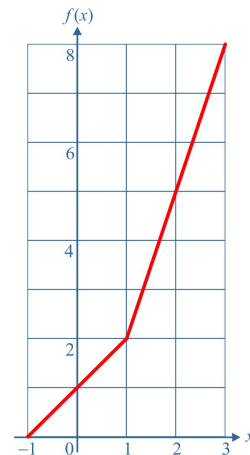
32. Em um mercado A, o arroz é vendido por peso, a R$ 2,50 o quilograma. Entretanto, se o consumidor adquirir 5 kg ou mais, o mercado dá um desconto de 12% do preço total do arroz. Já em um supermercado B, o arroz é vendido em embalagens fechadas. Neste supermercado, o saco de 1 kg custa R$ 2,50 e o saco de 5 kg custa R$ 10,00. Com base nesses dados,

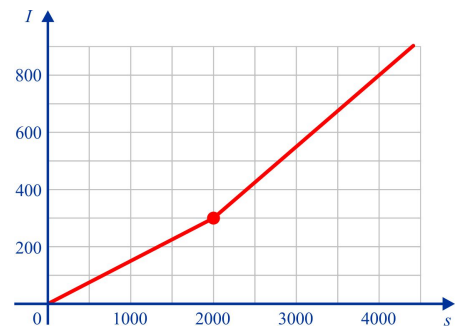
a) determine o menor valor que um consumidor pagaria, tanto no mercado A como no supermercado B, para comprar 7,2 kg de arroz;

b) para cada mercado, desenhe a curva que representa o custo do arroz em função da quantidade adquirida, em kg, supondo que o consumidor gaste sempre o menor valor possível. Considere que a quantidade adquirida varia entre 0 e 10 kg.

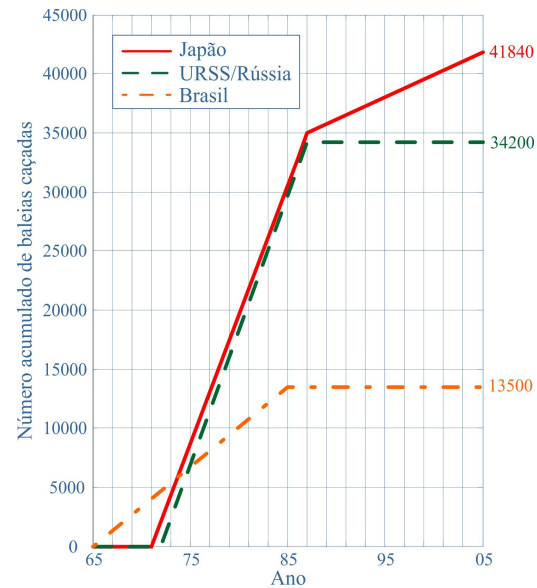
33. Considere a função $f(x) = 2x + |x + p|$, definida para x real.

a) Reescreva f como uma função definida por partes.

b) A figura abaixo mostra o gráfico de $f(x)$ para um valor específico de p. Determine esse valor.

c) Supondo, agora, que $p = -3$, determine os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 12$.

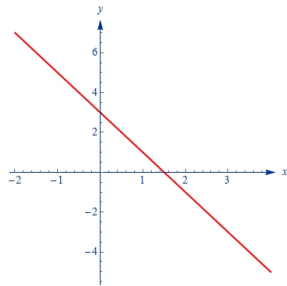
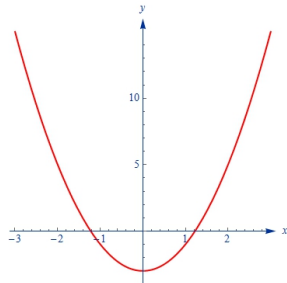
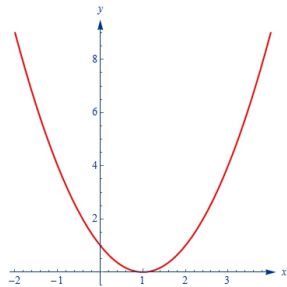
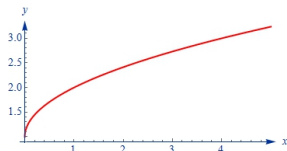
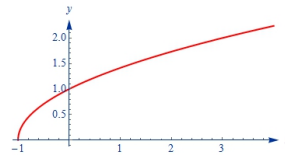
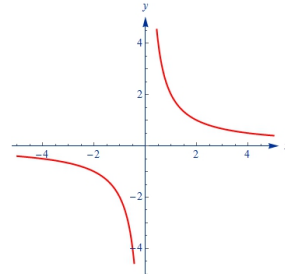
34. Em um país distante, o imposto de renda tem duas faixas, como mostrado na figura abaixo.

a) Escreva a função $I(s)$ que fornece o imposto pago por um cidadão que recebe um salário mensal s.

b) Determine o salário de um cidadão que paga $1500 de imposto por mês.

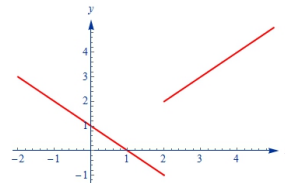
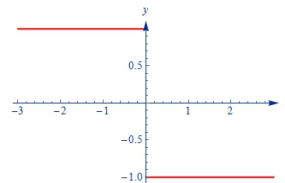
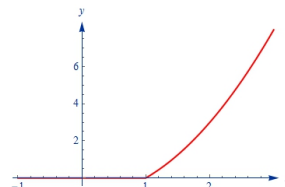
35. Na década de 1960, com a redução do número de baleias de grande porte, como a baleia azul, as baleias minke antárticas passaram a ser o alvo preferencial dos navios baleeiros que navegavam no hemisfério sul. O gráfico abaixo mostra o número acumulado aproximado de baleias minke antárticas capturadas por barcos japoneses, soviéticos/russos e brasileiros, entre o final de 1965 e o final de 2005.

a) Para cada país, escreva a função que fornece o número acumulado de baleias minke caçadas no período mostrado no gráfico.

b) Calcule o número aproximado de baleias caçadas por todos os três países entre o final de 1965 e o final de 1990.

Respostas dos Exercícios 3.7

1. a)

b)

c)

d)

e)

f)

2. a) $f(-2) = 1$; $f(-1) = 2$; $f(0) = 2$; $f(0{,}5) = 0{,}5$; $f(1) = -1$; $f(2) = -4$.

b) $f(-2) = -2$; $f(-1) = -1$; $f(0) = 0$; $f(0{,}5) = 0{,}5$; $f(1) = 1$; $f(2) = 4$.

3. a)

b)

c)

4. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1{,}5 \leq x \leq 3{,}5\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

b) $f(-1{,}5) = 1{,}5$; $f(0) = -0{,}5$; $f(2) = 2$

c) $-1{,}5 \leq x \leq -0{,}5$ e $1{,}5 \leq x \leq 2$

d) Crescente em $(0, 2)$. Decrescente em $(-1{,}5; 0)$ e em $(2; 3{,}5)$.

e) Ponto de máximo local: $x = 2$. Não há pontos de mínimo local.

5. a) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 2x - 1, & \text{se } 0 \leq x < 2; \\ 3, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < -1, \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, & \text{se } -1 \leq x < 2; \\ 8 - 2x, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1, & \text{se } x < 2, \\ x - 2, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$

6. a) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 3\}$

b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

c) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

7. a) $V(t) = 160 + 60t$

b) $t = 24$ horas

8. a) $f(t) = 120 + 7{,}5t$

b) 120 mil veículos

c) Em 2032

9. a) $E(t) = 0{,}225t + 5{,}2$

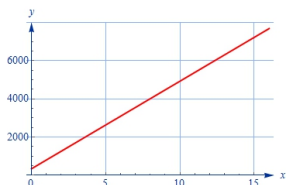
b) Em 2028

10. a) $f(t) = 47 + 11t$

b) 47 km

c) Em 23 meses

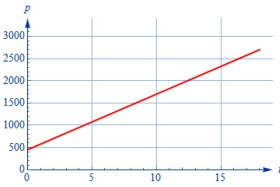
11. a) $E(t) = 342 + 458{,}75t$

b)

12. a) $c(t) = 2350 - 75t$

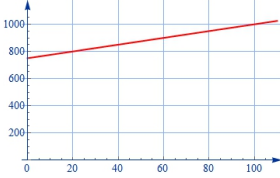
b) Em 2010

13. a) $F(x) = 75x$ b) 32 cm

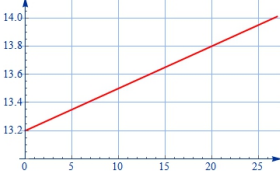
14. a) 1640 b) $d = \frac{t}{66}$ c) 2036

15. a) $p(t) = 125t + 450$
b) 450 euros
c)

d) 38 meses

16. a) $P(t) = 25 + 15t$ b) 5 meses

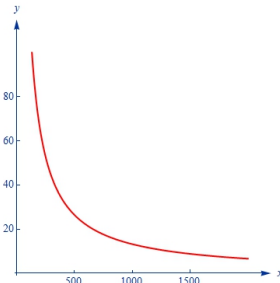
17. a) $P(T) = 5T/2 + 750$
b)

c) 962,5 mmHg
d) $-20°$C

18. a) $S(t) = -\frac{2t}{3} + \frac{50}{3}$ b) Em 2022

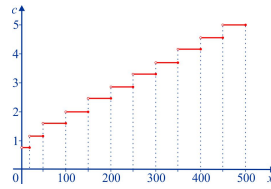
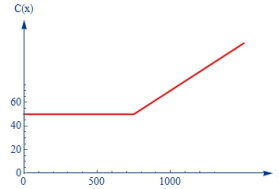
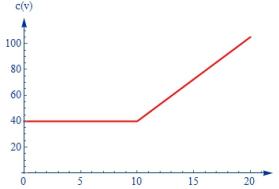
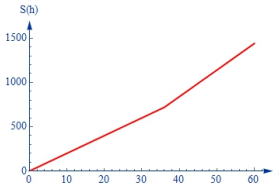
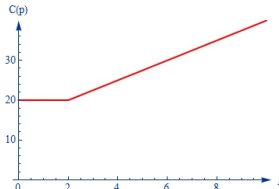
19. a) $T(t) = 0{,}03t + 13{,}2$
b) 13,86°C
c)

d) A inclinação corresponde ao aumento anual de temperatura. O intercepto do eixo-y é a temperatura em 1990.

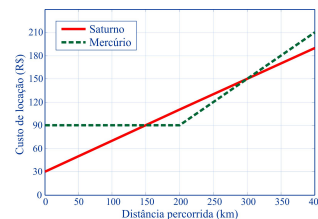
20. a) 91° b) $v(x) = 0{,}9x + 2$

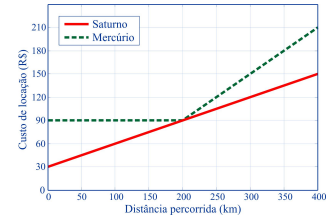
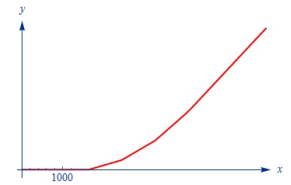
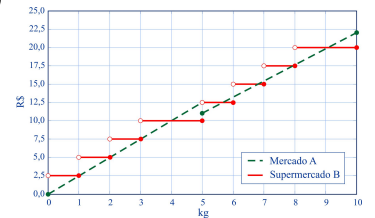
21. a) $F(c) = \frac{145{,}2}{x}$ b) 580,8 Hz

22. a) 13,2%
b) $f(x) = \frac{13200}{x}$
c)

23. a) $D(v) = \frac{v^2}{200}$ b) 60,5 m

24.

$$c(x) = \begin{cases} 0{,}75; & \text{se } x \le 20; \\ 1{,}15; & \text{se } 20 < x \le 50; \\ 1{,}60; & \text{se } 50 < x \le 100; \\ 2{,}00; & \text{se } 100 < x \le 150; \\ 2{,}45; & \text{se } 150 < x \le 200; \\ 2{,}85; & \text{se } 200 < x \le 250; \\ 3{,}30; & \text{se } 250 < x \le 300; \\ 3{,}70; & \text{se } 300 < x \le 350; \\ 4{,}15; & \text{se } 350 < x \le 400; \\ 4{,}55; & \text{se } 400 < x \le 450; \\ 5{,}00; & \text{se } 450 < x \le 500. \end{cases}$$

25. a) $C(x) = \begin{cases} 50, & \text{se } x \le 750, \\ 50 + 0{,}08(x - 750), & \text{se } x > 750. \end{cases}$
b) 1000 MB
c)

26. a) $c(v) = \begin{cases} 40, & \text{se } v \le 10, \\ 40 + 6{,}5(v - 10), & \text{se } v > 10. \end{cases}$
b) R$ 79,00
c)

27. a) $r = 20$ reais por hora
b) $S(h) = \begin{cases} 20h, & \text{se } h \le 36, \\ 720 + 30(h - 36), & \text{se } h > 36. \end{cases}$
c) R$ 45 horas
d)

28. a) $C(p) = \begin{cases} 20, & \text{se } p \le 2, \\ 20 + 2{,}5(p - 2), & \text{se } p > 2. \end{cases}$
b) 52 kg
c)

29. a) $R(t) = \begin{cases} 8t, & \text{se } t \le 40, \\ 12t - 160, & \text{se } t > 40. \end{cases}$
b) A partir de 40 h.
c) R$ 8,00 pela hora normal e R$ 12,00 pela hora extra.

30. a) $c_S(d) = 30 + 0{,}4d$
b) $c_M(d) = \begin{cases} 90, & \text{se } t \le 200, \\ 90 + 0{,}6(d - 200), & \text{se } t > 200. \end{cases}$
c)

d) A locadora Mercúrio é a mais barata para 150 km < d < 300 km. Por sua vez, a locadora Saturno é mais vantajosa para d < 150 km e para d > 300 km.

e) A locadora saturno deve cobrar R$ 0,30 por quilômetro rodado (vide gráfico abaixo).

31. a) $I(r) =$
$\begin{cases} 0, & \text{se } r \le 1637{,}11, \\ 0{,}075r - 122{,}78, & \text{se } 1637{,}11 < r \le 2453{,}50, \\ 0{,}150r - 306{,}80, & \text{se } 2453{,}50 < r \le 3271{,}38, \\ 0{,}225r - 552{,}15, & \text{se } 3271{,}38 < r \le 4087{,}65, \\ 0{,}275r - 756{,}35, & \text{se } r > 4087{,}65. \end{cases}$
b) Joana: R$ 27,22. Lucas: R$ 480,97.
c)

32. a) Em A: R$ 15,84. Em B: R$ 17,50.
b)

33. a) $f(x) = \begin{cases} 3x + p, & \text{se } x \ge -p, \\ x - p, & \text{se } x < -p. \end{cases}$
b) $p = -1$
c) $x = 5$

34. a) $I(s) = \begin{cases} 0{,}15s, & \text{se } s \le 2000, \\ 0{,}25s - 200, & \text{se } s > 2000. \end{cases}$
b) $ 6800

35. a) Japão: $J(t) =$
$\begin{cases} 0, & \text{se } t \le 1971, \\ 2187{,}5(t - 1971), & \text{se } 1971 < t \le 1987 \\ 380(t - 1987), & \text{se } t > 1987 \end{cases}$

URSS/Rússia: $R(t) =$
$\begin{cases} 0, & \text{se } t \le 1972, \\ 2280(t - 1972), & \text{se } 1972 < t \le 1987 \\ 34200, & \text{se } t > 1987 \end{cases}$

Brasil: $B(t) =$
$\begin{cases} 675(t - 1965), & \text{se } t \le 1985 \\ 13500, & \text{se } t > 1985 \end{cases}$

b) 83840 baleias

3.8 Transformação de funções

Nas aplicações práticas da matemática, quase nunca usamos funções "puras", como $q(x) = x^2$ ou $m(x) = |x|$. Normalmente, é preciso deslocar e esticar o gráfico de uma função, para que ele se adeque aos dados do problema que se pretende resolver.

Como exemplo, vejamos como obter uma função cujo gráfico passa pelos pontos $(1, -2)$ e $(5,6)$ a partir da função $f(x) = x$. Os dois passos necessários para essa transformação são mostrados na Figura 3.77.

Em primeiro lugar, esticamos verticalmente a reta $y = f(x)$ (vide Figura 3.77a) até obter a função $g(x) = 2x$ (que aparece na Figura 3.77b), cujo gráfico tem uma inclinação adequada. Em seguida, deslocamos a reta duas unidades para a direita, obtendo $h(x) = 2(x-2)$, cujo gráfico passa pelos pontos desejados (vide Figura 3.77c).

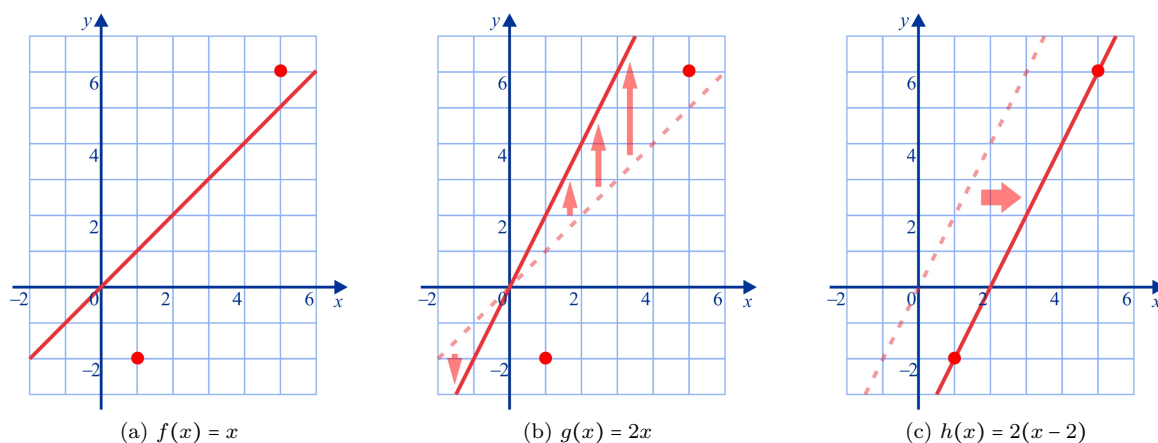



Figura 3.77: Transformação que leva o gráfico de $f(x) = x$ no gráfico de $h(x) = 2(x-2)$.

Essas e outras transformações são exploradas nas subseções abaixo.

■ Deslocamento vertical e horizontal

Figura 3.78: Deslocamento vertical do gráfico de uma função.

Deslocamento vertical

Se c é uma constante real positiva, então

1. Para mover c unidades para **cima** o gráfico de $y = f(x)$, usamos

$$y = f(x) + c.$$

2. Para mover c unidades para **baixo** o gráfico de $y = f(x)$, usamos

$$y = f(x) - c.$$

A Figura 3.78 mostra o deslocamento vertical do gráfico da função

$$f(x) = x^2,$$

que é apresentada em vermelho. Para deslocar o gráfico de $y = f(x)$ exatas 2 unidades para cima, recorremos à função

$$g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2,$$

cujo gráfico corresponde à curva verde. Já para deslocar uma unidade para baixo o gráfico de $y = f(x)$, usamos

$$h(x) = f(x) - 1 = x^2 - 1,$$

cujo gráfico é mostrado em azul.

Figura 3.79: Gráficos de $f(x) = \frac{x^3}{2} - x^2$ e $g(x) = \frac{x^3}{2} - x^2 - 3$.

Problema 1. Deslocamento vertical

A partir do gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{2} - x^2$, trace o gráfico de $g(x) = \frac{x^3}{2} - x^2 - 3$.

Solução.

O gráfico de $f(x)$ corresponde à curva vermelha mostrada na Figura 3.79. Para obter o gráfico de $g(x)$, basta reparar que

$$g(x) = f(x) - 3.$$

Sendo assim, podemos traçar a curva $y = g(x)$ deslocando $y = f(x)$ três unidades para baixo. O gráfico resultante é a curva verde da Figura 3.79.

Deslocamento horizontal

Se c é uma constante real positiva, então

1. O gráfico de $y = f(x)$ é movido c unidades para a **direita** se consideramos

$$y = f(x - c).$$

2. O gráfico de $y = f(x)$ é movido c unidades para a **esquerda** se consideramos

$$y = f(x + c).$$

O deslocamento horizontal do gráfico de $f(x) = x^2$ é mostrado na Figura 3.80. Observe que um deslocamento de 2 unidades para a direita foi obtido recorrendo-se à função

$$g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2,$$

enquanto o deslocamento de uma unidade para a esquerda foi fornecido pela função

$$h(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

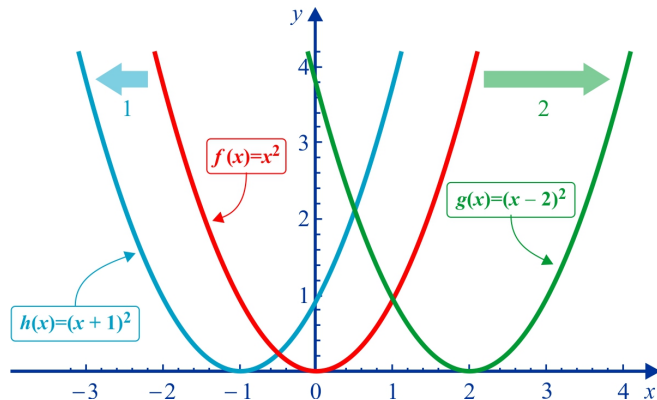



Figura 3.80: Deslocamento horizontal do gráfico de uma função.

Problema 2. Deslocamento horizontal

A partir do gráfico de $f(x) = |x|$, trace o gráfico de $g(x) = |x - 3|$.

Solução.

O gráfico de $f(x)$ é mostrado em vermelho na Figura 3.81. Observando que

$$g(x) = f(x - 3),$$

concluímos que é possível obter a curva $y = g(x)$ deslocando $y = f(x)$ três unidades para a direita. O gráfico de $g(x)$ é apresentado em verde na Figura 3.81.

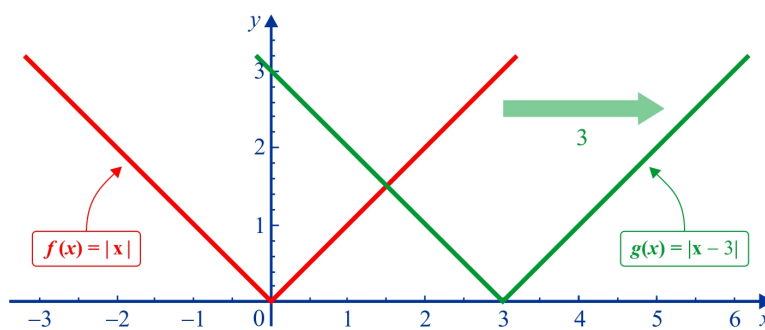



Figura 3.81: Gráficos de $f(x) = |x|$ e $g(x) = |x - 3|$.

Reflexão

Outro tipo comum de transformação é a reflexão de uma função em relação a um dos eixos coordenados. Essa transformação é apresentada no quadro abaixo.

Reflexão

1. O gráfico de $y = -f(x)$ é a reflexão de $y = f(x)$ em relação ao **eixo-x**.

2. O gráfico de $y = f(-x)$ é a reflexão de $y = f(x)$ em relação ao **eixo-y**.

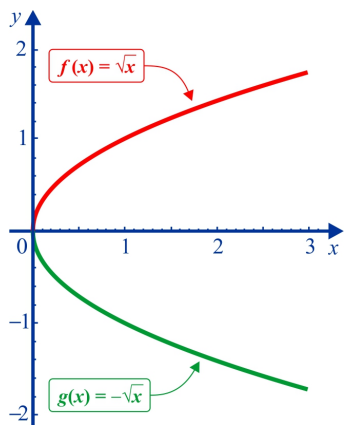



Figura 3.82: Reflexão vertical do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

A Figura 3.82 mostra o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, bem como o gráfico de $g(x) = -f(x) = -\sqrt{x}$, que foi obtido refletindo-se o gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo-x.

Por sua vez, a Figura 3.83 mostra o gráfico de $h(x) = f(-x) = \sqrt{-x}$, que é a reflexão do gráfico de $f(x)$ com relação ao eixo-y.

Lembre-se de que a raiz quadrada só está definida para $x \geq 0$, de modo que o gráfico de $y = \sqrt{x}$ só envolve o primeiro quadrante, e o gráfico de $y = \sqrt{-x}$ só envolve o segundo quadrante.

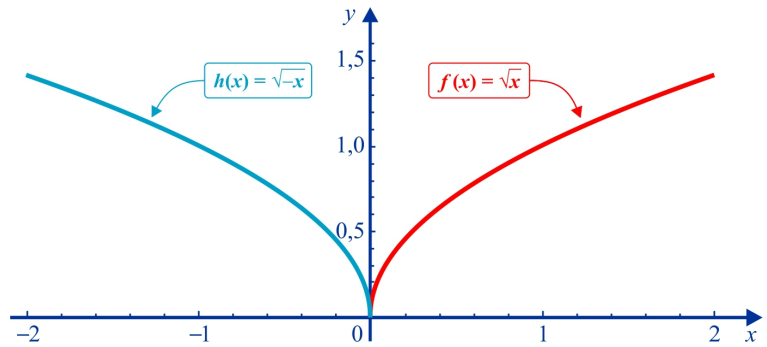



Figura 3.83: Reflexão horizontal do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

Problema 3. Reflexão e deslocamento de um gráfico

Com base no gráfico de $f(x) = x^2$, obtenha o gráfico de $h(x) = 3 - x^2$.

Solução.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = -x^2$ (c) $h(x) = 3 - x^2$

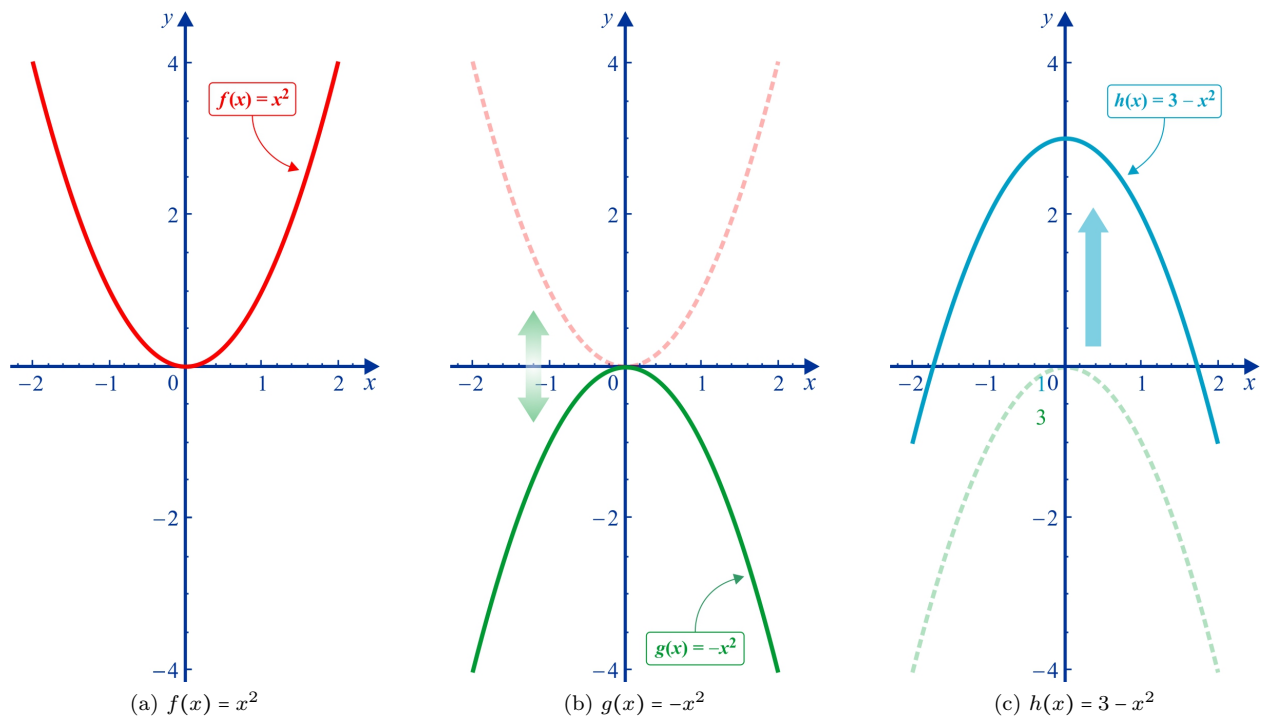



Figura 3.84: Transformações que levam o gráfico de $f(x) = x^2$ no de $h(x) = 3 - x^2$.

Para transformar o gráfico de $f(x)$ em $h(x)$ é preciso definir, em primeiro lugar, a função

$$g(x) = -f(x) = -x^2,$$

cujo gráfico é o reflexo da curva $y = f(x)$ em relação ao eixo-x, conforme ilustrado na Figura 3.84b. Finalmente, devemos mover o gráfico de $g(x)$ três unidades para cima, de forma a obter

$$h(x) = g(x) + 3 = 3 - x^2,$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 3.84c.

■ Esticamento e encolhimento

O último tipo de transformação que podemos aplicar a uma função é o seu encolhimento ou esticamento, que pode ser tanto vertical, como horizontal.

Esticamento e encolhimento vertical

Se c é uma constante real positiva, então

1. se $c > 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é **esticado verticalmente** por um fator c quando traçamos $y = c\,f(x)$;
2. se $0 < c < 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é **encolhido verticalmente** por um fator c quando traçamos $y = c\,f(x)$.

A Figura 3.85 ilustra o esticamento e o encolhimento vertical do gráfico da função $f(x) = x^3 - x$, que aparece em vermelho. Para traçar o gráfico da função

$$g(x) = 2f(x) = 2(x^2 - x),$$

é preciso esticar verticalmente o gráfico de f por um fator de 2, como mostrado na Figura 3.85a. Já o gráfico de

$$h(x) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{x^3 - x}{2}$$

é obtido através do encolhimento do gráfico de f, também por um fator de 2, como se observa na Figura 3.85b.

(a) $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = 2(x^3 - x)$

(b) $f(x) = x^3 - x$ e $h(x) = \frac{x^3 - x}{2}$

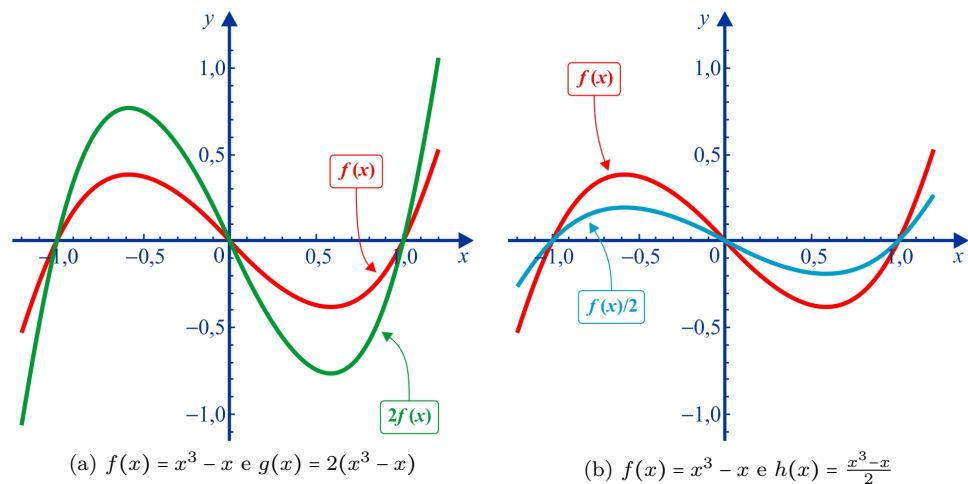



Figura 3.85: Esticamento e encolhimento vertical de $f(x) = x^3 - x$.

Problema 4. Esticamento vertical e translação de um gráfico

Indique quais transformações devem ser aplicadas ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ para se obter o gráfico de $h(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1$.

Solução.

Para a obtenção do gráfico de $y = h(x)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$ é preciso fazer duas transformações.

- Primeiramente, é preciso esticar verticalmente o gráfico de f por um fator de $\frac{3}{2}$, de modo a se obter o gráfico de

$$g(x) = \frac{3}{2}f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

que é mostrado em verde na Figura 3.86b.

- Em seguida, deve-se deslocar o gráfico de g uma unidade para baixo, para produzir o gráfico de

$$h(x) = g(x) - 1 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1,$$

que corresponde à curva azul da Figura 3.86c.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $g(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ (c) $h(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1$

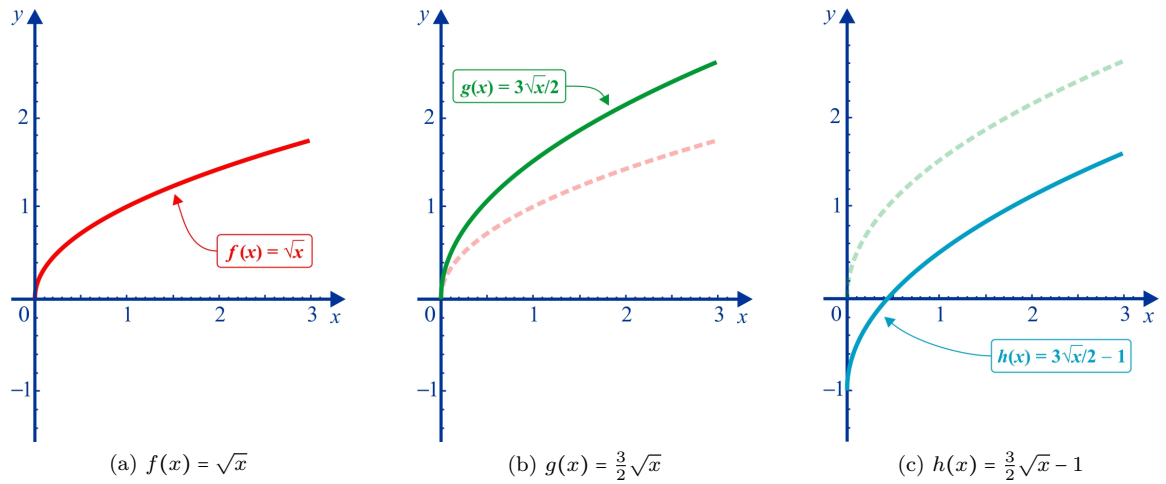



Figura 3.86: Transformações que levam o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no de $h(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1$.

Esticamento e encolhimento horizontal

Se c é uma constante real positiva, então

1. se $c > 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é **encolhido horizontalmente** por um fator $\frac{1}{c}$ quando traçamos $y = f(cx)$;
2. se $0 < c < 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é **esticado horizontalmente** por um fator $\frac{1}{c}$ quando traçamos $y = f(cx)$.

As deformações horizontais do gráfico de $f(x) = x^2$ são apresentadas na Figura 3.87. O gráfico de

$$g(x) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

é a curva verde da Figura 3.87a, que foi obtida através de um encolhimento do gráfico de $y = f(x)$. Observe que $c = 2$ e que o encolhimento se dá por um fator $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.

Por sua vez, dada a constante $c = \frac{1}{2}$, o esticamento de $y = f(x)$ por um fator $\frac{1}{c} = 2$ é apresentado em azul na Figura 3.87b. A curva azul corresponde ao gráfico de

$$h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}.$$

(a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = (2x)^2$

(b) $f(x) = x^2$ e $h(x) = (\frac{1}{2}x)^2$

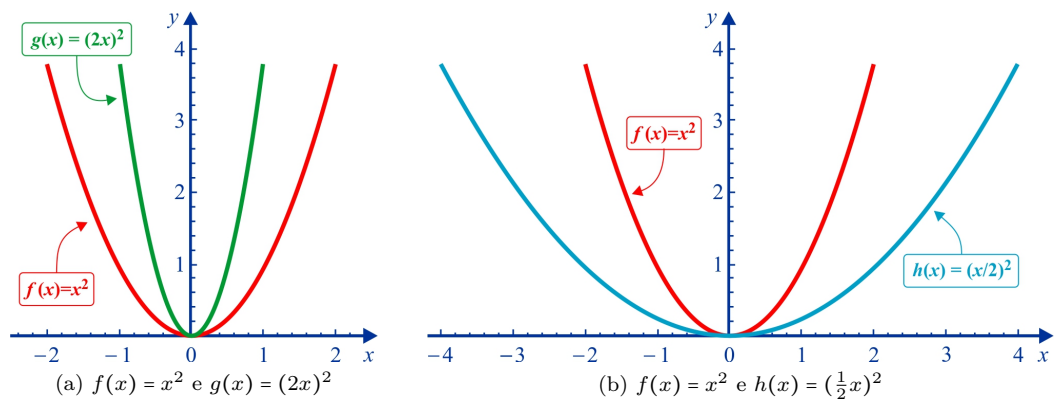



Figura 3.87: Encolhimento e esticamento horizontal de $f(x) = x^2$.

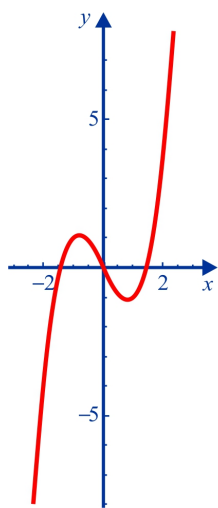



Figura 3.88: Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x$.

Problema 5. Encolhimento e esticamento horizontal de um gráfico

A partir do gráfico de $f(x) = x^3 - 2x$, mostrado na Figura 3.88, esboce os gráficos de

a) $g(x) = f(\frac{5}{2}x)$

b) $h(x) = f(\frac{2}{5}x)$

Solução.

a) Para obter o gráfico de $y = f(\frac{5}{2}x)$, devemos encolher o gráfico de $y = f(x)$ por um fator

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{5/2} = \frac{2}{5},$$

já que $c = \frac{5}{2} > 1$. A curva encontrada é mostrada em azul na Figura 3.89a. A função g correspondente a esse encolhimento é dada por

$$g(x) = f\left(\frac{5}{2}x\right) = \left(\frac{5}{2}x\right)^3 - 2\left(\frac{5}{2}x\right) = \frac{125x^3}{8} - 5x.$$

b) A função h é definida por

$$h(x) = f\left(\frac{2}{5}x\right) = \left(\frac{2}{5}x\right)^3 - 2\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{8x^3}{125} - \frac{4x}{5}.$$

O gráfico de $y = h(x)$ pode ser obtido esticando-se o gráfico de $y = f(x)$ por um fator

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2/5} = \frac{5}{2}.$$

A curva resultante é aquela apresentada em verde na Figura 3.89b.

(a) $g(x) = 125x^3/8 - 5x$ (b) $h(x) = 8x^3/125 - 4x/5$

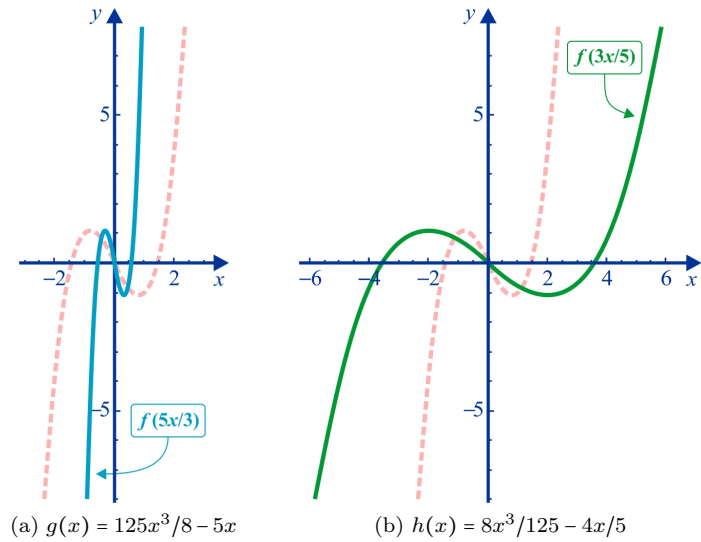



Figura 3.89: Gráficos de $g(x) = f(5x/2)$ e $h(x) = f(2x/5)$.

Exercícios 3.8

1. Para cada função f abaixo, indique a função g que é obtida movendo f três unidades para baixo e a função h que é obtida movendo f cinco unidades para a direita.

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = x^2 - x$

2. Para cada função f abaixo, indique a função g que é obtida movendo f quatro unidades para cima e a função h que é obtida movendo f oito unidades para a esquerda.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| + \frac{1}{4}}$ b) $f(x) = x^3 - 5x$

3. Para cada função f abaixo, trace os gráficos de $y = f(x)$, $y = f(x)+2$, $y = f(x)-1$, $y = f(x+2)$ e $y = f(x-1)$.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = 3 - x^2$

c) $f(x) = x^4 - 4x^2$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ 2x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

4. A partir do gráfico de $f(x) = x + 2$, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $g(x) = x + 5$

b) $g(x) = 3x + 2$

c) $g(x) = 3(x + 2)$

d) $g(x) = -(x + 2)$

5. A partir do gráfico de $f(x) = |x|$, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $g(x) = |x + 3|$

b) $g(x) = |3x|$

c) $g(x) = 3|x|$

d) $g(x) = -|x|$

e) $g(x) = |2x| - 1$

f) $g(x) = 1 - |x - 1|$

6. A partir do gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $g(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

b) $g(x) = \sqrt[3]{3x}$

c) $g(x) = 3\sqrt[3]{x}$

d) $g(x) = -\sqrt[3]{x}$

e) $g(x) = \sqrt[3]{2x} - 1$

f) $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x - 1}$

7. A partir da função $f(x)$ cujo gráfico é dado abaixo, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $g(x) = f(x + 3)$

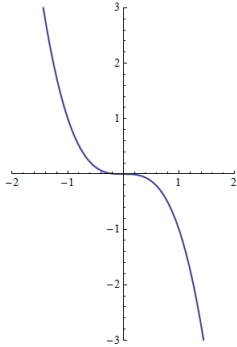
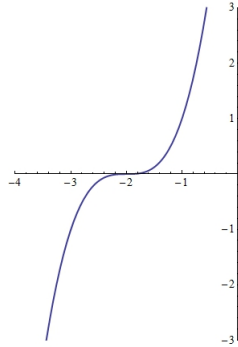
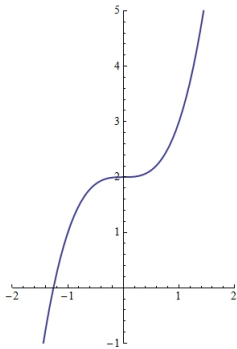
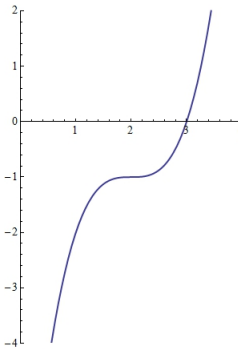
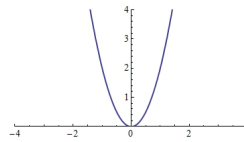
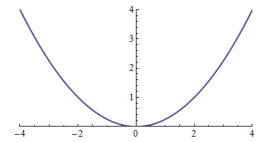
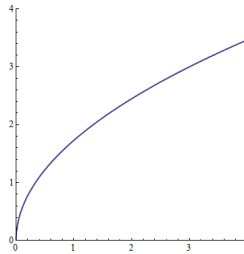
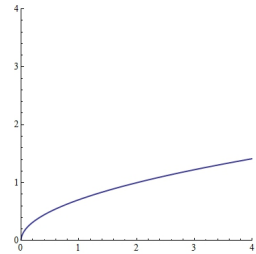
b) $g(x) = f(3x)$

c) $g(x) = 3f(x)$

d) $g(x) = -f(x)$

e) $g(x) = f(2x) - 1$

f) $g(x) = 1 - f(x - 1)$

8. Identifique as funções cujos gráficos são mostrados abaixo, sabendo que foram obtidas através de deslocamentos horizontais e verticais do gráfico de $f(x) = x^3$.

a) c)

b) d)

9. Identifique as funções cujos gráficos são mostrados abaixo, sabendo que elas foram obtidas através de um esticamento ou encolhimento vertical do gráfico de $f(x) = x^2$.

a) b)

10. Identifique as funções cujos gráficos são mostrados abaixo, sabendo que elas foram obtidas através de um esticamento ou encolhimento horizontal do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

a) b)

11. Dada a função $f(x) = x^2$, defina a função g obtida movendo-se f cinco unidades para baixo e quatro unidades para a esquerda.

12. Dada a função $f(x) = x^3$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eico-y e movendo-a três unidades para cima.

13. Dada a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eico-x e movendo-a uma unidade para a direita.

14. Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eico-y e movendo-a seis unidades para cima e duas unidades para a esquerda.

15. Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eico-x e do eixo-y e movendo-a duas unidades para baixo.

Respostas dos Exercícios 3.8

1. a) $g(x) = 2x - 4$; $h(x) = 2(x - 5) - 1$

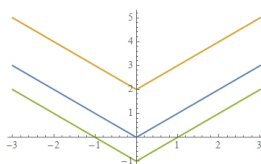
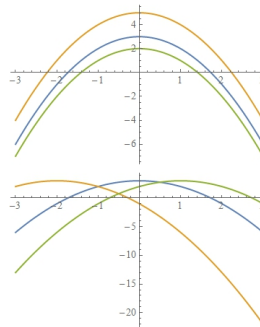
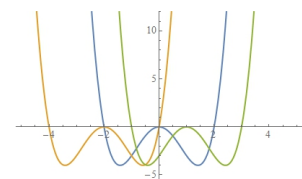
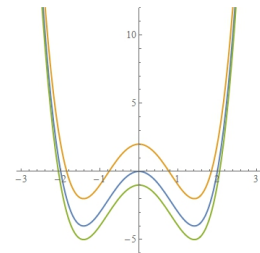
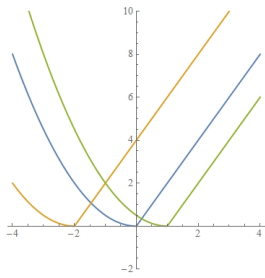
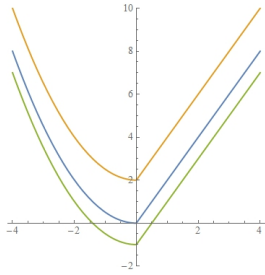
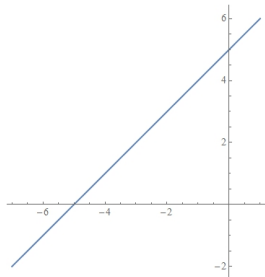
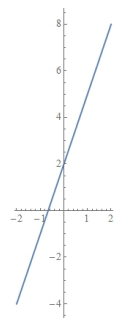
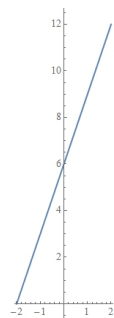
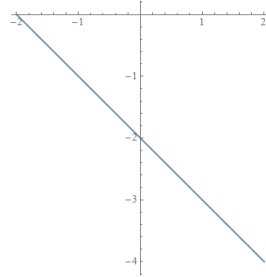
b) $g(x) = x^2 - x - 3$; $h(x) = (x-5)^2 - (x-5)$

2. a) $g(x) = \sqrt{x^2 - |x| + \frac{1}{4}} + 4$;

$h(x) = \sqrt{(x+8)^2 - |x+8| + \frac{1}{4}}$

b) $g(x) = x^3 - 5x + 4$;

$h(x) = (x+8)^3 - 5(x+8)$

3. a)

b)

c)

d)

4. a)

b)

c)

d)

5. a)

b)

c)

d)

e)

f)

6. a)

b)

c)

d)

e)

f)

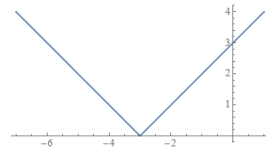
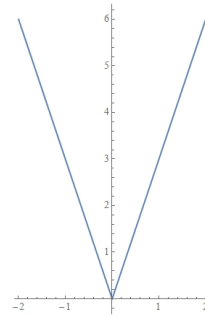
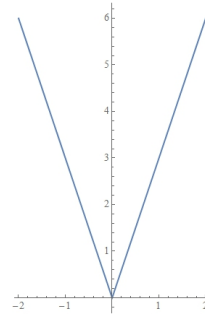
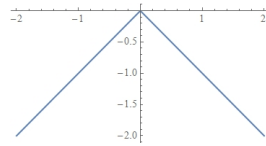
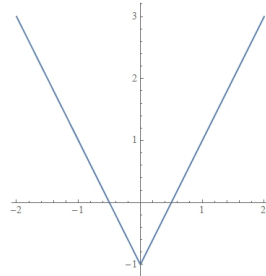
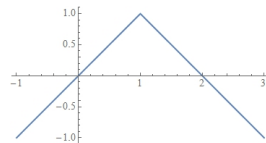
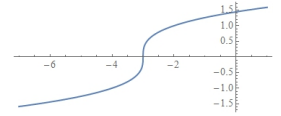
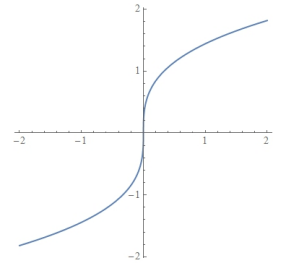
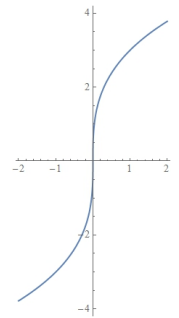
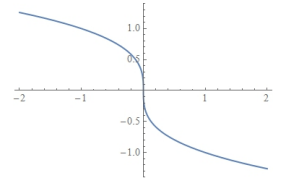
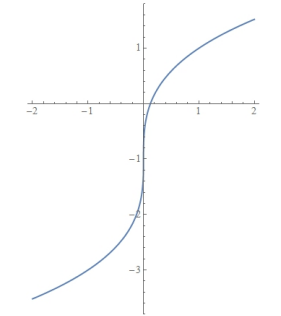
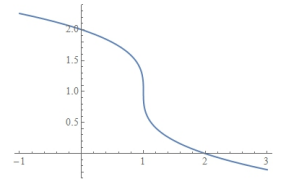
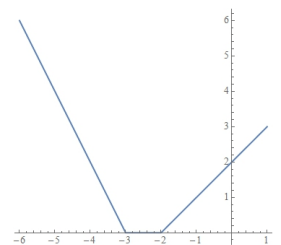
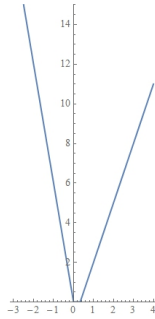
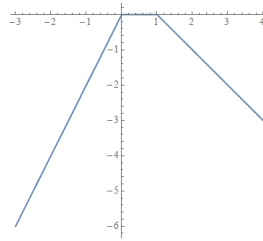
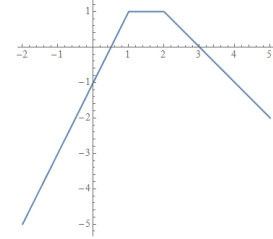
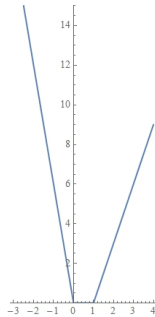
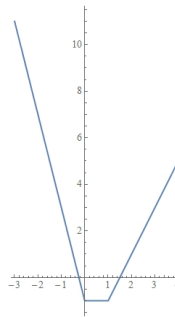
7. a)

b)

c)

d)

e)

f)

8. a) $g(x) = -x^3$
b) $g(x) = x^3 + 2$
c) $g(x) = (x+2)^3$
d) $g(x) = (x-2)^3 - 1$

9. a) $g(x) = 2x^2$ b) $g(x) = \frac{x^2}{4}$

10. a) $g(x) = \sqrt{3x}$ b) $g(x) = \sqrt{x/2}$

11. $g(x) = (x+4)^2 - 5$

12. $g(x) = 3 - x^3$

13. $g(x) = -\sqrt{4-(x-1)^2}$

14. $g(x) = \sqrt{-(x+2)} + 6$

15. $g(x) = -\sqrt{-x} - 2$

3.9 Combinação e composição de funções

Dadas duas funções f e g, é possível obter novas funções por meio das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, comumente usadas com números reais. Em outras palavras, é possível definir $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g. Tomando, por exemplo, as funções

$$f(x) = x^2 - 2 \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3x - x^2,$$

podemos escrever

$$f(x) + g(x) = (x^2 - 2) + (3x - x^2) = 3x - 2 \qquad \text{(Soma)}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 2) - (3x - x^2) = 2x^2 - 3x - 2 \qquad \text{(Diferença)}$$

$$f(x)g(x) = (x^2 - 2)(3x - x^2) = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 6x \qquad \text{(Produto)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2}{3x - x^2} \qquad \text{(Quociente)}$$

Essas operações estão resumidas no quadro abaixo, no qual também discutimos o domínio da função resultante de cada combinação.

Soma, subtração, multiplicação e divisão de funções

Dadas as funções f e g, cujos domínios são A e B, respectivamente, podemos definir

1. Soma de f e g: $(f+g)(x) = f(x) + g(x).$

2. Diferença entre f e g: $(f-g)(x) = f(x) - g(x).$

Soma, subtração, multiplicação e divisão de funções (cont.)

3. Produto de f e g: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

4. Quociente de f por g: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

O domínio da função resultante é $A \cap B$, salvo no caso do quociente, para o qual também se exige que os membros do domínio satisfaçam $g(x) \neq 0$.

Problema 1. Combinação de funções

Sejam dadas as funções $f(x) = 3 - x$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$.

a) Determine $f+g$, $f-g$, $g-f$, fg, f/g e g/f e os respectivos domínios.

b) Determine os valores dessas funções para $x = 10$

Solução.

a) A função f está definida para todo x real, de modo que $D_f = \mathbb{R}$. Por sua vez, a função g só está definida para $x - 1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$, pois o termo dentro da raiz não pode ser negativo. Logo, $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.

Para as combinações que não envolvem quocientes, o domínio é dado por

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, \infty) = [1, \infty).$$

Para f/g, é preciso satisfazer a condição adicional

$$g(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1.$$

Nesse caso, o domínio exclui $x = 1$, de modo que temos

$$D = (1, \infty).$$

Já para o quociente g/f, no qual f aparece no denominador, exigimos que

$$f(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 3.$$

Assim, precisamos excluir $x = 3$ do domínio, o que nos fornece

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 3\}.$$

A tabela abaixo resume as combinações solicitadas no enunciado, bem como os domínios correspondentes.

Combinação	Domínio
$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 3-x+\sqrt{x-1}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 3-x-\sqrt{x-1}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
$(g-f)(x) = g(x)-f(x) = \sqrt{x-1}-3+x$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
$(fg)(x) = f(x)g(x) = (3-x)\sqrt{x-1}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3-x}{\sqrt{x-1}}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{3-x}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 3\}$

b) Os valores das funções em $x = 10$ são dados abaixo.

$$(f+g)(10) = 3-10+\sqrt{10-1} = -7+\sqrt{9} = -4$$

$$(f-g)(10) = 3-10-\sqrt{10-1} = -7-\sqrt{9} = -10$$

$$(g-f)(10) = \sqrt{10-1}-3+10 = \sqrt{9}+7 = 10$$

$$(fg)(10) = (3-10)\sqrt{10-1} = -7\sqrt{9} = -21$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(10) = \frac{3-10}{\sqrt{10-1}} = \frac{-7}{\sqrt{9}} = -\frac{7}{3}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(10) = \frac{\sqrt{10-1}}{3-10} = \frac{\sqrt{9}}{-7} = -\frac{3}{7}$$

Agora, tente o Exercício 1.

Problema 2. Soma de funções dadas em gráficos

Dadas as funções f e g cujos gráficos são mostrados na Figura 3.90, determine o gráfico da função $h = f + g$.

Figura 3.90: Funções do Problema 2.

Solução.

Para representar o gráfico de $y = h(x)$, devemos somar os valores $f(x)$ e $g(x)$ em cada ponto x do domínio de $f+g$. A Figura 3.91a mostra a soma para $x = -2$ e $x = 4$.

- Para $x = -2$, temos
$$h(-2) = f(-2)+g(-2) = 2{,}5+(-1) = 1{,}5.$$
Observe que o ponto $(-2, h(-2))$ foi obtido deslocando-se $(-2, f(-2))$ uma unidade para baixo, pois $g(-2) = -1$.
- Para $x = 4$, temos
$$h(4) = f(4)+g(4) = 2{,}5+1 = 3{,}5.$$

Nesse caso, o ponto $(4,h(4))$ foi obtido deslocando-se $(4,f(4))$ uma unidade para cima, já que $g(4) = 1$.

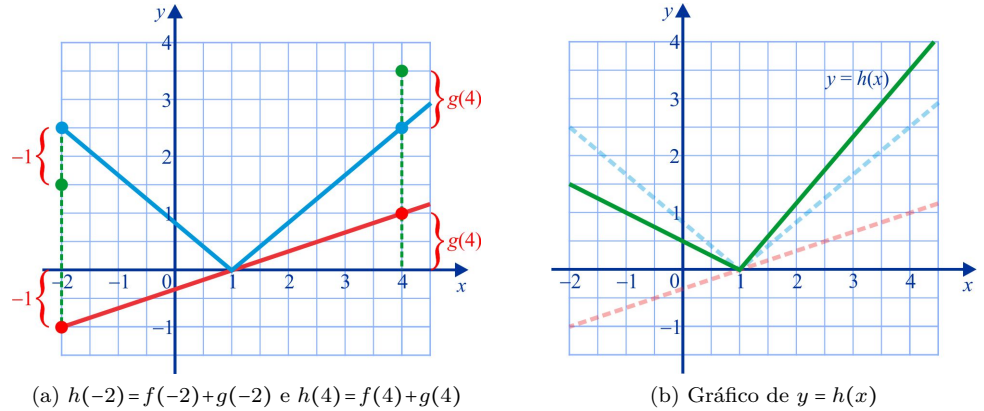
(a) $h(-2) = f(-2) + g(-2)$ e $h(4) = f(4) + g(4)$

(b) Gráfico de $y = h(x)$

Figura 3.91

Além disso, também constatamos que $f(1) = 0$ e $g(1) = 0$, de modo que

$$h(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0.$$

Observe que f é uma função linear por partes e g é uma função afim. Como a soma de duas funções afins (ou lineares) é uma função afim, o gráfico de h pode ser obtido em duas etapas:

- Para $x \leq 1$, basta traçar a semirreta que passa pelos pontos $(-2;\ 1{,}5)$ e $(1{,}0)$.
- Para $x \leq 1$, basta traçar a semirreta que passa pelos pontos $(1{,}0)$ e $(4;\ 3{,}5)$.

A curva $y = h(x)$ resultante é mostrada na Figura 3.91b.

Agora, tente o Exercício 5.

Problema 3. Crescimento populacional

Em uma cidade, o número de nascimentos no ano t é dado por $n(t)$, enquanto o número de mortes é dado por $m(t)$. Além disso, o número de migrantes que chegaram à cidade no ano t é igual a $i(t)$ e o número de pessoas de deixaram a cidade é fornecido por $e(t)$. Supondo que $p(t)$ seja o número de habitantes da cidade no início do ano t, determine a função r que fornece a taxa percentual de crescimento populacional da cidade, em relação ao tempo (em anos).

Solução.

A variação do número de habitantes da cidade no ano t é dada por

$$\underbrace{n(t)}_{\text{nascimentos}} - \underbrace{m(t)}_{\text{mortes}} + \underbrace{i(t)}_{\text{imigração}} - \underbrace{e(t)}_{\text{emigração}}$$

Em termos percentuais, essa variação é escrita como

$$r(t) = \frac{100[n(t) - m(t) + i(t) - e(t)]}{p(t)}.$$

Agora, tente o Exercício 3.

■ Composição de funções

Compor duas funções é o mesmo que aplicar uma função ao resultado de outra função. Dizendo assim, damos a impressão de que funções compostas são um tópico complicado, o que não é verdade. De fato, a composição é uma ideia simples, à qual recorremos quando queremos encontrar uma função que faça o trabalho de duas, como mostram os exemplos abaixo.

Problema 4. Pressão dos pneus

A pressão de um gás, como o ar que há dentro de um pneu, é função da temperatura. Para o pneu do carro de Juca, a relação entre a temperatura, t (em °C), e a pressão P (em bar) é dada aproximadamente por

$$P(t) = 0{,}007t + 1{,}9.$$

Suponha que Juca queira saber qual é a pressão de seu pneu nesse momento, mas só disponha de um termômetro em escala Fahrenheit. Se Juca sabe que o pneu está a uma temperatura de 104°F, qual será a pressão do pneu?

Solução.

A função P apresentada acima exige temperaturas em graus Celsius. Assim, para ajudar Juca a calcular a pressão do pneu, precisamos de uma função que converta para graus Celsius um valor x em graus Fahrenheit. Como vimos na Seção 3.7, essa função é

$$C(x) = \frac{5x - 160}{9}.$$

Dispondo das funções P e C, podemos determinar a pressão em dois passos:

- Primeiramente, determinamos a temperatura do pneu em graus Celsius, calculando
$$C(104) = \frac{5 \cdot 104 - 160}{9} = 40°\text{C}.$$

- Em seguida, aplicamos a função P para obter a pressão do pneu:
$$P(40) = 0{,}007 \cdot 40 + 1{,}9 \approx 2{,}2 \text{ bar}.$$

No problema acima, foi preciso empregar duas funções para obter a pressão a partir de uma temperatura em Fahrenheit. Supondo que Juca vá calcular a pressão de seu pneu com uma certa frequência, é possível imaginar o incômodo que ele terá ao ser obrigado a efetuar dois passos sempre.

Felizmente, Juca pode calcular diretamente a pressão do pneu a partir de uma temperatura x em graus Fahrenheit usando a ideia de função composta.

Relembrando os passos de Juca, notamos que ele calculou a temperatura t, em graus Celsius, usando

$$t = C(x).$$

Em seguida, ele obteve a pressão y, em bar, fazendo

$$y = P(t).$$

Para obter y diretamente a partir de x, bastaria a Juca substituir a variável t que aparece na última equação por $C(x)$, fornecida pela primeira equação. Assim, ele escreveria

$$y = P(C(x)).$$

Vejamos como isso pode ser feito na prática.

Problema 5. Função composta para o cálculo da pressão

Sejam dadas as funções

$$P(t) = 0.007t + 1{,}9 \qquad \text{e} \qquad C(x) = \frac{5x - 160}{9},$$

que fornecem, respectivamente, a pressão em um pneu à temperatura t, em °C, e a temperatura em graus Celsius correspondente a x, em °F. Determine a função composta $P(C(x))$, bem como a pressão em um pneu que está a 104°F.

Solução.

A função $P(C(x))$ é dada por

$$\begin{aligned} P(C(x)) &= P\left(\frac{5x - 160}{9}\right) \\ &= 0.007\left(\frac{5x - 160}{9}\right) + 1{,}9 \\ &= 0.007 \cdot \frac{5x}{9} - 0{,}007 \cdot \frac{160}{9} + 1{,}9 \\ &\approx 0{,}0039x + 1{,}8 \end{aligned}$$

Calculando, então, $P(C(x))$ em $x = 104$°F, obtemos

$$P(C(104)) = 0{,}0039 \cdot 104 + 1{,}8 \approx 2{,}2 \text{ bar}.$$

Agora que já sabemos como criar uma função composta, tentemos defini-la matematicamente.

> **Função composta**
>
> Dadas as funções f e g, cujos domínios são A e B, respectivamente, definimos a **função composta** $f \circ g$ por
>
> $$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$
>
> O domínio de $f \circ g$ é o conjunto dos valores de $x \in A$ tais que $g(x) \in B$.

Problema 6. Função composta

Dadas as funções f e g abaixo, determine $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = 2x + 1$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x + 2) \\ &= (x + 2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2) \\ &= x^2 + 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(2x+1) \\ &= \sqrt{2x+1-1} \\ &= \sqrt{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(\sqrt{x-1}) \\ &= 2\sqrt{x-1}+1 \end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 10.

Problema 7. Função composta e seu valor

Dadas
$$f(x) = |x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{x-4},$$
defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$, e determine $f(g(-6))$ e $g(f(-6))$.

Solução.

Vamos, primeiramente, definir as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$:

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-4}\right) = \left|\frac{1}{x-4}\right| = \frac{1}{|x-4|}$$

$$g(f(x)) = g(|x|) = \frac{1}{|x|-4}$$

Agora, podemos calcular essas funções em $x = -6$.

$$f(g(-6)) = \frac{1}{|-6-4|} = \frac{1}{|-10|} = \frac{1}{10}.$$

$$g(f(-6)) = \frac{1}{|-6|-4} = \frac{1}{6-4} = \frac{1}{2}.$$

Naturalmente, não é necessário determinar a expressão da função composta apenas para calcular seu valor. De fato, também poderíamos ter determinado $f(g(-6))$ e $g(f(-6))$ fazendo

$$g(-6) = \frac{1}{-6-4} = -\frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \qquad f\left(-\frac{1}{10}\right) = \left|-\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10}$$

e

$$f(-6) = |-6| = 6 \qquad \Rightarrow \qquad g(6) = \frac{1}{6-4} = \frac{1}{2}$$

Agora, tente o Exercício 8.

Além de formalizar a ideia de função composta, que já havia sido explorada nos Problemas 4 e 5, o quadro à Página 351 define o domínio de $f \circ g$, assunto que ainda não abordamos. Segundo o quadro, para que sejamos capazes de calcular $f(g(x))$ é preciso que

1. x pertença ao domínio de g;
2. $g(x)$ (o valor de g em x) pertença ao domínio de f.

Essas duas condições estão ilustradas na Figura 3.92. Nessa figura, os conjuntos em vermelho indicam o domínio e o conjunto imagem de g, que são denominados D_g e Im_g, respectivamente. Já os conjuntos azuis representam D_f e Im_f – o domínio e o conjunto imagem de f.

O conjunto roxo no centro da imagem é a interseção de Im_g e de D_f, ou seja, é o conjunto dos valores de $g(x)$ que pertencem ao domínio de f, como exigido na condição 2 acima. O domínio de $f \circ g$, indicado em verde, contém os valores de x que satisfazem, ao mesmo tempo, as duas condições.

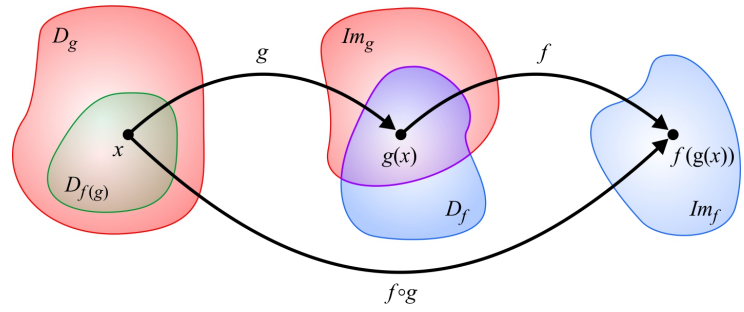



Figura 3.92: Composição de f e g.

Para deixar mais clara a definição do domínio da função composta, veremos como obtê-lo em um problema prático.

Problema 8. Função composta e seu domínio

Sejam dadas as funções

$$f(x) = \sqrt{6 - x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x + 1}.$$

a) Obtenha $f(g(x))$.

b) Determine o domínio dessa função composta.

c) Calcule $f(g(3))$.

Solução.

a) A função composta $f \circ g$ é dada por

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\sqrt{x+1}\right) \\ &= \sqrt{6 - \sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

b) Para obter o domínio de $f(g(x))$, vamos considerar em separado as duas condições mencionadas acima.

- **Condição $x \in D_g$.**
  Como trabalhamos com números reais, não podemos extrair a raiz quadrada de números negativos. Assim, para garantir que a expressão $\sqrt{x+1}$ possa ser calculada, devemos exigir que

$$x + 1 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq -1.$$

- **Condição $g(x) \in D_f$.**
  Como a função f também envolve uma raiz, para que possamos calculá-la, é preciso que

$$\begin{aligned} 6 - g(x) &\geq 0 \\ 6 - \sqrt{x+1} &\geq 0 \\ \sqrt{x+1} &\leq 6 \\ (\sqrt{x+1})^2 &\leq 6^2 \\ x + 1 &\leq 36 \\ x &\leq 35 \end{aligned}$$

Como exigimos que $x + 1 \geq 0$, pudemos escrever $(\sqrt{x+1})^2 = x + 1$.

A interseção das duas condições acima é dada por $-1 \le x \le 35$, de modo que

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 35\}.$$

c) O valor da função composta em $x = 3$ é dado por

$$f(g(3)) = \sqrt{6 - \sqrt{3+1}} = \sqrt{6-\sqrt{4}} = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2.$$

Agora, tente o Exercício 11.

O diagrama da Figura 3.92 é muito abstrato, o que pode dificultar sua compreensão. Por esse motivo, tomaremos emprestado as funções do Problema 8 e traçaremos o diagrama específico dessa composição. Para tanto, definiremos inicialmente os domínios e os conjuntos imagem das funções g e f.

O domínio da função $g(x) = \sqrt{x+1}$ já foi determinado acima, sendo dado por

$$D_g = \{x \mid x \ge -1\}.$$

Figura 3.93: Domínio e imagem de $g(x) = \sqrt{x+1}$.

Por sua vez, o conjunto imagem dessa função é

$$Im_g = \{y \mid y \ge 0\},$$

já que toda raiz quadrada fornece um número maior ou igual a zero. O diagrama da Figura 3.93 mostra o domínio e o conjunto imagem de g.

Passando à função $f(y) = \sqrt{6-y}$, notamos que seu domínio é

$$6 - y \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \ge y \quad \Rightarrow \quad y \le 6.$$

$$D_f = \{y \mid y \le 6\},$$

pois essa é a condição para que o termo dentro da raiz não seja negativo. Além disso, como a função f também é definida por uma raiz quadrada, o seu conjunto imagem é

$$Im_f = \{z \mid z \ge 0\},$$

Figura 3.94: Domínio e imagem de $f(x) = \sqrt{6-x}$.

A Figura 3.94 ilustra o domínio e o conjunto imagem de f.

Para desenhar o diagrama da função composta, deve-se observar que o valor de $f(g(x))$ é obtido em duas etapas. Em primeiro lugar, calculamos $y = g(x)$ e, em seguida, determinamos $z = f(y)$. Sendo assim, y deve estar, ao mesmo tempo, no conjunto imagem de g e no domínio de f. Logo,

$$\underbrace{y \ge 0}_{y\in Im_g} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{y \le 6}_{y \in D_f}.$$

Assim, podemos dizer que y deve pertencer ao conjunto $\{y \mid 0 \le y \le 6\}$. Esse conjunto aparece pintado de roxo no centro da Figura 3.95.

Lembrando, então, que $y = g(x)$, temos

0	$\le$	y	$\le$	6	Inequação original.
0	$\le$	$\sqrt{x+1}$	$\le$	6	Substituindo y por $g(x)$.
0^2	$\le$	$x+1$	$\le$	6^2	Elevando os termos ao quadrado.
0	$\le$	$x+1$	$\le$	36	Calculando os quadrados.
-1	$\le$	x	$\le$	35	Subtraindo 1 de todos os termos.

Portanto, para que possamos calcular $f(g(x))$, é preciso que x pertença ao conjunto $\{x \mid -1 \le x \le 35\}$, mostrado em verde na Figura 3.95. Esse é o domínio da função composta.

Figura 3.95: Composição de $f(y) = \sqrt{6-y}$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$.

Problema 9. Composição com gráficos

Com base nos gráficos das funções f e g, mostrados na Figura 3.96, determine

a) $f(g(4))$ b) $f(g(-2))$ c) $g(f(7))$ d) $g(f(2))$

(a) Gráfico de $y = f(x)$ (b) Gráfico de $y = g(x)$

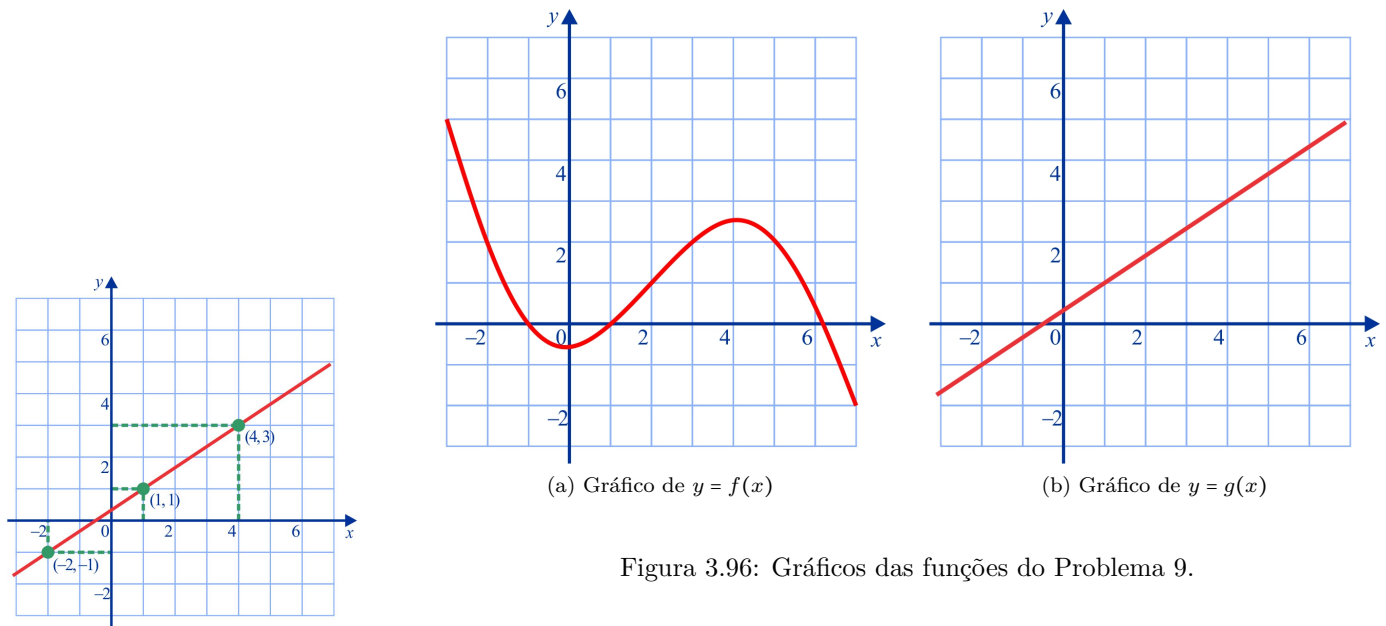



Figura 3.96: Gráficos das funções do Problema 9.

Figura 3.97: Valores de $g(-2)$, $g(1)$ e $g(4)$.

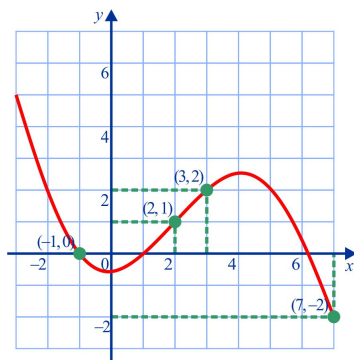



Figura 3.98: Valores de $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(7)$.

Solução.

a) Observando a Figura 3.97, constatamos que $g(4) = 3$. Consultando, então, a Figura 3.98, concluímos que

$$f(g(4)) = f(3) = 2.$$

b) Segundo a Figura 3.97, $g(-2) = -1$. Usando, então, a Figura 3.98, obtemos

$$f(g(-2)) = f(-1) = 0.$$

c) A Figura 3.98 indica que $f(7) = -2$. Consultando, em seguida, a Figura 3.97, chegamos a

$$g(f(7)) = g(-2) = -1.$$

d) Segundo a Figura 3.98, $f(2) = 1$. Recorrendo, então, à Figura 3.97, encontramos

$$g(f(2)) = g(1) = 1.$$

Agora, tente o Exercício 16.

Até o momento, usamos as funções f e g para determinar as composições $f \circ g$ e $g \circ f$. Nas disciplinas de cálculo, entretanto, os alunos são obrigados a seguir o caminho inverso, ou seja, a identificar funções f e g cuja composição corresponda a uma função h conhecida. O próximo problema explora essa decomposição.

Problema 10. Decomposição de uma função composta

Dada a função

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}},$$

determine duas funções f e g tais que $h(x) = f(g(x))$.

Solução.

Definindo, por exemplo, $g(x) = \sqrt{x+4}$, temos

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

Dessa forma, tomando $f(x) = \frac{1}{x}$, podemos escrever $h(x) = f(g(x))$.

Solução alternativa

Há outras escolhas de f e g que nos permitem escrever $h(x) = f(g(x))$. Como exemplo, podemos definir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x + 4.$$

Agora, tente o Exercício 18.

Encerrando o capítulo, apresentamos, na subseção abaixo, alguns erros comumente cometidos na manipulação de funções. Evitar esses erros é primeiro passo a ser tomado por aqueles que pretendem dominar os tópicos abordados nos próximos capítulos desse livro.

■ Erros a evitar na manipulação de funções

O fato de usarmos a notação $g(x)$ para expressar o valor da função g em x gera alguma confusão, já que também é possível escrever $g(x)$ para indicar o produto entre duas variáveis g e x.

Caso surja a dúvida de como tratar $f(x)$ (ou $g(x)$, $h(x)$ etc), a recomendação geral é que se interprete essa expressão como uma função, a menos que o contexto indique claramente que se trata de um produto.

Apresentamos, abaixo, uma lista de erros cometidos quando se manipula $f(x)$ como o produto de f por x, e não como o valor da função em x. Em cada caso, apresentamos um exemplo que mostra como o erro leva a um resultado disparatado.

1. Não se deve cancelar f.

   a) De uma forma geral, não é correto reescrever uma equação fazendo

$$f(x) = f(y)$$
$$\cancel{f}(x) = \cancel{f}(y) \qquad \text{☠ Errado!}$$
$$x = y$$

Existem funções para as quais, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$. Essas funções, chamadas **injetoras**, serão vistas no Capítulo 5.

Considere, por exemplo, a função $f(x) = x^2$. Se escolhermos $x = -2$ e $y = 2$, então, claramente

$$\begin{aligned}(-2)^2 &= 2^2 && \text{Igualando } f(-2) \text{ a } f(2)\\ 4 &= 4, && \text{Ok! } f(x) = f(y)\end{aligned}$$

embora

$$-2 \neq 2. \qquad x \neq y$$

b) Não é correto simplificar uma expressão escrevendo

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{\not{f}(x)}{\not{f}(y)} = \frac{x}{y}. \qquad \text{Errado!}$$

Para evidenciar a incongruência dessa simplificação, basta tomar $f(x) = \sqrt{x}$ e $y = 9x$. Nesse caso,

Aqui, estamos supondo que $x > 0$.

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9x}} = \sqrt{\frac{x}{9x}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3},$$

enquanto

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{9x} = \frac{1}{9}.$$

2. Não se deve por f em evidência.

a) Em geral, não é correto escrever

$$f(x) + f(y) = f(x+y). \qquad \text{Errado!}$$

Recorrendo, por exemplo, à função $f(x) = x^2$ e a $y = 6$, observamos que

$$f(x) + f(y) = x^2 + 6^2 = x^2 + 36.$$

Por outro lado,

$$f(x+y) = (x+6)^2 = x^2 + 12x + 36.$$

b) Também não é correto afirmar que

$$f(x)\cdot f(y) = f(x\cdot y) \quad \text{ou} \quad \frac{f(x)}{f(y)} = f\left(\frac{x}{y}\right). \qquad \text{Errado!}$$

Escolhendo, por exemplo, $f(x) = x - 5$ e $y = 10$, constatamos que

$$f(x)\cdot f(y) = (x-5)\cdot 10 = 10x - 50,$$

enquanto

$$f(x\cdot y) = f(10x) = 10x - 5.$$

Da mesma forma,

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{x-5}{10},$$

que é diferente de

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{x}{10} - 5 = \frac{x-50}{10}.$$

3. Não se pode misturar o argumento de uma função com os demais termos de uma expressão.

a) Se f é uma função e A é uma expressão qualquer, não se deve escrever

$$f(x) + A = f(x+A). \qquad \text{Errado!}$$

Assim, por exemplo, erra quem diz que

$$f(x) + x = f(x+x) = f(2x). \qquad \text{Errado!}$$

Para mostrar que $f(x)+x$ não é o mesmo que $f(2x)$, basta tomar $f(x) = x^2$, já que, nesse caso,
$$f(x) + x = x^2 + x,$$
enquanto
$$f(x + x) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2.$$

b) Também não é adequado dizer que
$$f(x) \cdot A = f(x \cdot A). \quad ☠ \text{ Errado!}$$
Para se convencer de que essa afirmação não é correta, suponha que seja preciso calcular
$$f(x) \cdot x,$$
e que $f(x) = \frac{1}{x} + 2$. Nesse caso,

Nesse exemplo, supomos que $x \neq 0$.

$$f(x) \cdot x = \left(\frac{1}{x} + 2\right) \cdot x = \frac{x}{x} + 2x = 1 + 2x.$$
Por outro lado,
$$f(x \cdot x) = f(x^2) = \frac{1}{x^2} + 2.$$
Dessa forma, $f(x) \cdot x \neq f(x \cdot x)$.

c) Mais um erro comum consiste em afirmar que
$$\frac{f(x)}{A} = f\left(\frac{x}{A}\right), \quad ☠ \text{ Errado!}$$
como ocorre quando se escreve
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(\cancel{x})}{\cancel{x}} = f(1) \quad ☠ \text{ Errado!}$$
ou
$$\frac{f(x^2)}{x} = \frac{f(\cancel{x} \cdot x)}{\cancel{x}} = f(x), \quad ☠ \text{ Errado!}$$
Nesse caso, escolhendo $f(x) = x^2$, temos

Mais uma vez, supomos que $x \neq 0$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x} = x,$$
enquanto
$$f(1) = 1^2 = 1,$$
de modo que $\frac{f(x)}{x} \neq f(1)$.

Exercícios 3.9

1. Para as funções f e g apresentadas abaixo, defina $f+g$, fg e f/g.

a) $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 - 1$
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x^2 + 1$
c) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+2}$
e) $f(x) = x - 3$, $g(x) = x + 3$
f) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = x^2$
g) $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$

2. Chico é proprietário de uma barraca que vende pães de queijo na feira, e percebeu que, se o preço do pão de queijo é baixo, muita gente compra o petisco, mas o rendimento no fim do dia é pequeno. Por outro lado, quando o pão está muito caro, pouca gente o compra. Assim, Chico fez uma pesquisa com seus clientes e percebeu que o número de pães vendidos por dia é dado por $N(p) = 1000 - 500p + 60p^2$, em que p é preço de cada pão, em reais.

a) Escreva a fórmula de $R(p)$, que fornece a receita

bruta diária pela venda dos pães, dada pelo produto entre o número de pães vendidos e o preço de cada pão.

b) Para produzir e vender n pães a cada dia, Chico gasta um valor (em reais) dado por $C(n) = 80 + 0{,}4n$. O lucro diário obtido com a venda dos pães é a diferença entre a receita bruta e o custo. Escreva a fórmula de $L(p)$, que fornece o lucro diário, em relação ao preço do pão de queijo.

c) Calcule o lucro diário que Chico teria se cobrasse R$ 0,50, R$ 1,00, R$ 1,50, R$ 2,00 R$ 2,50 e R$ 3,00 por pão de queijo. Qual desses preços fornece o maior lucro?

3. Suponha que $c_{pre}(t)$ forneça o número de telefones celulares pré-pagos e $c_{pos}(t)$ forneça o número de celulares pós-pagos registrados no Brasil, no instante de tempo t (em anos) decorrido desde o ano 2000. Suponha, também, que $p(t)$ forneça a população brasileira no instante t (também em anos a partir de 2000).

a) Defina a função que fornece o número de telefones celulares registrados no Brasil, em relação a t.

b) Defina a função que fornece o número de telefones celulares per capita em relação a t.

c) Defina a função que fornece o percentual dos telefones celulares que são do tipo pré-pago, em relação a t.

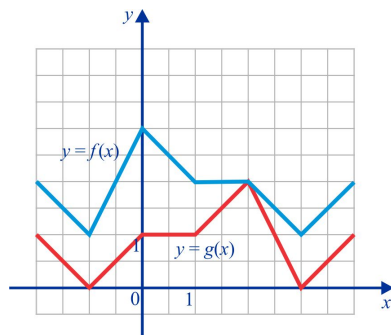
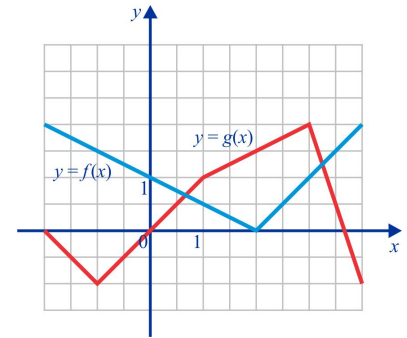
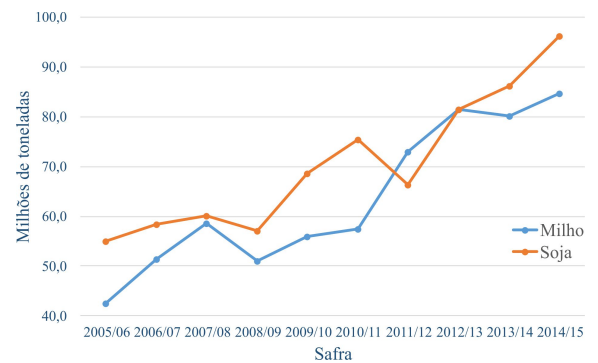
4. Uma loja de informática lançou uma promoção de impressoras. Ela está vendendo qualquer modelo novo com um desconto de R$ 100,00 para quem deixar sua impressora velha. Além disso, todas as impressoras da loja estão com 5% de desconto sobre o valor de fábrica (ou seja, sem o desconto de R$ 100,00).

a) Crie uma função p que forneça o preço real de uma impressora cujo preço original era x, para quem não deixar na loja sua impressora velha.

b) Crie uma função q que forneça o preço real de uma impressora cujo preço original era x, para quem deixar uma impressora velha.

c) Crie uma função d que forneça o desconto percentual que terá um cliente que comprar uma impressora cujo preço original era x, se o cliente deixar na loja sua impressora velha.

5. Com base nas figuras abaixo, trace o gráfico de $h(x) = f(x) + g(x)$.

a)

b)

6. O gráfico abaixo, apresentado no Exercício 11 da Seção 3.6, fornece a produção brasileira de milho e soja, em milhões de toneladas, no período compreendido entre as safras de 2005/06 e 2014/15, de acordo com a CONAB.

Trace o gráfico que mostra a soma da produção de milho e soja no mesmo período.

7. Sejam dadas as funções $f(x) = px$ e $g(x) = 2x + 5$, em que p é um parâmetro real.

a) Supondo que $p = -5$, determine para quais valores reais de x tem-se $f(x) \cdot g(x) < 0$.

b) Determine para quais valores de p temos $f(x) \geq g(x)$, ou seja, $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo $x \in [-8, -1]$.

8. Dadas $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = x - 3$, calcule

a) $f(g(0))$ c) $f(f(2))$ e) $g(g(-1))$
b) $f(g(1))$ d) $g(f(3))$ f) $g(g(f(2)))$

9. Sejam dadas as funções $f(x) = \frac{1}{x-4}$ e $g(x) = x^2$.

a) Defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e seus domínios.

b) Calcule $f(g(-3))$ e $g(f(7))$.

10. Dadas as funções f e g abaixo, defina $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ e $g(g(x))$.

a) $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = -2x + 7$

b) $f(x) = 4x$, $g(x) = \frac{x^2}{4}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{3}$

d) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{5x}$

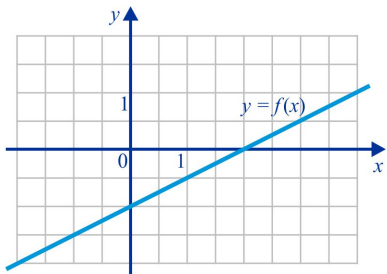
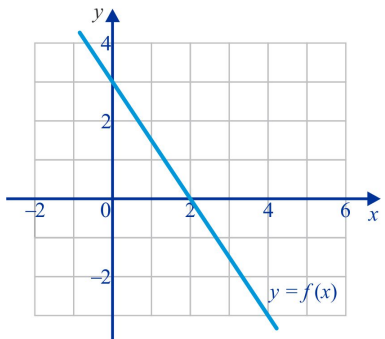
11. Dadas as funções f e g abaixo, defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e os domínios das novas funções.

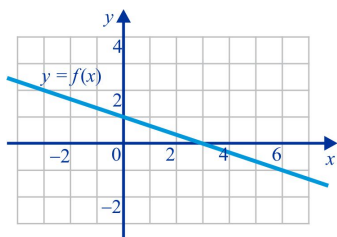
a) $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^2 + 2x$

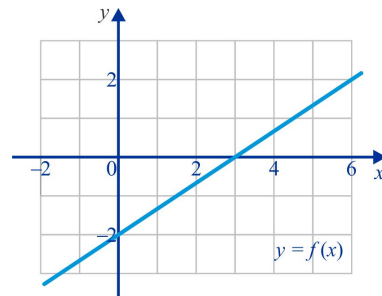
b) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 1$
d) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = 3x^2 + 1$
e) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 3$
f) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = x^2$
g) $f(x) = x^{2/3}$, $g(x) = x^6$
h) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \frac{2}{x^2+1}$
i) $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = x^2 - 6$
j) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$
k) $f(x) = \sqrt{3x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{x^2-8}$
l) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{25-x^2}$

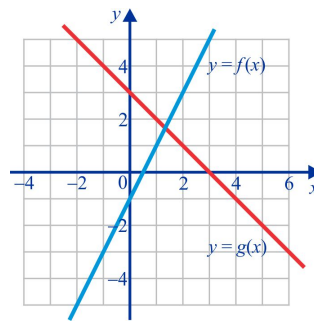
12. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.

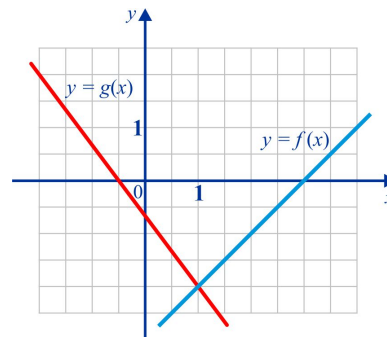
a) Sabendo que $g(x) = \frac{1}{x}$, defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e os domínios dessas funções.
b) Calcule $f(g(1/2))$ e $g(f(4))$.

13. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.

a) Sabendo que $g(x) = \frac{1}{x^2}$, defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e os domínios dessas funções.
b) Calcule $f(g(-1))$ e $g(f(3/2))$.

14. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$. Sabendo que $g(x) = \frac{6x}{5-3x}$,

a) Calcule $f(g(5))$.
b) Defina $f(x)$.
c) Defina $g(f(x))$ e seu domínio.

15. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.

a) Defina a expressão analítica de $f(x)$.
b) Dada $g(x) = \sqrt{x}$, determine $g(f(6))$ e $f(g(9))$.
c) Sabendo que $h(x) = \frac{1}{x+2}$, determine a expressão analítica de $h(f(x))$, bem como o domínio dessa função composta.

16. Os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são dados na figura abaixo.

a) Determine as funções f e g.
b) Determine $w(x) = f(g(x))$
c) Esboce o gráfico de $h(x) = f(x).g(x)$ para $x \in [0,4]$.

17. Os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são dados na figura abaixo.

a) Calcule $g(f(2{,}5))$.
b) Determine as funções f e g.
c) Determine a expressão de $f(g(x))$.
d) Determine a expressão de $g(f(x))$.

18. Dadas as funções abaixo, determine f e g tais que $h(x) = f(g(x))$.

a) $h(x) = (3x-2)^2$
b) $h(x) = \sqrt{x^2-1}$
c) $h(x) = |4-x|$
d) $h(x) = \frac{1}{2x-5}$

19. Na cidade de Salicilina, o número de casos de uma determinada doença viral varia ao longo do ano, sendo dado aproximadamente por $d(t) = 1{,}9245t^4 - 53{,}485t^3 + 450{,}18t^2 - 1081{,}5t + 837.37$, em que t é o mês do ano. Por sua vez, o custo, em reais, do tratamento dessa doença é dado pela função $c(x) = 600x + 12000$, em que x é o número de pessoas infectadas.

a) Determine $c(d(t))$.

b) Indique o que essa função composta representa.

c) Calcule o custo aproximado de tratamento Salicilinenses infectados no mês de abril.

Respostas dos Exercícios 3.9

1. a) $x^2 + x - 3$; $x^3 - 2x^2 - x + 2$; $\frac{x-2}{x^2-1}$
b) $2x^2 + \sqrt{x} + 1$; $2\sqrt{x^5} + \sqrt{x}$; $\frac{\sqrt{x}}{1+2x^2}$
c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$; $\sqrt{x^2-1}$; $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
d) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2+x}$; $\frac{3}{2x+x^2}$; $\frac{x+2}{3x}$
e) $2x$; $x^2 - 9$; $\frac{x-3}{x+3}$
f) $x^2 + \sqrt{1-x}$; $x^2\sqrt{1-x}$; $\frac{\sqrt{1-x}}{x^2}$
g) $\frac{x^2+x+1}{x^2}$; $\frac{x+1}{x^3}$; $x^2 + x$

2. a) $R(p) = p(1000 - 500p + 60p^2)$
b) $l(p) = (p - 0{,}4)(1000 - 500p + 60p^2) - 80$
c) $l(0{,}50) =$ R\$ -3,50
$l(1{,}00) =$ R\$ 256,00
$l(1{,}50) =$ R\$ 343,50
$l(2{,}00) =$ R\$ 304,00
$l(2{,}50) =$ R\$ 182,50
$l(3{,}00) =$ R\$ 24,00
O preço que fornece o maior lucro é R\$ 1,50.

3. a) $c_{pre}(x) + c_{pos}(x)$
b) $\frac{c_{pre}(x)+c_{pos}(x)}{p(t)}$
c) $\frac{100c_{pre}(x)}{c_{pre}(x)+c_{pos}(x)}$

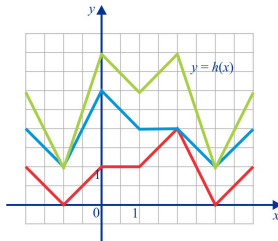
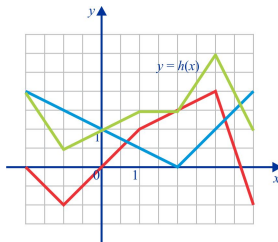
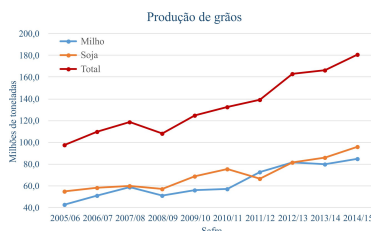
4. a) $p(x) = 0{,}95x$
b) $q(x) = 0{,}95x - 100$
c) $d(x) = 100 - \frac{100q(x)}{x}$

5. a)

b)

6.

7. a) $x < -5/2$ ou $x > 0$
b) $p \leq -3$

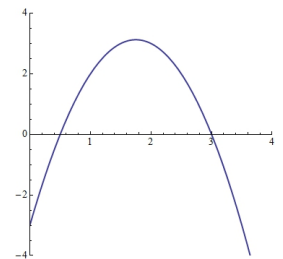
8. a) 17 b) 7 c) 97 d) 14 e) −7 f) 1

9. a) $f(g(x)) = \frac{1}{x^2-4}$
$g(f(x)) = \frac{1}{(x-4)^2}$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq 2\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$
b) $f(g(-3)) = \frac{1}{5}$ e $g(f(7)) = \frac{1}{9}$

10. a) $f(g(x)) = -6x + 16$
$g(f(x)) = -6x + 17$
$f(f(x)) = 9x - 20$
$g(g(x)) = 4x - 7$
b) $f(g(x)) = x^2$
$g(f(x)) = 4x^2$
$f(f(x)) = 16x$
$g(g(x)) = \frac{x^4}{64}$
c) $f(g(x)) = \sqrt{\frac{x}{3}}$
$g(f(x)) = \frac{\sqrt{x}}{3}$
$f(f(x)) = \sqrt[4]{x}$
$g(g(x)) = \frac{x}{9}$
d) $f(g(x)) = \frac{1}{25x^2}$
$g(f(x)) = \frac{1}{5x^2}$
$f(f(x)) = x^4$
$g(g(x)) = x$

11. a) $f(g(x)) = 3x^2 + 6x - 1$
$g(f(x)) = 9x^2 - 1$
$D(f(g(x)) = D(g(f(x)) = \mathbb{R}$
b) $f(g(x)) = 3 + \frac{2}{x}$
$g(f(x)) = \frac{1}{3+2x}$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3/2\}$
c) $f(g(x)) = \sqrt{2x-1}$
$g(f(x)) = 2\sqrt{x} - 1$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1/2\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
d) $f(g(x)) = \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3}$
$g(f(x)) = 3x - 2$
$D(f(g(x)) = \mathbb{R}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
e) $f(g(x)) = \sqrt{x^2+1}$
$g(f(x)) = x + 1$
$D(f(g(x)) = \mathbb{R}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
f) $f(g(x)) = \frac{x^2}{x^2-1}$
$g(f(x)) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1ex \neq -1\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$
g) $f(g(x)) = x^4$
$g(f(x)) = x^4$
$D(f(g(x)) = D(g(f(x)) = \mathbb{R}$
h) $f(g(x)) = -1 + \frac{2}{1+x^2}$
$g(f(x)) = \frac{2}{x^2-2x+2}$
$D(f(g(x)) = D(g(f(x)) = \mathbb{R}$
i) $f(g(x)) = \sqrt{x^2-2}$
$g(f(x)) = x - 2$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$
j) $f(g(x)) = \frac{x^2-4}{x}$
$g(f(x)) = \frac{x}{1-4x^2}$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 0, x \neq 2\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$
k) $f(g(x)) = \sqrt{3x^2-25}$
$g(f(x)) = \sqrt{3x^2-9}$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{\sqrt{3}} \text{ ou } x \geq \frac{5}{\sqrt{3}}\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{3} \text{ ou } x \geq \sqrt{3}\}$
l) $f(g(x)) = \sqrt{\frac{x}{25-x^2}}$
$g(f(x)) = \frac{\sqrt{x}}{25-x}$
$D(f(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } 0 \leq x \leq 5\}$
$D(g(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x \neq 25\}$

12. a) $f(g(x)) = \frac{1}{2x} - 1$
$g(f(x)) = \frac{1}{x/2-1}$
$D(f(g(x))) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$D(g(f(x))) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
b) $f(g(1/2)) = 0$ e $g(f(4)) = 1$

13. a) $f(g(x)) = 3 - \frac{3}{2x^2} - 1$
$g(f(x)) = \frac{4}{(6-3x)^2}$
$D(f(g(x))) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$D(g(f(x))) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
b) $f(g(-1)) = \frac{3}{2}$ e $g(f(3/2)) = \frac{16}{9}$

14. a) $f(g(5)) = 2$
b) $f(x) = 1 - \frac{x}{3}$
c) $g(f(x)) = \frac{6-2x}{2+x}$
$D(g(f(x))) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$

15. a) $f(x) = \frac{2x}{3} - 2$
b) $g(f(6)) = \sqrt{2}$; $f(g(9)) = 0$
c) $h(f(x)) = \frac{3}{2x}$
$D(h(f(x))) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

16. a) $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = 3 - x$
b) $f(g(x)) = 5 - 2x$
c)

17. a) $g(f(2{,}5)) = 0$
b) $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \frac{-4x}{3} - \frac{2}{3}$
c) $f(g(x)) = -\frac{4x}{3} - \frac{11}{3}$
d) $g(f(x)) = -\frac{4x}{3} + \frac{10}{3}$

18. a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x - 2$
b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$
c) $f(x) = |x|$ e $g(x) = 4 - x$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 2x - 5$

19. a) $c(d(t)) = 1154{,}7t^4 - 32091t^3 + 270108t^2 - 648900t + 514422$
b) A função composta fornece o gasto mensal com o tratamento dos infectados pela doença em Salicilina.
c) Aproximadamente R\$ 482.329,00

Funções polinomiais 4

Antes de ler o capítulo

Esse capítulo envolve o conteúdo das Seções 2.9, 2.10 e 2.11 (equações e inequações quadráticas) e das Seções 3.5 e 3.6 (funções e gráficos).

Depois de tratarmos das funções de uma forma genérica, é hora de passarmos a discutir aquelas funções que são usadas com maior frequência na modelagem de fenômenos reais.

Nesse capítulo, trataremos das funções que envolvem polinômios. As funções exponenciais e logarítmicas, por sua vez, serão vistas no Capítulo 5. Finalmente, deixamos para o segundo volume desse livro o tratamento das funções trigonométricas, dada a relação que essas têm com a geometria do triângulo retângulo.

4.1 Funções quadráticas

Por motivos óbvios, damos o nome de **função polinomial** a uma função que é definida por um polinômio. O quadro abaixo fornece uma descrição precisa desse tipo de função, tomando por base a definição de polinômio fornecida na Seção 2.9.

Função polinomial

Seja dado um número inteiro não negativo n, bem como os coeficientes reais $a_0, a_1, \cdots, a_n$, com $a_n \neq 0$. A função definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é denominada **função polinomial de grau** n, com relação a x.

Algumas funções polinomiais já foram vistas no Capítulo 3, tais como

$$f(x) = c$$ Função constante (grau 0).

$$f(x) = mx + b$$ Função linear ou afim (grau 1).

$$f(x) = x^n$$ Função potência de grau n

Nessa seção, trataremos das funções polinomiais de grau 2, também conhecidas como funções quadráticas.

Função quadrática

Sejam dados os coeficientes reais a, b e c, com $a \neq 0$. A função definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é denominada **função quadrática**.

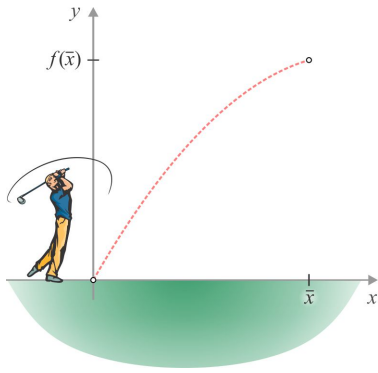



Figura 4.1: Trajetória de uma bola de golfe. Quando a bola está a uma distância horizontal $\bar{x}$ do ponto de partida, sua altura é $f(\bar{x})$.

As funções quadráticas têm aplicações em áreas variadas, como a física, a economia, a engenharia, a biologia e a geografia. O problema abaixo mostra o emprego de uma função quadrática à descrição da trajetória de uma bola.

Problema 1. Trajetória de uma bola de golfe

Um golfista dá uma tacada que faz sua bola descrever uma trajetória na qual a altura, em metros, é dada pela função

$$f(x) = -0{,}008x^2 + x,$$

em que x é a distância horizontal da bola, em metros, medida a partir de sua posição antes da tacada. A Figura 4.1 ilustra a trajetória da bola.

a) Determine a altura da bola quando ela está a uma distância horizontal de 40 m de seu ponto de partida.

b) Com base em uma tabela de pontos, trace a trajetória da bola no plano Cartesiano.

c) Determine a que distância do ponto de partida a bola cai no chão.

Solução.

a) A altura da bola quando ela está a uma distância horizontal de 50 m de sua posição original é dada por

$$f(40) = -0{,}008 \cdot 40^2 + 40 = 27{,}2.$$

Logo, a bola está a uma altura de 27,2 m.

b) A Tabela 4.1 fornece uma lista de pares ordenados obtidos a partir da definição de f. Com base nesses pontos, traçamos o gráfico da Figura 4.2, que mostra a trajetória descrita pela bola.

Tabela 4.1

x	$f(x)$
0	0,0
20	16,8
40	27,2
60	31,2
80	28,8
100	20,0
120	4,8
140	-16,8

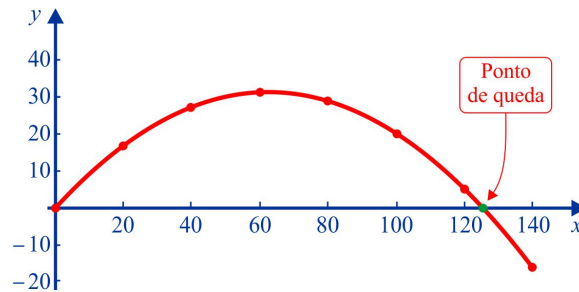



Figura 4.2: Gráfico da função que representa a trajetória da bola de golfe.

c) Observando a Figura 4.2, concluímos que a bola toca o solo a cerca de 125 metros de seu ponto de partida. Para determinar com exatidão a coordenada horizontal desse ponto, basta lembrar que dizer que a bola está sobre o solo é o mesmo que afirmar que sua altura é zero. Assim, temos $f(x) = 0$, ou seja,

$$-0{,}008x^2 + x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(-0{,}008x + 1) = 0.$$

As raízes dessa equação devem satisfazer $x = 0$ ou $-0{,}008x + 1 = 0$. Nesse último caso, temos

$$-0{,}008x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -0{,}008x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-1}{-0{,}008} = 125.$$

Logo, os pontos em que a bola toca o solo são aqueles nos quais $x = 0$ m (ponto de partida) e $x = 125$ m, que é a distância horizontal entre o ponto de partida e o ponto de queda da bola.

A curva mostrada na Figura 4.2 inclui o trecho entre $x = 125$ e $x = 140$, no qual os valores de $f(x)$ são negativos. Esse trecho foi usado apenas para completar a trajetória até o ponto de queda, não implicando que, na prática, a bola tenha tido uma altura negativa, o que só aconteceria se ela fosse enterrada no solo.

É importante notar que uma função quadrática pode ser fornecida em outro formato que não aquele apresentado no quadro acima, como mostram os exemplos a seguir.

Problema 2. Conversão de funções quadráticas ao formato usual

Converta as funções abaixo ao formato $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) $f(x) = 2(x-1)(x+3)$

b) $f(x) = -3(x-4)^2 + 6$

Solução.

a) Aplicando a propriedade distributiva, podemos escrever

$$2(x-1)(x+3) = 2(x^2 - x + 3x - 3) = 2x^2 + 4x - 6.$$

Logo, $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

b) Usando a regra do quadrado da soma (ou a propriedade distributiva mais uma vez), obtemos

$$-3(x-4)^2 + 6 = -3(x^2 - 8x + 16) + 6 = -3x^2 + 24x - 48 + 6 = -3x^2 + 24x - 42.$$

Assim, $f(x) = -3x^2 + 24x - 42$.

Gráfico das funções quadráticas

O gráfico de uma função quadrática tem um formato característico – similar a uma letra "U" mais aberta –, e é chamado **parábola**. A Figura 4.3 mostra duas parábolas típicas.

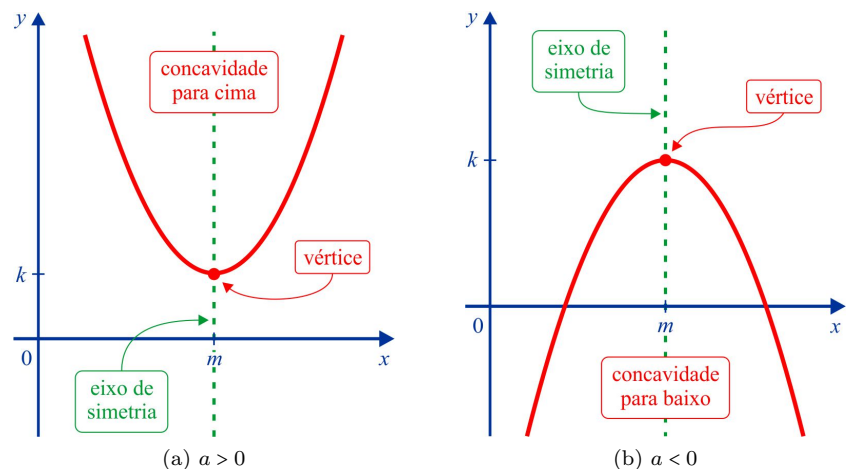



Figura 4.3: Gráficos de parábolas e sua relação com o coeficiente a.

Observando as curvas da Figura 4.3, notamos que a função quadrática tem um ponto de mínimo ou um ponto de máximo local. A esse ponto especial da parábola damos o nome de **vértice**. Além disso, toda parábola é simétrica a uma reta vertical que passa por seu vértice. Essa reta vertical é denominada **eixo de simetria**.

Outra característica importante de parábola é a sua **concavidade**, que é a lado para o qual a curva se abre. A Figura 4.3a mostra uma parábola com concavidade

para cima, enquanto a Figura 4.3b mostra uma parábola com concavidade para baixo. Note que há uma relação entre a concavidade e o sinal do coeficiente a. Se $a > 0$, a parábola tem concavidade para cima. Por outro lado, a concavidade é para baixo se $a < 0$.

O parâmetro a também controla a abertura da parábola. Quanto maior for o valor absoluto desse parâmetro, menor será a abertura, e vice-versa, como ilustra a Figura 4.4.

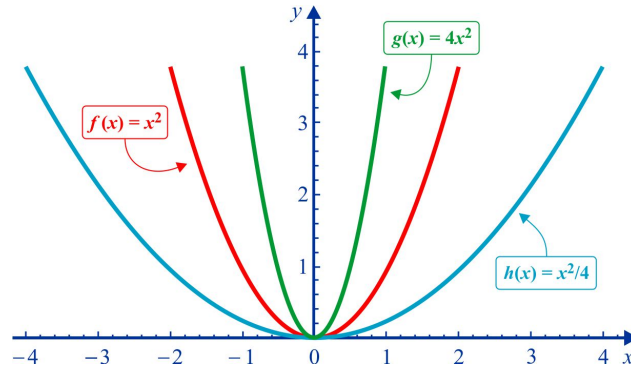



Figura 4.4: Influência do parâmetro a sobre a abertura da parábola.

Por sua vez, o coeficiente c da função quadrática determina o intercepto-y da parábola, pois, tomando $x = 0$, temos

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

Já os interceptos-x da parábola correspondem às raízes da equação $f(x) = 0$, que é equivalente à equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Seguindo, então, a análise feita na Seção 2.10 acerca do papel do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ do polinômio quadrático, podemos dizer que a parábola

- intercepta o eixo-x em dois pontos se $\Delta > 0$;
- intercepta o eixo-x em um ponto se $\Delta = 0$;
- não intercepta o eixo-x se $\Delta < 0$.

Problema 3. Interceptos da parábola

Dada a função quadrática

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3,$$

determine os interceptos de seu gráfico com os eixos coordenados.

Solução.

- O intercepto-y da parábola é dado pelo coeficiente c, cujo valor é -3.
- Para obter os interceptos-x, devemos resolver a equação

  $$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

  Nesse caso, o discriminante vale

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49.$$

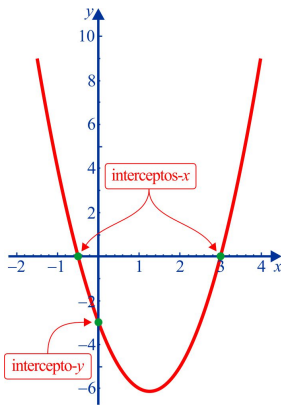



Figura 4.5: Interceptos da parábola do Problema 3.

Como $\Delta > 0$, sabemos que o gráfico intercepta o eixo-x em dois pontos. Recorrendo, então, à fórmula de Bháskara, obtemos

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4}.$$

Logo, os interceptos são

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}.$$

■ Forma canônica da função quadrática

Suponha que conheçamos as coordenadas (m,k) do vértice de uma parábola, bem como o coeficiente a, que fornece sua concavidade e abertura. Nesse caso, é fácil determinar a expressão da função quadrática $f(x)$ correspondente, bem como traçar o seu gráfico, bastando para isso que apliquemos sobre a função $q(x) = x^2$ algumas das transformações apresentadas na Seção 3.8.

Em linhas gerais, essa estratégia de obtenção de uma função quadrática pode ser dividida nos seguintes passos:

1. **Encolha ou estique a função $q(x) = x^2$ de forma a obter $h(x) = ax^2$.**
   Supondo que $a > 0$, o gráfico de h será similar à curva tracejada mostrada na Figura 4.6a.Por outro lado, se $a < 0$, o gráfico de h incluirá uma reflexão da parábola em relação ao eixo-x.

2. **Desloque o gráfico da função h por m unidades na horizontal para obter $g(x) = a(x - m)^2$.**
   Supondo que m seja um valor positivo, o deslocamento será para a direita e o gráfico de g equivalerá à curva verde da Figura 4.6a, na qual a coordenada-x do vértice é m. Já para $m < 0$, haverá um deslocamento para a esquerda.

3. **Desloque o gráfico de g por k unidades na vertical para obter $f(x) = a(x - m)^2 + k$.**
   No caso em que $k > 0$, haverá um deslocamento para cima e o gráfico de f será equivalente à curva azul apresentada na Figura 4.6b. Já se $k < 0$, a parábola será deslocada para baixo.

(a) Deslocamento de m unidades na horizontal

(b) Deslocamento de k unidades na vertical

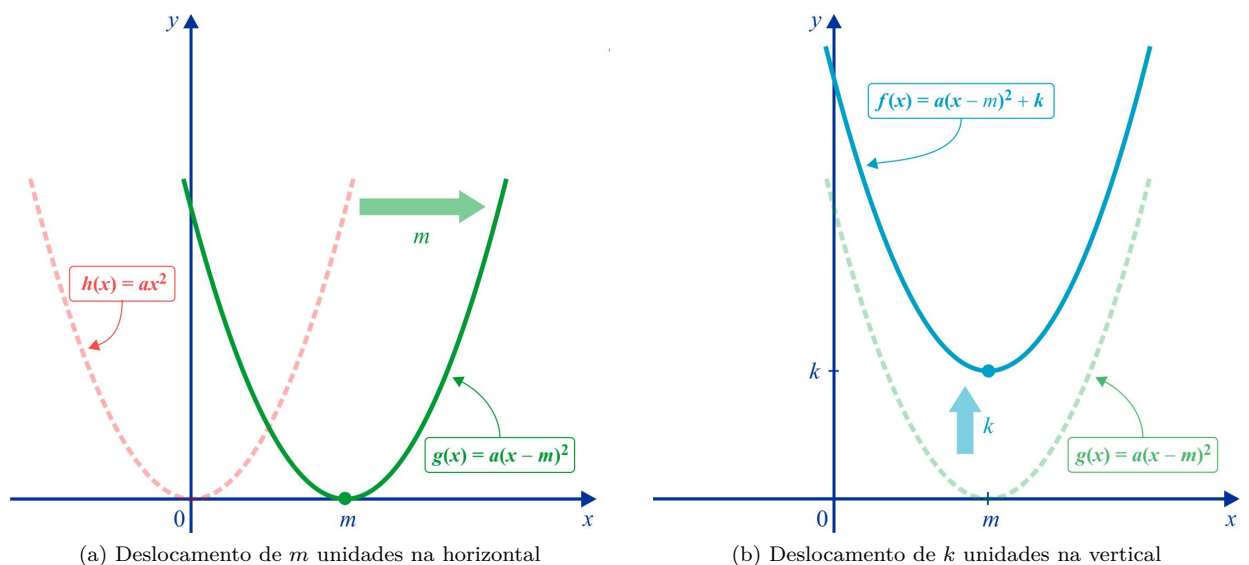



Figura 4.6: Transformações que levam $h(x) = ax^2$ em $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

Esse procedimento para a obtenção de uma parábola com abertura a e vértice (m,k) sugere que toda função quadrática pode ser apresentada na **forma canônica**

$$f(x) = a(x-m)^2 + k. \qquad \text{(Forma canônica)}$$

Para mostrar que é sempre possível converter uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma canônica, e vice-versa, basta estabelecer uma relação única entre os coeficientes de uma e outra forma. Essa relação pode ser obtida expandindo a forma canônica:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-m)^2 + k \\ &= a(x^2 - 2mx + m^2) + k \\ &= ax^2 \underbrace{-2am}_{b} x + \underbrace{am^2 + k}_{c}. \end{aligned}$$

Comparando essa expressão de $f(x)$ com a forma usual $f(x) = ax^2+bx+c$, concluímos que o coeficiente a que aparece nas duas formas é o mesmo. Além disso,

$$b = -2am \qquad \text{e} \qquad c = am^2 + k.$$

Assim, percebemos que é fácil determinar os coeficientes b e c a partir de a e das coordenadas do vértice da parábola. Vejamos, agora, como obter m e k a partir de a, b e c.

Como $b = -2am$, temos

$$m = -\frac{b}{2a}.$$

Da mesma forma, como $c = am^2 + k$, podemos escrever

$k = c - am^2$	Isolando k na equação.
$= c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$	Substituindo m por $-b/(2a)$
$= c - a\frac{b^2}{4a^2}$	Calculando o quadrado do quociente
$= c - \frac{b^2}{4a}$	Simplificando o segundo termo
$= \frac{4ac - b^2}{4a}$	Calculando a diferença de frações.
$= -\frac{\Delta}{4a}$	Usando o fato de que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante do polinômio quadrático.

O quadro a seguir resume as fórmulas de conversão entre os dois principais formatos de uma função quadrática.

Conversão	**Coeficientes**	
De $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $f(x) = a(x-m)^2 + k$	$m = -\frac{b}{2a}$	$k = -\frac{\Delta}{4a}$
De $f(x) = a(x-m)^2 + k$ para $f(x) = ax^2 + bx + c$	$b = -2am$	$c = am^2 + k$

Embora não seja muito empregada, a forma canônica é útil quando se quer escrever uma função quadrática (ou traçar seu gráfico) a partir das coordenadas do vértice, como mostra o problema abaixo.

Problema 4. Função quadrática na forma canônica

Encontre a função quadrática cujo gráfico tem vértice em $(-2{,}4)$ e que passa pelo ponto $(-5,-14)$. Em seguida, trace o gráfico da função.

Solução.

Como o vértice tem coordenadas $m = -3$ e $k = 4$, a função tem a forma

$$f(x) = a(x - (-3))^2 + 4 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = a(x+3)^2 + 4.$$

Usando, agora, o fato de que a parábola passa pelo ponto $(-5,-4)$, escrevemos $f(-5) = -4$, de modo que

$$\begin{aligned} -4 &= a(-5+3)^2 + 4 \\ -4 &= a(-2)^2 + 4 \\ -8 &= 4a \\ -2 &= a. \end{aligned}$$

Logo, a função quadrática é

$$f(x) = -2(x+3)^2 + 4$$

Para traçar o gráfico de $f(x)$, cujo vértice é $(-3{,}4)$, deslocamos a parábola $y = -2x$ três unidades para a esquerda e quatro unidades para cima, como mostra a Figura 4.7, na qual o gráfico de $f(x)$ é exibido em verde.

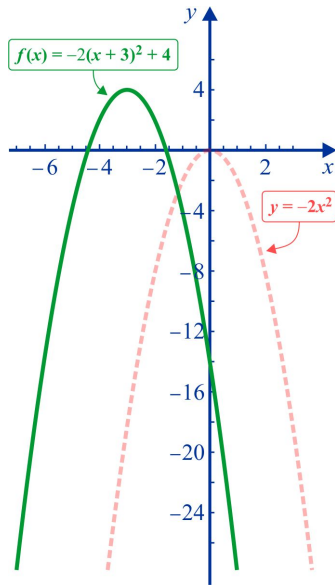



Figura 4.7: Gráfico de $f(x)$ a partir da parábola $y = -2x^2$.

Agora, tente o Exercício 8.

■ Ponto de máximo ou de mínimo de uma função quadrática

Em muitas situações práticos, usamos uma função quadrática para descrever um problema que envolve a otimização de recursos (dinheiro, matérias-primas etc.). Nesses casos, é imprescindível conhecer o ponto no qual a função atinge seu valor máximo ou mínimo.

Como vimos acima, a função quadrática possui apenas um ponto de máximo ou de mínimo local, que corresponde ao vértice da parábola. Agora que sabemos como obter as coordenadas m e k do vértice a partir dos coeficientes a, b e c, fica fácil determinar os pontos extremos da função.

Observe que há um só valor para x^* e para $f(x^*)$, que são as coordenadas do vértice da parábola. O coeficiente a é responsável por definir se esse vértice estará associado ao mínimo ou ao máximo da função.

Ponto de máximo ou mínimo da função quadrática

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$,

1. Se $a > 0$, f tem um único ponto de mínimo em $x^* = -\dfrac{b}{2a}$.

O valor mínimo de f é dado por $f(x^*) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

2. Se $a < 0$, f tem um único ponto de máximo em $x^* = -\dfrac{b}{2a}$.

O valor máximo de f é dado por $f(x^*) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Exemplo 5. Altura máxima da bola de golfe

No Problema 1 acima, a trajetória de uma bola de golfe é descrita por uma parábola composta pelos pares (x,y), em que

- x é a distância horizontal da bola (em metros), medida a partir de sua posição antes da tacada;
- y é a altura da bola (em metros), dada pela função

$$f(x) = -0{,}008x^2 + x.$$

Nesse caso, como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo, e o vértice é o ponto mais alto da curva. Assim, a bola atinge a altura máxima em

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-0{,}008)} = \frac{1}{0{,}016} = 62{,}5 \text{ m},$$

e a altura nesse ponto é igual a

$$f(62{,}5) = -0{,}008 \cdot 62{,}5^2 + 62{,}5 = 31{,}25 \text{ m}.$$

Problema 6. Maximização do lucro de um restaurante

Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, cobrando R$ 15,00 pelo quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição.

a) Exprima o preço do quilo de comida, em função de x.

b) Exprima a quantidade de comida vendida, em função de x.

c) Sabendo que a receita do restaurante é o produto do preço pela quantidade de comida vendida, escreva a função $R(x)$ que fornece a receita em relação a x.

d) Determine o preço por quilo que maximiza a receita do restaurante.

Solução.

a) Se o quilograma de comida custa, atualmente, R$ 15,00, e o restaurante estuda aumentá-lo em x reais, então o novo preço pode ser descrito pela função

$$P(x) = 15 + x.$$

b) Sabemos que o restaurante vende, diariamente, 100 kg de comida, mas que essa quantidade será reduzida em 5 kg a cada R$ 1,00 acrescido ao preço. Assim, se o restaurante promover um aumento de x reais, a quantidade vendida será

$$Q(x) = 100 - 5x.$$

c) A receita do restaurante é o produto do preço pela quantidade vendida, ou seja,

$$\begin{aligned} R(x) &= P(x)Q(x) \\ &= (15 + x)(100 - 5x) \\ &= -5x^2 + 25x + 1500. \end{aligned}$$

d) Como $a < 0$, a função $R(x)$ tem um ponto de máximo em

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2 \cdot (-5)} = \frac{25}{10} = 2{,}5.$$

Logo, o aumento de preço que maximiza a receita é igual a R$ 2,50, de modo que o restaurante deve passar a cobrar, por quilograma,

$$P(2{,}50) = 15 + 2{,}50 = \text{R\\$ } 17{,}50.$$

Caso haja esse aumento de preço, a quantidade vendida diariamente será igual a

$$Q(2{,}50) = 100 - 5 \cdot 2{,}50 = 87{,}5 \text{ kg},$$

e a receita atingirá

Note que, hoje, o restaurante tem uma receita diária de R$ 1500,00.

$$R(2{,}50) = P(2{,}50)Q(2{,}50) = \text{R\\$ } 1531{,}25.$$

Agora, tente o Exercício 20.

Problema 7. Maximização da área cercada

Um fazendeiro pretende usar 500 m de cerca para proteger um bosque retangular às margens de um riacho, como mostra a Figura 4.8.

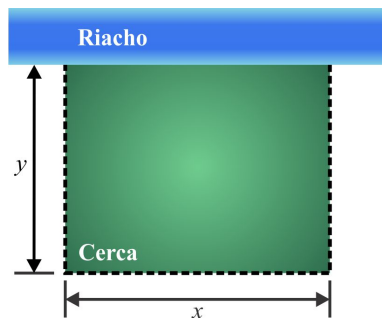



Figura 4.8: Região a ser cercada.

1. Usando o comprimento da cerca, escreva o valor de y em função de x.
2. Com base na expressão que você encontrou no item (a), escreva a função $A(x)$ que fornece a área cercada, com relação a x.
3. Determine o valor de x que maximiza a área cercada. Determine também o valor de y e a área máxima.
4. Trace o gráfico de $A(x)$.

Solução.

1. Observando a Figura 4.8, notamos que apenas três dos lados da região do bosque precisam ser protegidos. Dessa forma, a cerca medirá apenas $2y + x$. Igualando essa expressão ao comprimento de cerca de que o fazendeiro dispõe, obtemos

$$2y + x = 500.$$

Isolando y nessa equação, chegamos a

$$y = \frac{500 - x}{2}.$$

2. A área de um retângulo de dimensões x e y é igual a xy. Assim, temos

$$\begin{aligned} A(x) &= xy && \text{Área do retângulo.} \\ &= x\left(\frac{500 - x}{2}\right) && \text{Substituindo a expressão de } y. \\ &= 250x - \frac{x^2}{2} && \text{Aplicando a propriedade distributiva.} \end{aligned}$$

3. A área cercada é máxima quando

$$x = -\frac{250}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 250 \text{ m}.$$

Nesse caso, a área do bosque é igual a

$$A(250) = 250 \cdot 250 - \frac{250^2}{2} = 31250 \text{ m}^2.$$

4. O gráfico de $A(x)$ é mostrado na Figura 4.9.

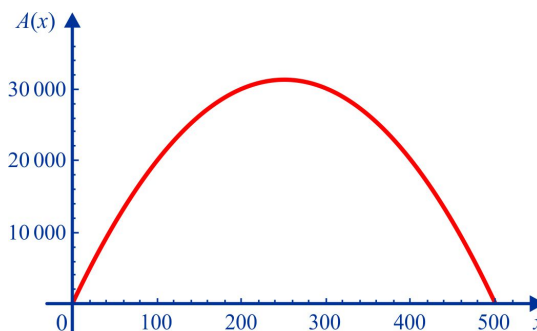



Figura 4.9: Gráfico de $A(x)$.

Agora, tente o Exercício 24.

Inequações quadráticas

Na Seção 2.11, vimos como resolver uma inequação quadrática fatorando-a e analisando o sinal dos fatores. Agora que definimos a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, discutiremos como resolver o mesmo tipo de inequação escrevendo-a na forma

$$f(x) \leq 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x) \geq 0.$$

Em nossa análise, levaremos em conta

- o número de raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$;
- o sinal de a, que indica para que lado está voltada a concavidade da parábola.

Como sabemos que a equação $f(x) = 0$ pode ter duas, uma ou nenhuma raiz real, vamos investigar quando $f(x) \leq 0$ e quando $f(x) \geq 0$ em cada um desses casos separadamente.

1. Se a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais, x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, é fácil determinar os intervalos em que f é positiva ou negativa observando a Figura 4.10. Note que o sinal de f depende do sinal de a, como descrito na Tabela 4.2.

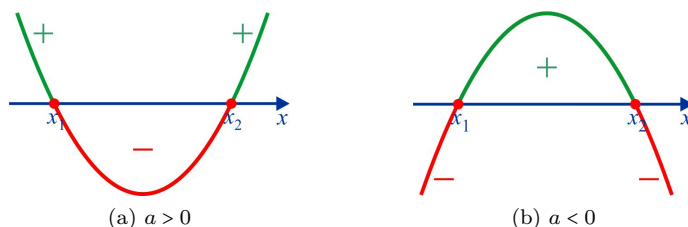



Figura 4.10: Sinal de f quando a função tem dois zeros.

Tabela 4.2: Relação entre os sinais de a e f quando a função tem dois zeros.

Sinal de f	**Sinal de** a	
	$a > 0$	$a < 0$
$f \geq 0$	$x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$f \leq 0$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$

2. Se a equação $f(x) = 0$ tem uma única raiz real, x_1, os possíveis gráficos de f são aqueles mostrados na Figura 4.11. Nesse caso, a solução de cada tipo de desigualdade é indicada na Tabela 4.3.

(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

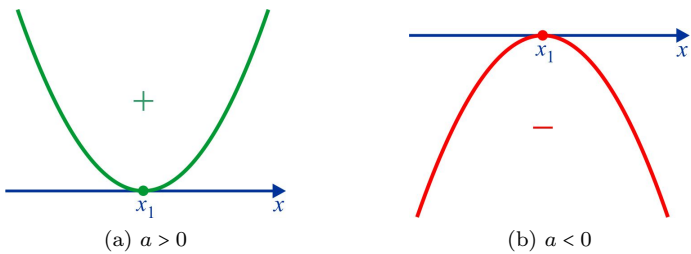



Figura 4.11: Sinal de f quando a função tem apenas um zero.

Tabela 4.3: Relação entre a e o sinal de f quando a função tem apenas um zero.

Sinal de f	**Sinal de** a	
	$a > 0$	$a < 0$
$f \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$	$x = x_1$
$f \leq 0$	$x = x_1$	$x \in \mathbb{R}$

3. Se a equação $f(x) = 0$ não tem raízes reais, então f não muda de sinal e tampouco toca o eixo-x, como mostram a Figura 4.12 e a Tabela 4.4.

(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

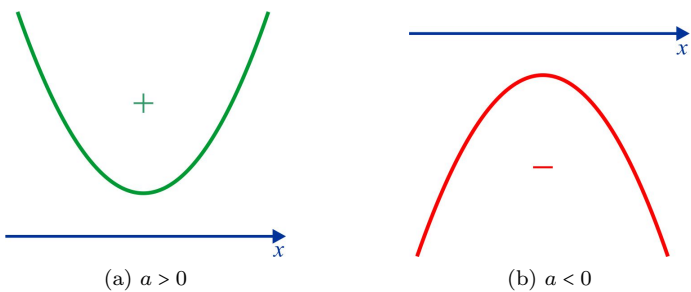



Figura 4.12: Sinal de f quando a função não tem zeros.

Tabela 4.4: Relação entre a e o sinal de f quando a função não tem zeros.

Sinal de f	Sinal de a	
	$a > 0$	$a < 0$
$f \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$	Nunca
$f \leq 0$	Nunca	$x \in \mathbb{R}$

Problema 8. Inequações quadráticas

Resolva cada inequação abaixo observando o sinal da função quadrática associada.

a) $-2x^2 + 3x + 9 \geq 10$ b) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$ c) $x^2 - 2x + 6 \geq 0$

Solução.

a) Passando todos os termos não nulos para o lado esquerdo da inequação $-2x^2 + 3x + 9 \geq 10$, obtemos

$$-2x^2 + 3x - 1 \geq 0.$$

A função quadrática associada a essa inequação é $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$. Para resolver a equação $f(x) = 0$, calculamos o discriminante

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 9 - 8 = 1,$$

e aplicamos a fórmula de Bháskara, obtendo

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm 1}{-4}.$$

Logo, as raízes de $f(x) = 0$ são

$$x_1 = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-3-1}{-4} = 1.$$

Figura 4.13: Esboço do gráfico de $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Como $a < 0$, o gráfico de f tem concavidade para baixo, cruzando o eixo-x em x_1 e x_2. Assim, como mostra a Figura 4.13, $f(x) \geq 0$ para

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}.$$

b) À inequação $x^2 - 8x + 16 \leq 0$, associamos a função quadrática

$$f(x) = x^2 - 8x + 16,$$

cujo discriminante vale

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0.$$

Sendo assim, segundo a fórmula de Bháskara,

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4.$$

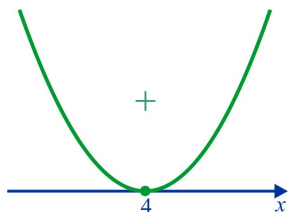



Figura 4.14: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 8x + 16$.

Observamos, portanto, que $a > 0$ e que a equação $f(x) = 0$ tem apenas uma raiz real, de modo que o diagrama que fornece o comportamento da função é aquele mostrado na Figura 4.14. Segundo a figura, $f(x) \leq 0$ apenas para

$$x = 4.$$

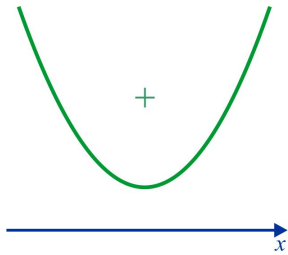



Figura 4.15: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 6$.

c) A inequação $x^2 - 2x + 6 \geq 0$ pode ser escrita como $f(x) \geq 0$, em que

$$f(x) = x^2 - 2x + 6.$$

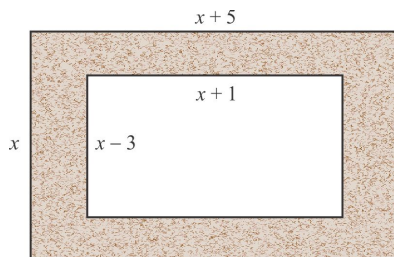
Nesse caso, o discriminante é $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 4 - 24 = -20$. Como $\Delta < 0$, a equação $f(x) = 0$ não tem raízes reais. Combinando esse resultado com o fato de que $a > 0$, concluímos que o gráfico de f está sempre acima do eixo-x. Logo, a solução de $f(x) \geq 0$ é

$$x \in \mathbb{R},$$

como indica a Figura 4.15.

Agora, tente o Exercício 31.

Exercícios 4.1

1. Defina uma função $f(x)$ que forneça a área da região destacada na figura, lembrando que a área de um retângulo de lados b e h é bh.

2. Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$,
   a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;
   b) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = -2$;
   c) esboce o gráfico da função no plano coordenado, indicando os pontos que você obteve no item (b);
   d) determine graficamente as soluções da inequação $f(x) \geq -2$.
3. Dada a função $f(x) = 5x - 2x^2$,
   a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;
   b) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 2$;
   c) esboce o gráfico da função no plano coordenado, indique os pontos que você obteve no item (b);
   d) determine graficamente as soluções da inequação $f(x) \geq 2$.
4. Dada a função $f(x) = -2x^2 + 9x$,
   a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;
   b) determine algebricamente as soluções da inequação $f(x) \geq 9$;
   c) determine algebricamente o ponto de mínimo ou máximo de f;
   d) esboce o gráfico da função no plano coordenado;
5. Dada a função $f(x) = -3x^2 + 15x$,
   a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;
   b) determine algebricamente as soluções da inequação $f(x) \geq 12$;
   c) determine algebricamente o ponto de mínimo ou máximo de f;
   d) esboce o gráfico da função no plano coordenado;
6. Dada a função $f(x) = 15x^2 + x - 2$,
   a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;
   b) determine algebricamente as soluções da inequação $f(x) \leq -2$;
   c) determine algebricamente o ponto de mínimo ou máximo de f.
7. Esboce o gráfico e determine o ponto de mínimo ou máximo de cada função.
   a) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$
   b) $f(x) = (-3 - x)(x + 3)$
   c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$
   d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$
   e) $f(x) = 4x + x^2$
   f) $f(x) = -x^2 - 4$
   g) $f(x) = (x - 4)(x + 1)$
8. Determine a função quadrática que satisfaz cada uma das condições abaixo.
   a) Tem vértice em $(1, -2)$ e passa pelo ponto $(2,3)$.
   b) Tem vértice em $(3,4)$ e cruza o eixo-y na ordenada -5.
9. Identifique, no plano coordenado, as regiões definidas abaixo.
   a) $y \geq x^2$
   b) $y = x^2 - 4$
   c) $y \leq 4 - x^2$
10. Após a administração de um comprimido de Formosex, a concentração do medicamento no plasma sanguíneo do paciente (em mg/ml) é dada pela função

$$C(t) = -\frac{t^2}{2} + 12t$$

em que t é o tempo (em horas) transcorrido desde a ingestão do comprimido. Determine o instante em que a concentração é máxima e o valor dessa concentração.

11. A quantidade de CO_2 (em g/km) que um determinado carro emite a cada quilômetro percorrido é dada aproximadamente pela função $C(v) = 1000 - 40v + v^2/2$, em que v é a velocidade do carro, em km/h. Determine a velocidade em que a emissão é mínima.

12. Durante um torneio paralímpico de arremesso de peso, a altura (em metros) do peso lançado por um atleta seguiu a função $y(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}1$, em que x é a distância horizontal (em metros) percorrida pelo peso.

a) Determine de que altura o peso foi lançado.

b) Determine a altura máxima do peso e a que distância isso ocorreu.

c) Calcule a distância horizontal percorrida pelo peso.

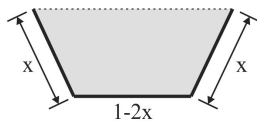
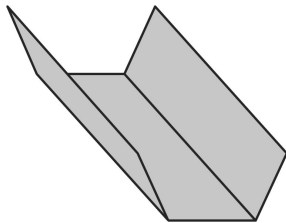
13. Arremessada por uma jogadora, uma bola de basquete descreveu uma trajetória cuja altura era dada por $h(x) = -0{,}04x^2 + x + 6$, em que x era a distância horizontal percorrida pela bola, em pés.

a) De que altura (em pés) a bola foi lançada?

b) Qual foi a altura máxima alcançada pela bola e a que distância do ponto de lançamento ela foi atingida?

c) Sabendo que a bola caiu dentro da cesta, que estava a uma altura de 10 pés do chão, calcule a que distância da cesta a bola foi lançada.

d) Trace o gráfico de $h(x)$ para $x \in [0,30]$.

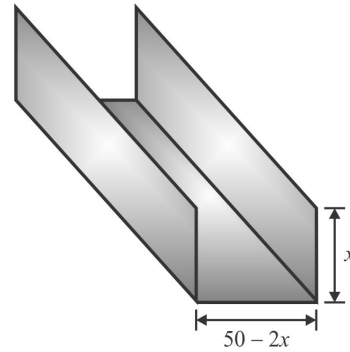
14. Um cocho para animais será construído dobrando-se uma folha de metal de 1 m de largura. As figuras abaixo mostram o cocho e sua seção transversal. Sabendo que a área da seção transversal é dada por $A(x) = \frac{x\sqrt{3}(2-3x)}{4}$,

a) determine o valor de x que maximiza essa área, bem como a área máxima;

b) esboce o gráfico de $A(x)$;

15. O lucro (em milhões de reais) que uma fábrica obtém com a venda de um produto é dado pela função $L(x) = -x^2/2 + 3x + 6$, em que x é o valor gasto (também em milhões de reais) com propaganda na televisão.

a) Calcule o valor que a empresa deve gastar com propaganda para obter o lucro máximo. Determine o lucro nesse caso.

b) Determine quanto a empresa deve gastar com propaganda para que seu lucro seja maior ou igual a 10 milhões de reais.

16. Para produzir calhas, um fabricante dobra uma folha de metal com 50 cm de largura, como mostra a figura.

a) Determine a função $A(x)$ que fornece a área da seção transversal da calha em relação a x, lembrando que a área de um retângulo de lados b e h é bh.

b) Determine o valor de x que maximiza a área da seção transversal.

17. Uma pesquisa entre os clientes de um açougue mostrou que, cobrando p reais pelo quilo de filé, a receita semanal com a venda desse corte de carne é dada pela função $R(p) = -3p^2 + 192p$.

a) Determine o preço p que maximiza a receita com a venda do filé. Calcule a receita semanal máxima com a venda desse corte de carne.

b) Determine para que valores de p a receita do açougue é maior ou igual a R$ 2100,00.

c) Esboce o gráfico de $R(p)$ para $0 \le p \le 70$.

18. O empresário da dupla sertaneja Sal & Pimenta descobriu que o número de discos (em milhares) que a dupla consegue vender está relacionado ao preço do CD, p, pela função $N(p) = 60 - 2p$.

a) Escreva uma função R(p) que forneça a receita bruta obtida com a venda dos CDs, em relação ao preço p.

b) Determine qual deve ser o preço do CD para que a receita seja de exatamente 250 mil reais.

c) Determine o valor de p que maximiza a receita bruta com a venda dos CDs. Qual é a receita nesse caso?

19. Uma pizzaria vende a pizza napolitana por R$ 28,00. Entretanto, o dono descobriu que, dando x reais de desconto no preço da pizza, a receita diária bruta com a venda é fornecida pela função $r(x) = -4x^2 + 36x + 2328$.

a) Determine o desconto x (em reais) que proporciona a receita máxima.

b) Determine para que intervalo de desconto a receita bruta é maior ou igual a R$ 2.400,00.

20. Um promotor de eventos consegue vender 5.000 ingressos para o show da banda Reset se cada ingresso custar R$ 20,00. A cada R$ 1,00 de aumento no preço do ingresso, há uma redução de 100 pagantes. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser acrescida ao valor do ingresso.

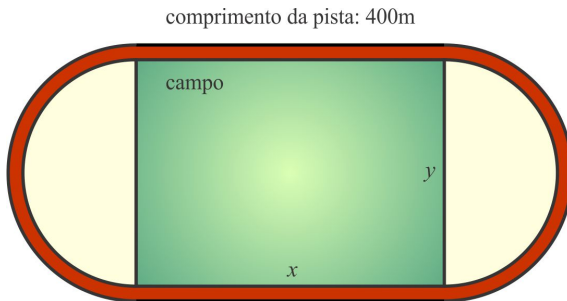
a) Exprima o preço do ingresso em função de x.

b) Exprima a quantidade de ingressos vendidos em função de x.

c) Determine a função $R(x)$ que fornece a receita do show, em relação a x. Lembre-se de que a receita é o produto do preço pela quantidade de ingressos vendidos.

d) Determine o valor do ingresso que maximiza a receita do show. Calcule a receita nesse caso.

e) Determine para quais valores de x a receita é maior ou igual a R$ 100.000,00.

21. Uma pista de atletismo tem $400m$ de comprimento, e é formada por duas semicircunferências de raio $y/2$, ligadas por dois trechos retos de comprimento x. Como se observa na figura, no interior da pista há um campo retangular de dimensões x e y. Responda aos itens abaixo, lembrando que o comprimento da semicircunferência de raio r é dado por πr e que a área de um retângulo de lados x e y é xy.

a) Usando o comprimento da pista, escreva uma equação que relacione x e y.

b) Usando a equação do item (a), escreva x em função de y.

c) Determine a função $A(y)$ que fornece a área do campo retangular, em relação a y.

d) Determine analiticamente o valor de y que faz com que a área do campo seja a maior possível. Determine, também, a área para esse valor de y.

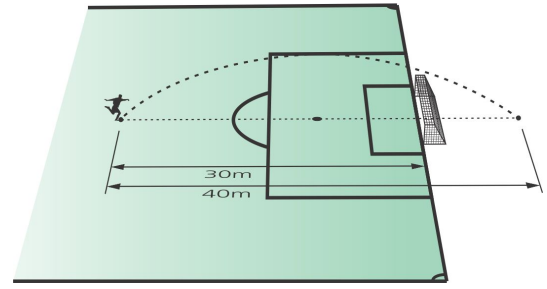
e) Esboce o gráfico de $A(y)$, exibindo os pontos em que $A(y)$ cruza o eixo-x e o ponto de máximo.

22. Uma piscina, cuja capacidade é de 120 m^3, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina, t horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a(b - t^2)$, para $0 \le t \le 20$.

a) Usando os valores de $V(0)$ e $V(20)$, calcule as constantes a e b.

b) Escreva a expressão de $V(t)$.

c) Trace o gráfico de $V(t)$.

23. Um jogador de futebol chuta uma bola a 30 m do gol adversário. A bola descreve uma trajetória parabólica, passa por cima da trave e cai a uma distância de 40 m de sua posição original, como mostrado na figura.

Suponha que a altura da bola seja dada pela função $f(x) = a^2 + bx + c$, em que x é a distância horizontal, em metros, medida a partir do ponto em que a bola foi chutada.

a) Usando $f(0)$, determine o valor da constante c.

b) Sabendo que, ao cruzar a linha do gol, a bola estava a 3 m do chão, e usando o ponto de queda da bola, escreva um sistema com duas equações que permita determinar os valores de a e b. Descubra essas constantes resolvendo o sistema.

c) Escreva a expressão de $f(x)$.

d) Determine o ponto em que a altura da bola é máxima, bem como a altura nesse ponto.

24. Um artesão tem um arame com 8 cm de comprimento, e pretende cortá-lo em duas partes, para formar dois quadrados (não necessariamente iguais). Suponha que um dos pedaços tenha comprimento x. Lembre-se que o perímetro de um quadrado de lado y é $4y$ e que sua área é y^2.

a) Determine o comprimento do outro pedaço de arame, em relação a x.

b) Escreva uma função $A(x)$ que forneça a soma das áreas dos quadrados formados pelos dois pedaços de arame, em relação ao comprimento x.

c) Determine o menor e o maior valor possível para x.

d) Trace um gráfico da função $A(x)$ para x entre os valores que você encontrou no item (c) e determine em que intervalos ela é crescente e em quais é decrescente.

e) Determine quanto devem medir os dois pedaços de arame para que a soma das áreas por eles cercadas seja a mínima possível.

25. Um pequeno agricultor dispõe de 200 m de tela, com a qual pretende cercar uma horta retangular. Lembre-se de que o perímetro de um retângulo de dimensões x e y é $2x + 2y$, e de que a área do mesmo retângulo é xy.

a) Usando o comprimento da tela, exprima y como uma função de x.

b) Determine a função $A(x)$ que fornece a área cercada em relação a x.

c) Determine o valor de x que maximiza a área cercada.

d) Encontre a área máxima da horta.

e) Esboce o gráfico de $A(x)$.

26. Uma empresa fabricante de aparelhos que tocam músicas no formato MP3 pretende lançar um novo modelo de aparelho. Após uma pesquisa de mercado, ela descobriu que o número de aparelhos a serem vendidos anualmente e o preço do novo modelo estão relacionados pela expressão $n = 115 - 0{,}25p$, em que n é o número de aparelhos (em milhares) e p é o preço de cada aparelho (em reais).

a) Escreva uma função $R(p)$ que forneça a renda bruta obtida com a venda dos aparelhos, em relação ao preço p.

b) Determine qual deve ser o preço do aparelho para que sejam vendidas, no mínimo, 80 mil unidades desse modelo.

c) Determine o valor de p que maximiza a receita bruta da empresa.

27. Jogando em seu estádio, um clube de futebol consegue vender 10.000 ingressos por partida, se cobra R$ 10,00 por ingresso. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de redução do preço do ingresso, o clube ganha 2.000 novos espectadores em uma partida. Responda às perguntas abaixo, supondo que x é a quantia, em reais, a ser reduzida do valor atualmente cobrado pelo ingresso.

a) Determine a função $R(x)$ que fornece a receita de uma partida, em relação a x. Lembre-se de que a receita é o produto do preço pela quantidade de ingressos vendidos.

b) Determine o valor de x que maximiza a receita do clube em um jogo. Determine também o valor ótimo para o ingresso.

28. Bárbara estampa camisetas e as vende em uma feira. Cobrando R$ 15,00 por unidade, ela consegue vender 100 camisetas por mês. Entretanto, Bárbara descobriu que a cada real de redução do preço da camiseta, é possível vender 10 unidades a mais. Responda às questões abaixo supondo que x seja o valor, em reais, a ser reduzido do preço cobrado atualmente por camiseta.

a) Defina a função $C(x)$ que fornece a receita total de Bárbara, em relação a x. Lembre-se de que a receita é o produto do preço cobrado pelo número de camisetas vendidas.

b) Determine o valor de x que maximiza a receita de Bárbara. Calcule, nesse caso, o valor a ser cobrado por camiseta e a receita mensal de Bárbara.

c) Esboce o gráfico de $C(x)$.

29. Em uma fábrica de bicicletas, o número mensal de unidades vendidas do modelo "Titã" é dado pela função $N(p) = 100 - p/10$, em que p é o preço de venda da bicicleta, em reais. A receita com a venda das bicicletas é definida por $R(p) = p \cdot N(p)$, e a despesa mensal é fornecida por $D(p) = 7000 + 200N(p)$. Finalmente, o lucro mensal da empresa é igual a $L(p) = R(p) - D(p)$.

a) Escreva o lucro na forma $L(p) = ap^2 + bp + c$.

b) Determine o preço que o modelo "Titã" deve ter para que o lucro com sua venda seja máximo. Calcule o lucro nesse caso.

c) Trace o gráfico de $L(p)$ para $p \in [0{,}1000]$ e indique para que valores de p a fábrica obtém algum lucro com a venda do modelo.

30. O Índice de Massa Corporal (IMC) é um indicador (um tanto discutível) da magreza ou obesidade de uma pessoa. O IMC é definido pela fórmula $IMC = p/a^2$ em que p é o peso (em kg) e a é a altura (em metros) da pessoa. A tabela abaixo fornece os intervalos de cada categoria do IMC. Observe que, seguindo a tradição, usamos "peso"em lugar do termo correto, que é "massa".

Classe	IMC
Subnutrido	$(0; 18{,}5)$
Saudável	$[18{,}5; 25)$
Acima do peso	$[25; 30)$
Obeso	$[30; 35)$
Severamente obeso	$[35; 40)$
Morbidamente obeso	$[40, \infty)$

a) Determine as funções $p_1(a)$ e $p_2(a)$ que definem o peso em relação à altura, a, para um IMC de 18,5 e um IMC de 25, respectivamente. Observe que esses são os limites para uma pessoa ser considerada saudável.

b) Trace em um gráfico as funções que você obteve no item (a), para $a \in [0;\ 2{,}2]$.

c) Determine, analítica e graficamente, o intervalo de peso para que uma pessoa de 1,80 m de altura seja considerada saudável.

31. Resolva as inequações quadráticas.

a) $x^2 + 3x \geq 10$

b) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$

c) $-4x^2 + 4x - 1 < 0$

d) $x^2 + x + 2 \leq 0$

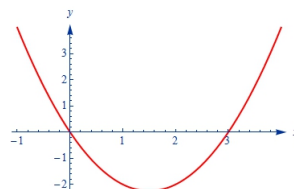
Respostas dos Exercícios 4.1

1. $3 + 7x$.

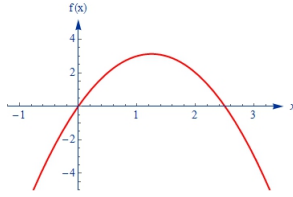
2. a) $x = 0$ e $x = 3$

b) $x = 1$ e $x = 2$

c)

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

3. a) $x = 0$ e $x = \frac{5}{2}$

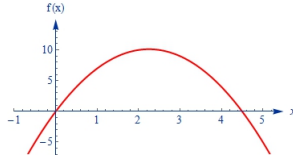
b) $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$

c)

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$

4. a) $x = 0$ e $x = 4{,}5$

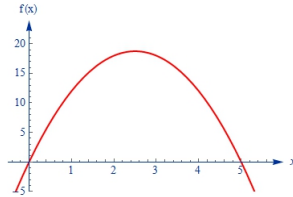
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1{,}5 \leq x \leq 3\}$

c) Ponto de máximo: $x = 2{,}25$. $f(2{,}25) = 10{,}125$ Não há mínimo.

d)

5. a) $x = 0$ e $x = 5$

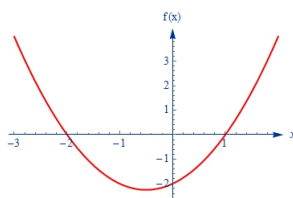
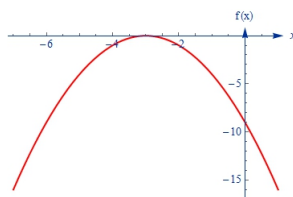
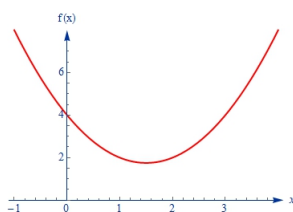
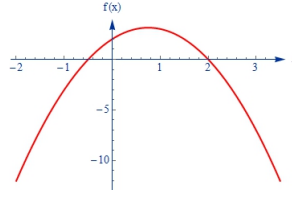
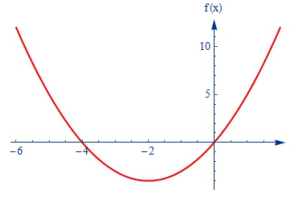
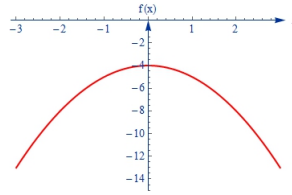
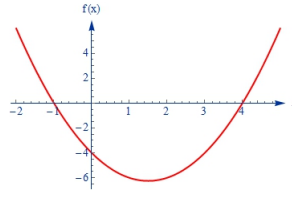
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$

c) Ponto de máximo: $x = 2{,}5$. $f(2{,}5) = 18{,}75$ Não há mínimo.

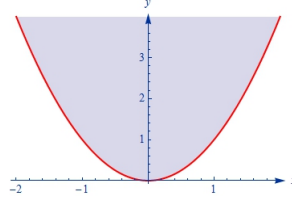
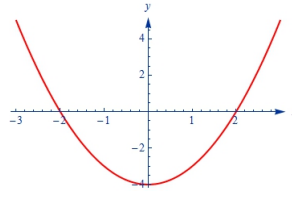
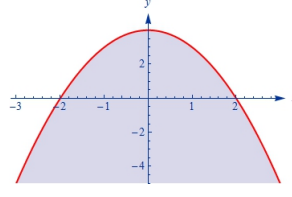
d)

6. a) $x = -\frac{2}{5}$ e $x = \frac{1}{3}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{15} \leq x \leq 0\}$

c) Ponto de mínimo: $x = -\frac{1}{30}$. $f(-\frac{1}{30}) = -\frac{121}{60}$ Não há máximo.

7. a) Mínimo em $x = -1/2$

b) Máximo em $x = -3$

c) Mínimo em $x = 1{,}5$

d) Máximo em $x = 3/4$

e) Mínimo em $x = -2$

f) Máximo em $x = 0$

g) Máximo em $x = 3/2$

8. a) $f(x) = 5(x-1)^2 - 2$

b) $f(x) = -3(x-3)^2 + 4$

9. a)

b)

c)

10. $t = 12$ h, $C(12) = 72$ mg/ml

11. 40 km/h

12. a) 1,1 m

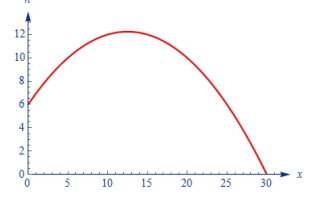
b) Altura máxima: 3,6 m
Distância: 5 m

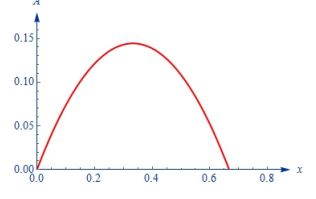
c) 11 m

13. a) 6 pés

b) Altura máxima: 12,25 pés
Distância: 12,5 pés

c) 20 pés

d)

14. a) $x = 1/3$ m. $A(1/3) = \sqrt{3}/12$ m^2

b)

15. a) Gasto com propaganda: R$ 3 milhões. Lucro: R$ 10,5 milhões

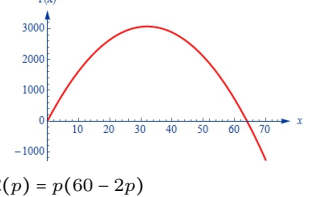
b) 2 milhões $\leq x \leq$ 4 milhões

16. a) $A(x) = x(50 - 2x)$

b) 12,5 cm

17. a) R$ 32,00. Receita: R$ 3072,00

b) R$ 14,00 $\leq p \leq$ R$ 50,00

c)

18. a) $R(p) = p(60 - 2p)$

b) R$ 5,00 ou R$ 25,00

c) Preço do CD: R$ 15,00.
Receita: R$ 450 mil.

19. a) Desconto: R$ 4,50

b) R$ 3,00 $\leq x \leq$ R$ 6,00

20. a) $20 + x$

b) $5000 - 100x$

c) $R(x) = (20 + x)(5000 - 100x)$

d) R$ 35,00. Receita: R$ 122.500,00

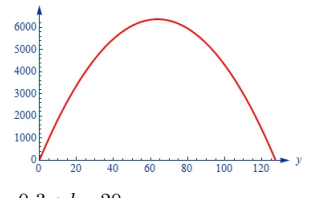
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 30\}$

21. a) $2x + \pi y = 400$

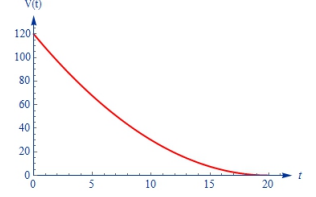
b) $x = 200 - \pi y/2$

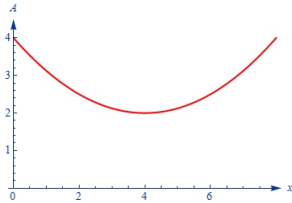
c) $A(y) = 200y - \pi y^2/2$

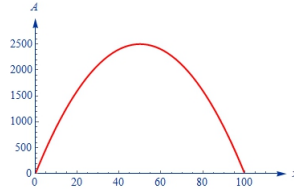
d) $200/\pi$ m. Área: $20.000/\pi$ m^2

e)

22. a) $a = 0{,}3$ e $b = 20$

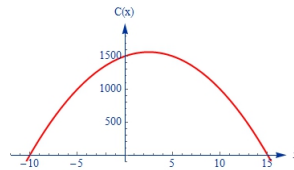
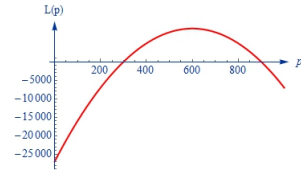
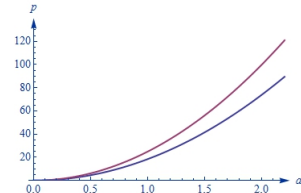
b) $V(t) = 0{,}3(20 - t)^2$

c)

23. a) $c = 0$
b) $a = -\frac{1}{100}$ e $b = \frac{2}{5}$
c) $f(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{2x}{5}$
d) $x = 20$ m. Altura: 4 m

24. a) $8 - x$
b) $A(x) = x^2/8 - x + 4$
c) $0 \le x \le 8$
d)

e) A área é mínima quando os dois pedaços medem 4 cm.

25. a) $y = 100 - x$
b) $A(x) = 100x - x^2$
c) $x = 50$ m
d) $A(50) = 2500$ m^2
e)

26. a) $R(p) = 115p - 0{,}25p^2$
b) $p \le 140$ reais
c) R$ 230,00

27. a) $R(x) = -2000x^2 + 10000x + 100000$
b) $x = 2{,}5$. Valor do ingresso R$ 7,50

28. a) $C(x) = (15 - x)(100 + 10x)$;
b) $x = 2{,}5$. Preço da camiseta: R$ 12,50. Receita: R$ 1562,50.
c)

29. a) $L(p) = -\frac{p^2}{10} + 120p - 27000$;
b) R$ 600,00. Lucro: R$ 9000,00.
c)

30. a) $p_1(a) = 18{,}5a$; $p_2(a) = 25a$
b)

c) 59,94 kg $\le p \le$ 81 kg

31. a) $x \le -5$ ou $x \ge 2$
b) $-4 < x < \frac{1}{3}$
c) $x \ne \frac{1}{2}$
d) Não há solução.

4.2 Divisão de polinômios

As operações de soma, subtração e multiplicação de polinômios, bem como de expressões algébricas em geral, foram abordadas na Seção 2.9. Agora que estamos estudando as funções polinomiais, veremos finalmente como dividir polinômios, um passo essencial para a fatoração dessas funções. A fatoração, por sua vez, é útil para encontrar os zeros da função polinomial, os quais nos permitem resolver equações e inequações, bem como traçar os gráficos dessas funções.

Para tratar da divisão de polinômios, precisamos recordar algumas características da divisão de números naturais.

Exemplo 1. Divisão de números naturais

Ao dividirmos 315 por 21, obtemos o valor exato 15. Nesse caso dizemos que

$$\frac{315}{21} = 15.$$

Essa divisão também pode ser apresentada com o auxílio do diagrama ao lado, muito explorado no ensino fundamental.

Em uma divisão de números naturais, o número que está sendo dividido (315, no exemplo acima) é denominado **dividendo**, enquanto o número pelo qual se está dividindo (21) é chamado de **divisor**. O resultado da divisão (15) recebe o nome de **quociente**.

Multiplicando por 21 os dois lados da equação acima, obtemos a equação equivalente

$$315 = 21 \cdot 15.$$

Assim, quando a divisão é exata, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente.

Considerando, agora, a divisão de 315 por 22, notamos que o resultado não é exato. Embora a divisão forneça 14 como quociente, há um **resto** de 7 unidades,

como mostra o diagrama a seguir.

$$\begin{array}{r|l} 315 & 22 \\ \cline{2-2} 7 & 14 \end{array}$$

Nesse caso, o produto $22 \cdot 14$ fornece 308, faltando 7 unidades para chegarmos a 315, de modo que

$$315 = 22 \cdot 14 + 7.$$

Dividindo os dois lados dessa equação por 22, chegamos a

$$\frac{315}{22} = 14 + \frac{7}{22},$$

que é uma forma alternativa de expressar a divisão inteira de 315 por 22.

De uma forma geral, se p é um número natural (o dividendo) e d (o divisor) é um número natural menor ou igual a p, então existe um número inteiro q (o quociente), e um número inteiro r (o resto), tais que

$$\begin{array}{r|l} p & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

$$p = d \cdot q + r.$$

Nesse caso, $0 \le r < q$. Dividindo os dois lados da equação acima por d, obtemos uma forma alternativa de expressar a divisão, que é

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}.$$

É interessante notar que resultado equivalente pode ser obtido para a divisão de polinômios, como mostra o quadro abaixo.

Como era de se esperar, os polinômios $p(x)$ e $d(x)$ recebem os nomes de **dividendo** e **divisor**, respectivamente.

Divisão de polinômios

Dados dois polinômios $p(x)$ e $d(x)$, podemos dividir $p(x)$ por $d(x)$ desde que $d(x) \neq 0$ e que o grau de $d(x)$ seja menor ou igual ao grau de $p(x)$. Nesse caso, existe um único polinômio $q(x)$, chamado **quociente**, e um único polinômio $r(x)$, chamado **resto**, tais que

$$p(x) = d(x)\, q(x) + r(x),$$

e $r(x) = 0$ ou o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $d(x)$.

Você sabia?

A razão $p(x)/q(x)$ é dita **imprópria** quando o grau de $p(x)$ é maior que o de $q(x)$. A divisão de polinômios converte uma razão imprópria na soma de um polinômio $q(x)$ e de uma razão **própria** $r(x)/d(x)$, na qual $r(x)$ tem grau menor que $d(x)$.

A equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$

Vamos dividir polinômios seguindo estratégia semelhante àquela adotada para números inteiros. Entretanto, antes de começar o processo de divisão, é conveniente

- escrever os monômios do dividendo e do divisor em ordem decrescente de grau;
- incluir os monômios que faltam, usando o zero como coeficiente.

Exemplo 2. Divisão de polinômios

Para dividir $p(x) = x^3 - 2x + 15 - 4x^2$ por $d(x) = x - 3$ devemos, em primeiro lugar, reescrever $p(x)$ em ordem decrescente do grau dos seus monômios, e montar o diagrama tradicional da divisão.

$$\begin{array}{rrrr|rr} x^3 & -4x^2 & -2x & +15 & x & -3 \\ \cline{5-6} \end{array}$$

Primeira etapa da divisão

No primeiro passo, dividimos o monômio de maior grau de $p(x)$ pelo monômio de maior grau de $d(x)$. Em nosso exemplo, isso corresponde a calcular

$$\frac{x^3}{x} = x^2.$$

Esse resultado é, então, anotado no diagrama, logo abaixo do divisor.

$$\begin{array}{rrrr|rr} x^3 & -4x^2 & -2x & +15 & x & -3 \\ \cline{5-6} & & & & x^2 & \end{array}$$

Em seguida, multiplicamos o termo encontrado, x^2 pelo divisor $d(x)$, obtendo

$$x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2.$$

Esse polinômio é, então, subtraído do dividendo $p(x)$.

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 2x + 15 - (x^3 - 3x^2) &= x^3 - 4x^2 - 2x + 15 - x^3 + 3x^2 \\ &= x^3 - x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 2x + 15 \\ &= -x^2 - 2x + 15 \end{aligned}$$

Essa operação pode ser feita diretamente no diagrama, como mostrado a seguir.

$$\begin{array}{rrrr|rr} x^3 & -4x^2 & -2x & +15 & x & -3 \\ \cline{5-6} -x^3 & +3x^2 & & & x^2 & \\ \cline{1-4} & -x^2 & -2x & +15 & & \end{array}$$

> **Atenção**
> Não se esqueça de inverter o sinal de todos os termos de $x^3 - 3x^2$ ao transcrever esse polinômio para o diagrama, pois isso facilita a subtração.

Observe que o polinômio $x^3 - 3x^2$ não possui termos de grau 1 e de grau 0. Assim, ao subtraí-lo de $x^3 - 4x^2 - 2x + 15$, simplesmente "descemos" os termos $-2x$ e $+15$ da primeira linha, somando-os a $-x^2$.

Segunda etapa da divisão

Continuando o processo, passamos à divisão do polinômio restante, $-x^2 - 2x + 15$, pelo divisor, $x - 3$. Nesse caso, tomando apenas o termo de maior grau de cada uma desses polinômios, calculamos

$$\frac{-x^2}{x} = -x.$$

Esse monômio deve ser somado à parcela já encontrada do quociente:

$$\begin{array}{rrrr|rr} x^3 & -4x^2 & -2x & +15 & x & -3 \\ \cline{5-6} -x^3 & +3x^2 & & & x^2 & -x \\ \cline{1-4} & -x^2 & -2x & +15 & & \end{array}$$

Multiplicando a nova parcela do quociente, $-x$, pelo divisor, $x-3$, obtemos

$$-x(x-3) = -x^2 + 3x.$$

Subtraindo, então, esse polinômio de $-x^2 - 2x + 15$, chegamos a

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x + 15 - (-x^2 + 3x) &= -x^2 - 2x + 15 + x^2 - 3x \\ &= -x^2 + x^2 - 2x - 3x + 15 \\ &= -5x + 15 \end{aligned}$$

O diagrama abaixo resume os passos da segunda etapa da divisão (observe que o polinômio $-x^2 + 3x$ aparece com o sinal trocado).

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -4x^2 & -2x & +15 & x-3 \\ \cline{5-5} -x^3 & +3x^2 & & & x^2 - x \\ \cline{1-4} & -x^2 & -2x & +15 & \\ & +x^2 & -3x & & \\ \cline{2-4} & & -5x & +15 & \end{array}$$

Terceira etapa da divisão

No terceiro passo do processo, dividimos o termo de maior grau de $-5x + 15$ pelo termo de maior grau de $x - 3$, ou seja, calculamos

$$\frac{-5x}{x} = -5,$$

e passamos esse termo para nosso diagrama:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -4x^2 & -2x & +15 & x-3 \\ \cline{5-5} -x^3 & +3x^2 & & & x^2 - x - 5 \\ \cline{1-4} & -x^2 & -2x & +15 & \\ & +x^2 & -3x & & \\ \cline{2-4} & & -5x & +15 & \end{array}$$

Em seguida, multiplicamos o termo encontrado pelo divisor $d(x)$,

$$-5(x-3) = -5x + 15,$$

e subtraímos esse polinômio de $-5x + 15$,

$$\begin{aligned} -5x + 15 - (-5x + 15) &= -5x + 15 + 5x - 15 \\ &= -5x + 5x + 15 - 15 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Todas essas operações são, então, incluídas no diagrama, conforme mostrado abaixo.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -4x^2 & -2x & +15 & x-3 \\ \cline{5-5} -x^3 & +3x^2 & & & x^2 - x - 5 \\ \cline{1-4} & -x^2 & -2x & +15 & \\ & +x^2 & -3x & & \\ \cline{2-4} & & -5x & +15 & \\ & & +5x & -15 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Como o resultado da subtração acima é zero, terminamos o processo. Nesse caso, dizemos que $p(x)$ é **divisível** por $d(x)$, ou seja, $r(x) = 0$ e

$$x^3 - 4x^2 - 2x + 15 = (x^2 - x - 5)(x - 3).$$

De forma equivalente, escrevemos

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 15}{x - 3} = x^2 - x - 5.$$

No exemplo acima, cada passo da divisão foi detalhado, para facilitar a compreensão dos cálculos envolvidos. Tentaremos, agora, resolver um problema mais complicado, abreviando as etapas e recorrendo mais ao diagrama do que às contas em separado.

Problema 3. Divisão de polinômios

Divida $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5$ por $d(x) = x^2 - 2x + 1$.

Solução.

Começemos completando os monômios do dividendo:

$$p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 0x + 5.$$

Agora, passemos às etapas da divisão propriamente dita.

Primeira etapa

- Dividindo o monômio de maior grau de $p(x)$ pelo monômio de maior grau de $d(x)$:

$$\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2.$$

- Multiplicando o fator obtido pelo divisor $d(x)$:

$$3x^2(x^2 - 2x + 1) = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2.$$

- Trocando o sinal desse polinômio e subtraindo-o de $p(x)$ diretamente no diagrama:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & -4x^3 & -2x^2 & +0x & +5 & x^2 -2x +1 \\ \hline -3x^4 & +6x^3 & -3x^2 & & & 3x^2 \\ \hline & 2x^3 & -5x^2 & +0x & +5 & \end{array}$$

Segunda etapa

- Dividindo o monômio de maior grau de $2x^3 - 5x^2 + 5$ pelo monômio de maior grau de $d(x)$:

$$\frac{2x^3}{x^2} = 2x.$$

- Multiplicando o fator obtido pelo divisor $d(x)$:

$$2x(x^2 - 2x + 1) = 2x^3 - 4x^2 + 2x.$$

- Trocando o sinal desse polinômio e subtraindo-o de $2x^3 - 5x^2 + 5$ diretamente no diagrama:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -4x^3 & -2x^2 & +0x & +5 & x^2 -2x +1 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +6x^3 & -3x^2 & & & 3x^2 \color{red}{+2x} \\ \cline{1-5}
 & 2x^3 & -5x^2 & +0x & +5 & \\
 & \color{red}{-2x^3} & \color{red}{+4x^2} & \color{red}{-2x} & & \\ \cline{2-5}
 & & \color{red}{-x^2} & \color{red}{-2x} & \color{red}{+5} &
\end{array}$$

Terceira etapa

- Dividindo o monômio de maior grau de $-x^2 - 2x + 5$ pelo monômio de maior grau de $d(x)$:

$$\frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

- Multiplicando o fator obtido pelo divisor $d(x)$:

$$-1(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1.$$

- Trocando o sinal desse polinômio e subtraindo-o de $-x^2 - 2x + 5$ diretamente no diagrama:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -4x^3 & -2x^2 & +0x & +5 & x^2 -2x +1 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +6x^3 & -3x^2 & & & 3x^2 +2x \color{red}{-1} \\ \cline{1-5}
 & 2x^3 & -5x^2 & +0x & +5 & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & -2x & +5 & \\
 & & \color{red}{+x^2} & \color{red}{-2x} & \color{red}{+1} & \\ \cline{3-5}
 & & & \color{red}{-4x} & \color{red}{+6} &
\end{array}$$

Como o polinômio restante, $-4x+6$, tem grau menor que o divisor, $d(x) = x^2-2x+1$, não há como prosseguir com a divisão. Nesse caso, o quociente é

$$q(x) = 3x^2 + 2x - 1,$$

e o resto é

$$r(x) = -4x + 6.$$

Assim, temos

$$\underbrace{3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5}_{p(x)} = \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{d(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x - 1)}_{q(x)} + \underbrace{(-4x + 6)}_{r(x)},$$

ou ainda

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

$$\frac{3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 - 2x + 1} = 3x^2 + 2x - 1 + \frac{-4x + 6}{x^2 - 2x + 1}.$$

Agora, tente o Exercício 1.

■ Algoritmo de Ruffini

Para dividir um polinômio por divisores na forma $(x - a)$, em que a é um número real, podemos usar um algoritmo rápido, conhecido como **Método de Ruffini** (ou de Briot-Ruffini).

Como mostra o Exemplo 4, esse método é uma versão sintética do algoritmo apresentado acima, adaptada para o caso em que o divisor tem grau 1 e o coeficiente que multiplica x nesse divisor também é igual a 1.

Exemplo 4. Divisão de um polinômio por $x - a$

Dividindo $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 25x + 1$ por $x - 2$ obtemos o quociente

$$q(x) = 4x^2 + 11x - 3$$

e o resto $r(x) = -5$. O diagrama abaixo mostra o processo de divisão.

<table>
<tr><td>$4x^3$</td><td>$+3x^2$</td><td>$-25x$</td><td>$+1$</td><td>$x \; -2$</td></tr>
<tr><td>$-4x^3$</td><td>$+8x^2$</td><td></td><td></td><td>$4x^2 +11x -3$</td></tr>
<tr><td></td><td>$+11x^2$</td><td>$-25x$</td><td>$+1$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$-11x^2$</td><td>$+22x$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$-3x$</td><td>$+1$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$+3x$</td><td>-6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>-5</td><td></td></tr>
</table>

Observando o diagrama, notamos que

1. Há uma coincidência entre os coeficientes do quociente $q(x)$ e os coeficientes dos monômios de maior grau obtidos ao longo da divisão (números apresentados em vermelho).

2. Os números vermelhos são fruto da soma dos coeficientes do dividendo $p(x)$ com os coeficientes marcados em verde no diagrama.

3. Os números verdes são o produto dos números marcados em vermelho pelo número a, que é o coeficiente constante do divisor, com o sinal trocado. Nesse exemplo, temos $a = 2$ (número em azul no divisor).

Reunindo todos os coeficientes relevantes do problema em um único quadro, obtemos o diagrama abaixo.

Coeficiente a do divisor →	2	4	3	−25	1	← Coeficientes do dividendo
			8	22	−6	
Coeficientes do quociente →		4	11	−3	−5	← Resto

Divisão pelo algoritmo de Ruffini

Vejamos como usar o quadro acima para dividir $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 25x + 1$ por $d(x) = x - 2$ através do algoritmo de Ruffini.

1. Escreva o dividendo $p(x)$ na ordem decrescente do grau dos monômios. Certifique-se de que o divisor tenha a forma $x - a$, em que a é um número real.

   No nosso caso, os monômios de $p(x)$ já estão em ordem decrescente de grau. Além disso, o divisor, que é $x - 2$, tem a forma exigida, com $a = 2$.

Lembre-se de que a é igual ao termo constante do divisor $d(x)$, com o sinal trocado.

2. Copie o termo a na primeira linha do quadro, à esquerda do traço vertical. Ainda na primeira linha, mas do lado direito do traço vertical, copie os coeficientes do dividendo $p(x)$.

2	4	3	−25	1

3. Copie na terceira linha o coeficiente do termo de maior grau de $p(x)$, que vale 4.

4. Multiplique o coeficiente que você acabou de obter pelo termo a, e escreva o resultado na segunda linha da coluna seguinte. No nosso caso, esse produto é $4 \times 2 = 8$.

5. Some os dois termos da nova coluna, e anote o resultado na terceira linha. Em nosso problema, a soma em questão é $3 + 8 = 11$.

2	4	3	−25	1
		8		
	4	11		

6. Multiplique o coeficiente que você acabou de obter pelo termo a, e escreva o resultado na segunda linha da coluna seguinte. No nosso exemplo, o produto é $11 \times 2 = 22$.

7. Some os dois termos da nova coluna, e anote o resultado na terceira linha. Em nosso caso, a soma fornece $-25 + 22 = -3$.

2	4	3	−25	1
		8	22	
	4	11	−3	

8. Multiplique o coeficiente que você acabou de obter pelo termo a, e escreva o resultado na segunda linha da coluna seguinte. No nosso exemplo, o produto é $-3 \times 2 = -6$.

2	4	3	−25	1
		8	22	−6
	4	11	−3	

9. Some os dois termos da nova coluna, e anote o resultado na terceira linha. Em nosso caso, a soma é $15 + (-6) = -5$.

2	4	3	−25	1
		8	22	−6
	4	11	−3	−5

Observe que o grau de $q(x)$ é igual ao grau de $p(x)$ menos 1.

O resto da divisão um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é sempre um número real. Se $p(x)$ é divisível por $x - a$, então o resto é zero.

Como as colunas do quadro acabaram, chegamos ao fim da divisão. Nesse caso, a última linha fornece os coeficientes dos monômios do quociente, na ordem decrescente de grau.

$$q(x) = 4x^2 + 11x - 3.$$

Além disso, o último elemento da terceira linha corresponde ao resto da divisão:

$$r = -5.$$

Problema 5. Divisão pelo algoritmo de Ruffini

Divida $2x^4 - x^3 - 12x^2 - 25$ por $x + 3$ usando o algoritmo de Ruffini.

Solução.

Além de envolver a divisão de um polinômio de grau maior que o do Exemplo 4, esse problema traz duas novidades. Em primeiro lugar, o dividendo $p(x)$ não possui um termo de grau 1, de modo que introduzimos o monômio correspondente, atribuindo-lhe o coeficiente zero:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 12x^2 + \mathbf{0}x - 25.$$

Além disso, o termo constante do divisor é +3, o que implica que o coeficiente a do quadro terá sinal negativo, ou seja, $a = -3$.

O quadro inicial do algoritmo de Ruffini é dado abaixo.

−3	2	−1	−12	0	−25

Aplicando o algoritmo, chegamos ao quadro final

−3	2	−1	−12	0	−25
		−6	21	−27	81
	2	−7	9	−27	56

Logo, o quociente da divisão é

$$q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9x - 27,$$

e o resto vale 56. Assim, temos

$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$

$$2x^4 - x^3 - 12x^2 - 25 = (x+3)(2x^3 - 7x^2 + 9x - 27) + 56,$$

ou

$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$

$$\frac{2x^4 - x^3 - 12x^2 - 25}{x+3} = 2x^3 - 7x^2 + 9x - 27 + \frac{56}{x+3}.$$

Agora, tente o Exercício 3.

■ Teorema do resto

Como vimos acima, ao dividirmos um polinômio $p(x)$ por $x - a$, obtemos o quociente $q(x)$ e o resto r, de modo que

Aqui, escrevemos apenas r, em lugar de $r(x)$, porque o resto é um número real.

$$p(x) = (x-a)q(x) + r.$$

Usando essa equação, é fácil reparar que

$$p(a) = (a-a)q(x) + r = 0 \cdot q(x) + r = r.$$

Esse resultado tem usos diversos na matemática, de modo que vamos apresentá-lo em um quadro.

Teorema do resto

Se dividimos um polinômio $p(x)$ por $x - a$, então

$$P(a) = r,$$

em que r é o resto da divisão.

Problema 6. Cálculo do valor de um polinômio pelo método de Ruffini

Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 10$, calcule $p(4)$ usando o algoritmo de Ruffini.

Solução.

O teorema do resto nos garante que $p(4)$ é igual ao resto da divisão de $p(x)$ por $x - 4$. Efetuando a divisão pelo método de Ruffini, obtemos o quadro

4	1	−2	−5	−10
		4	8	12
	1	2	3	2

Dica
Embora pareça complicado, o método de Ruffini é um meio barato de calcular $p(a)$, pois só envolve $(n-1)$ somas e $(n-1)$ multiplicações.

Como o resto da divisão é igual a 2, concluímos que $p(4) = 2$.

Agora, tente o Exercício 6.

Voltaremos ao teorema do resto na Seção 4.3, que trata de zeros de funções polinomiais.

Exercícios 4.2

1. Para cada expressão na forma $p(x)/d(x)$ abaixo, calcule o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$.

a) $(2x^3 - 3x^2 + 6)/(x^2 - 2)$
b) $(6x^2 - 4x - 3)/(3x - 5)$
c) $(x^4 + 2x - 12)/(x + 2)$
d) $(4x^3 + 2x^2 + 11x)/(2x^2 + 3)$
e) $(6x^4 + 5x^3 - 2x)/(3x - 2)$
f) $(4x^3 + 6x - 10)/(2x - 4)$
g) $(x^2 - 5x + 8)/(x - 3)$
h) $(3x + 7)/(x + 4)$
i) $(x^4 - 2)/(x - 1)$
j) $(24x^3 - 4x - 1)/(2x - 1)$
k) $(8x^3 - 12x^2 - 2x)/(4x - 8)$
l) $(x^3 - 3x^2 + 4x - 5)/(x - 4)$
m) $(2x^4 - 4x^3 + x - 17)/(x^2 - 4)$
n) $(x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 3)/(x^2 - 2x - 3)$
o) $(x^4 - 5x^2 + 4)/(x^2 - 1)$
p) $(3x^5 - 2x^3 - 11x)/(x^3 - 3x)$
q) $(6x^2 + 7x + 9)/(2x^2 - 5x + 1)$

2. Para os problemas do Exercício 1, expresse $p(x)$ na forma $d(x)q(x) + r(x)$.

3. Para cada expressão na forma $p(x)/d(x)$ abaixo, calcule o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ usando o algoritmo de Ruffini.

a) $(x^4 + 2x - 12)/(x + 2)$
b) $(3x^2 + 2x - 5)/(x - 2)$
c) $(4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 22x - 24)/(x + 3)$
d) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x + 25)/(x - 4)$
e) $(x^5 - 9x^3 + 2x)/(x - 3)$
f) $(-6x^3 + 4x^2 - x + 2)/(x - 1/3)$
g) $(2x^3 - 9x^2 + 6x + 5)/(x - 3/2)$
h) $(x^2 - 5x - 6)/(x + 1)$
i) $(-4x^2 + 11x + 26)/(x - 4)$
j) $(6x^2 - 7x - 9)/(x + 1/2)$
k) $(x^3 - 9x^2)/(x - 3)$
l) $(5x^4 - 1)/(x - 2)$
m) $(8x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 1)/(x - 1/2)$
n) $(x^4 - 20x^2 - 50)/(x - 5)$
o) $x^4/(x - 3)$
p) $(2x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 5x^2 + x - 3)/(x - 1)$

4. Para os problemas do Exercício 3, expresse $p(x)/d(x)$ na forma $q(x) + r(x)/d(x)$.

5. Usando o algoritmo de Ruffini, verifique quais valores abaixo correspondem a zeros das funções associadas.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$
b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$. $x_1 = -1/2$; $x_2 = -2$
c) $f(x) = 4x + x^2$. $x_1 = -4$; $x_2 = 0$
d) $f(x) = -x^2 - 4$. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$
e) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 9$. $x_1 = 3$; $x_2 = 1$
f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$. $x_1 = 5$; $x_2 = -1$
g) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 25x^2 + 12x$. $x_1 = -4$; $x_2 = 3$
h) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 28x + 16$. $x_1 = 6$; $x_2 = 2$
i) $f(x) = 9x^3 - 15x^2 - 26x + 40$. $x_1 = 1/2$; $x_2 = 4/3$
j) $f(x) = x^3 - 21x - 20$. $x_1 = 5$; $x_2 = 1$

6. Usando o Teorema do Resto, calcule o valor de $f(a)$ para as funções abaixo.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$. $a = 2$
b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$. $a = 3$
c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 7$. $a = 1$
d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 5$. $a = 1/2$
e) $f(x) = x^4 + x^3 + 9x + 13$. $a = -2$
f) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 15x + 32$. $a = 4$

Respostas dos Exercícios 4.2

1.
a) $q(x) = 2x - 3$. $r(x) = 4x$
b) $q(x) = 2x + 2$. $r(x) = 7$
c) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 6$. $r(x) = 0$
d) $q(x) = 2x + 1$. $r(x) = 5x - 3$
e) $q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2/3$. $r(x) = 4/3$
f) $q(x) = 2x^2 + 4x + 11$. $r(x) = 34$
g) $q(x) = x - 2$. $r(x) = 2$
h) $q(x) = 3$. $r(x) = -5$
i) $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. $r(x) = -1$
j) $q(x) = 12x^2 + 6x + 1$. $r(x) = 0$
k) $q(x) = 2x^2 + x + \frac{3}{2}$. $r(x) = 12$
l) $q(x) = x^2 + x + 8$. $r(x) = 27$
m) $q(x) = 2x^2 - 4x + 8$. $r(x) = 15 - 15x$
n) $q(x) = x^2 - 4x - 2$. $r(x) = -18x - 3$
o) $q(x) = x^2 - 4$. $r(x) = 0$
p) $q(x) = 3x^2 + 7$. $r(x) = 10x$
q) $q(x) = 3$. $r(x) = 22x + 6$

2.
a) $p(x) = (x^2 - 2)(2x - 3) + 4x$
b) $p(x) = (3x - 5)(2x + 2) + 7$
c) $p(x) = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 6)$
d) $p(x) = (2x^2 + 3)(2x + 1) + 5x - 3$
e) $p(x) = (3x-2)(2x^3+3x^2+2x+2/3)+4/3$
f) $p(x) = (2x - 4)(2x^2 + 4x + 11) + 34$
g) $p(x) = (x - 3)(x - 2) + 2$
h) $p(x) = (x + 4)3 - 5$
i) $p(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) - 1$
j) $p(x) = (2x - 1)(12x^2 + 6x + 1)$
k) $p(x) = (4x - 8)(2x^2 + x + \frac{3}{2}) + 12$
l) $p(x) = (x - 4)(x^2 + x + 8) + 27$
m) $p(x) = (x^2 - 4)(2x^2 - 4x + 8) - 15x + 15$
n) $p(x) = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 4x - 2) - 18x - 3$
o) $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$
p) $p(x) = (x^3 - 3x)(3x^2 + 7) + 10x$
q) $p(x) = (2x^2 - 5x + 1)3 + 22x + 6$

3.
a) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 6$. $r(x) = 0$
b) $q(x) = 3x + 8$. $r(x) = 11$
c) $q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 8$. $r(x) = 0$
d) $q(x) = -2x^2 - 5x - 8$. $r(x) = -7$
e) $q(x) = x^4 + 3x^3 + 2$. $r(x) = 6$
f) $q(x) = -6x^2 + 2x - \frac{1}{3}$. $r(x) = \frac{17}{9}$
g) $q(x) = 2x^2 - 6x - 3$. $r(x) = \frac{1}{2}$
h) $q(x) = x - 6$. $r(x) = 0$
i) $q(x) = -4x - 5$. $r(x) = 6$
j) $q(x) = 6x - 10$. $r(x) = -4$
k) $q(x) = x^2 - 6x - 18$. $r(x) = -54$

l) $q(x) = 5x^3 + 10x^2 + 20x + 40$. $r(x) = 79$
m) $q(x) = 8x^3 + 10x^2 + 8x + 4$. $r(x) = 3$
n) $q(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 25$. $r(x) = 75$
o) $q(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$. $r(x) = 81$
p) $q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3$. $r(x) = 0$

4. a) $p(x)/d(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 6$
b) $p(x)/d(x) = 3x + 8 + 11/(x-2)$
c) $p(x)/d(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 8$
d) $p(x)/d(x) = -2x^2 - 5x - 8 - 7/(x-4)$
e) $p(x)/d(x) = x^4 + 3x^3 + 2 + 6/(x-3)$
f) $p(x)/d(x) = -6x^2 + 2x - \frac{1}{3} + 17/(9x-3)$
g) $p(x)/d(x) = 2x^2 - 6x - 3 + 1/(2x-3)$
h) $p(x)/d(x) = x - 6$
i) $p(x)/d(x) = -4x - 5 + 6/(x-4)$
j) $p(x)/d(x) = 6x - 10 - 4/(x + \frac{1}{2})$
k) $p(x)/d(x) = x^2 - 6x - 18 - 54/(x-3)$
l) $p(x)/d(x) = 5x^3 + 10x^2 + 20x + 40 + 79/(x-2)$
m) $p(x)/d(x) = 8x^3 + 10x^2 + 8x + 4 + 3/(x - \frac{1}{2})$
n) $p(x)/d(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 25 + 75/(x-5)$
o) $p(x)/d(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27 + 81/(x-3)$
p) $p(x)/d(x) = 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3$

5. a) Nenhum valor é um zero da função.
b) Só $-1/2$ é um zero de f.
c) -4 e 0 são zeros de f.
d) Nenhum valor é um zero da função.
e) Só 3 é um zero de f.
f) Só -1 é um zero de f.
g) -4 e 3 são zeros de f.
h) Nenhum valor é um zero da função.
i) Só 4/3 é um zero de f.
j) Só 5 é um zero de f.

6. a) 8 b) 1 c) -4 d) 2 e) 3 f) -20

4.3 Zeros reais de funções polinomiais

Agora que vimos as funções constantes, lineares e quadráticas, que são funções polinomiais de grau 0, 1 e 2, respectivamente, é hora de explorarmos as características das funções

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

cujo grau, n, é maior ou igual a 3. Começaremos nossa análise estudando os zeros dessas funções.

Encontrar os zeros de uma função polinomial não é tarefa fácil quando o grau da função é maior que 2. De fato, para funções de grau 3 e 4, ainda é possível usar fórmulas explícitas para os zeros, embora elas sejam pouco práticas. Já para funções de grau maior que 4, é preciso adotar estratégias mais complexas, como veremos abaixo.

Entretanto, quando alguns zeros já são conhecidos, a determinação dos zeros restantes pode ser grandemente facilitada se usamos o *teorema do fator*, que decorre do *teorema do resto*, apresentado na Seção 4.2.

O teorema do resto nos diz que o resto da divisão de uma função polinomial $p(x)$ por um termo na forma $(x-a)$ é igual a $p(a)$, o valor de p em a. Como consequência desse teorema, concluímos que, se $p(x)$ for divisível por $x-a$, ou seja, se o resto dassa divisão for 0, então

$$p(a) = 0,$$

de modo que a é um zero do polinômio $p(x)$. Além disso, se $r = 0$, temos

$$p(x) = (x-a)q(x),$$

de modo que $(x-a)$ é um fator de $p(x)$.

Também não é difícil mostrar que, se $x - a$ é um fator de $p(x)$, então $p(a) = 0$, o que nos leva ao teorema a seguir.

Teorema do fator

Um polinômio $p(x)$ tem um fator $(x-a)$ se e somente se a é um zero de $p(x)$, ou seja, se $p(a) = 0$.

Problema 1. Determinação de um coeficiente de polinômio

Dado o polinômio $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + cx + 16$, determine o valor da constante c de modo que $x + 2$ seja um fator de $p(x)$.

Solução.

Observe que o fator $x+2$ pode ser convertido à forma $x-a$ se escrevermos $x+2 = x-(-2)$. Desse modo, temos $a = -2$.

Segundo o teorema do fator, para que $p(x)$ tenha um fator $x+2$, é preciso que $p(-2) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 3(-2)^3 + 5(-2)^2 + c(-2) + 16 &= 0 && \text{Cálculo de } p(-2). \\ -2c + 12 &= 0 && \text{Simplificação da expressão.} \\ c &= \frac{-12}{-2} && \text{Isolamento de } c. \\ c &= 6 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Logo, $x+2$ é um fator de $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 16$.

Agora, tente o Exercício 1.

Juntando o resultado fornecido pelo teorema do fator aos conhecimentos que já adquirimos sobre gráficos de funções, podemos estabelecer as seguintes relações entre fatores, zeros, soluções de equação e interceptos-x.

Zeros de funções polinomiais

Se p é uma função polinomial e a é um número real, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $x = a$ é um **zero** de p.
2. $x = a$ é **solução da equação** $p(x) = 0$.
3. $(x-a)$ é um **fator** de $p(x)$.
4. $(a,0)$ é um **ponto de interseção** do gráfico de p com o eixo-x.

Problema 2. Zeros de uma função polinomial

Seja dada a função $p(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$.

a) Determine todos os zeros de $p(x)$.

b) Escreva o polinômio na forma fatorada.

c) Trace o gráfico de p, identificando os interceptos-x.

Solução.

a) Como todos os termos de $p(x)$ incluem a variável x, podemos pô-la em evidência, de modo que

Observe que x é um fator de $p(x)$.

$$p(x) = x(x^2 + 2x - 15).$$

Logo, $p(x) = 0$ se

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Concluímos, então, que $x = 0$ é um zero de p, e que os demais zeros do polinômio são solução de

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Para encontrar as raízes dessa equação, calculamos o discriminante

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64,$$

e aplicamos a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2}.$$

Assim, temos as raízes

$$x_1 = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-2-8}{2} = -\frac{10}{2} = -5.$$

Portanto, os zeros de $p(x)$ são $x = 0$, $x = 3$ e $x = -5$.

b) Como a equação $x^2 + 2x - 15 = 0$, tem duas soluções, podemos escrever o termo quadrático $(x^2 + 2x - 15)$ como o produto de dois fatores mais simples, como foi feito na Seção 2.11.

Observando, então, que o termo de maior grau de $x^2 + 2x - 15$ tem coeficiente 1, concluímos que

$$x^2 + 2x - 15 = 1(x-3)(x+5),$$

o que implica que a forma fatorada de $p(x)$ é

$$p(x) = x(x-3)(x+5).$$

c) Sabendo que $x = -5$, $x = 0$ e $x = 3$ são zeros de $p(x)$, devemos escolher um intervalo de x que inclua esses pontos ao traçar o gráfico da função. Adotando $x \in [-6,4]$, obtemos a curva mostrada na Figura 4.16, na qual os pontos de interseção com o eixo-x estão identificados em verde.

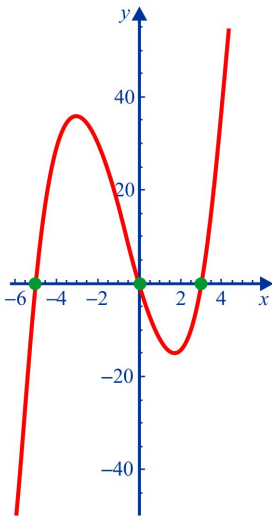



Figura 4.16: Gráfico de $p(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$.

Agora, tente o Exercício 2.

■ Fatorações sucessivas usando a divisão de polinômios

A relação entre zeros e fatores de uma função polinomial – estabelecida pelo teorema do fator e ilustrada no Problema 2 – é extremamente útil para a determinação dos demais zeros da função.

Imagine, por exemplo, que conheçamos um zero, $x = a$, de uma função $p(x)$, de grau n. Nesse caso, sabendo que $(x - a)$ é um fator de $p(x)$, podemos escrever

$$p(x) = (x-a)q(x),$$

de modo que $p(x) = 0$ se $x = a$ (a raiz já conhecida) ou $q(x) = 0$. Assim, os demais zeros de $p(x)$ serão os zeros de

$$q(x) = \frac{p(x)}{x-a}.$$

Observe que $q(x)$ é o quociente (exato) entre um polinômio de grau n e um polinômio de grau 1, o que implica que $q(x)$ é um polinômio de grau $n-1$. Logo, depois de encontrarmos um zero de $p(x)$, podemos reduzir o nosso problema ao cálculo dos zeros de um polinômio de grau $n-1$.

Para determinar o polinômio $q(x)$, podemos usar o algoritmo de Ruffini.

Além disso, se conseguirmos determinar um zero $x = b$ de $q(x)$, então teremos

$$q(x) = (x-b)s(x),$$

donde
$$p(x) = (x - a)(x - b)s(x).$$

De posse, então, de dois zeros de $p(x)$, poderemos nos dedicar a $s(x)$, que é um polinômio de grau $n - 2$. Continuando esse processo, que é chamado **deflação**, é possível determinar os demais zeros de $p(x)$.

Método das fatorações sucessivas (deflação)

Seja dada uma função polinomial p, de grau n. Para determinar todos os zeros de p,

1. Encontre a, um dos zeros de p.
2. Calcule
$$q(x) = \frac{p(x)}{x - a}.$$
3. Escreva $p(x) = (x - a)q(x)$.
4. Aplique os passos 1 a 3 ao polinômio $q(x)$ (que tem grau $n - 1$).

O processo termina quando não for possível encontrar um zero do polinômio no passo 1.

Problema 3. Fatoração de uma função polinomial

Sabendo que $x = 4$ é um zero de
$$p(x) = 25x^3 - 115x^2 + 56x + 16,$$
determine os demais zeros e fatore a função polinomial.

Solução.

Dado que $x = 4$ é um zero de p, o teorema do fator garante que $(x - 4)$ é um fator de $p(x)$. Desse modo,
$$p(x) = (x - 4)q(x),$$
para algum polinômio $q(x)$. Dividindo os dois lados da equação por $(x - 4)$, obtemos
$$q(x) = \frac{p(x)}{x - 4}.$$

Assim, $q(x)$ é o quociente da divisão de $p(x)$ por $(x - 4)$. Aplicando, então, o método de Ruffini a essa divisão, obtemos o seguinte diagrama.

Note que o resto da divisão é zero, como esperávamos. Se isso não ocorresse, teríamos cometido algum erro de conta.

4	25	−115	56	16
		100	−60	−16
	25	−15	−4	0

Portanto, $q(x) = 25x^2 - 15x - 4$, de modo que
$$p(x) = (x - 4)(25x^2 - 15x - 4).$$

Como $q(x)$ é uma função polinomial de grau 2, usamos a fórmula de Bháskara para determinar seus zeros:
$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-4) = 225 + 400 = 625.$$

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{625}}{2 \cdot 25} = \frac{15 \pm 25}{50}.$$

Logo os zeros de $q(x)$ são

$$x_1 = \frac{15+25}{50} = \frac{4}{5} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{15-25}{50} = \frac{1}{5}.$$

Se você não se lembra porque é possível escrever $q(x)$ nessa forma, consulte a Seção 2.11.

Observando, então, que o termo que multiplica x^2 em $q(x)$ é 25, obtemos

$$q(x) = 25\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right).$$

Finalmente, voltando ao polinômio p, notamos que suas raízes são

$$x_1 = \frac{4}{5}, \qquad x_2 = \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad x_3 = 4,$$

e que $p(x) = (x-4)q(x)$, o que nos permite escrevê-lo na forma fatorada como

$$p(x) = 25\,(x-4)\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right).$$

Problema 4. Fatoração de uma função polinomial

Sabendo que $x = -1$ e $x = \frac{3}{2}$ são dois zeros de

$$p(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 8x - 12,$$

determine os demais zeros e fatore a função polinomial.

Solução.

Como $x = -1$ é um zero de p, o teorema do fator indica que $(x - (-1))$ é um fator de $p(x)$, ou seja,

$$p(x) = (x+1)q(x),$$

para algum polinômio $q(x)$. Dividindo os dois lados dessa equação por $(x+1)$, obtemos

$$q(x) = \frac{p(x)}{x+1},$$

de modo que podemos determinar $q(x)$ aplicando o método de Ruffini à divisão de $p(x)$ por $(x+1)$. O diagrama do método é apresentado a seguir.

−1	2	−9	9	8	−12
		−2	11	−20	12
	2	−11	20	−12	0

Logo, $q(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 12$, donde

$$p(x) = (x+1)(2x^3 - 11x^2 + 20x - 12).$$

Como $x = \frac{3}{2}$ é outro zero de p, ele também será um zero de q. Assim,

$$q(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)s(x) \qquad \Rightarrow \qquad s(x) = \frac{q(x)}{x - \frac{3}{2}}.$$

Para determinar $s(x)$, aplicamos o algoritmo de Ruffini à divisão de $q(x)$ por $(x - \frac{3}{2})$:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{3}{2} & 2 & -11 & 20 & -12 \\ \hline & & 3 & -12 & 12 \\ \hline & 2 & -8 & 8 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

Portanto, $s(x) = 2x^2 - 8x + 8$, o que implica que

$$p(x) = (x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 8x + 8).$$

Finalmente, como $s(x)$ é uma função polinomial de grau 2, podemos determinar seus zeros usando a fórmula de Bháskara:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 64 - 64 = 0.$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Nesse caso, $\Delta = 0$, de modo que $s(x)$ tem solução única $x = 2$. Além disso, como o termo que multiplica x^2 em $s(x)$ vale 2, temos

$$s(x) = 2(x-2)^2.$$

Portanto,

$$p(x) = 2\,(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2)^2,$$

e os zeros dessa função são $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$ e $x = 2$.

Resumo dos passos

$p(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 8x - 12$	Função original.
$= (x+1)q(x)$	$x = -1$ é um zero de p.
$= (x+1)(2x^3 - 11x^2 + 20x - 12)$	$q(x) = \frac{p(x)}{x+1}$.
$= (x+1)(x - \frac{3}{2})s(x)$	$x = \frac{3}{2}$ é um zero de p e de q.
$= (x+1)(x - \frac{3}{2})(2x^2 - 8x + 8)$	$s(x) = \frac{q(x)}{x - \frac{3}{2}}$.
$= (x+1)(x - \frac{3}{2})2(x-2)^2$	$s(x) = 2(x-2)^2$ por Bháskara.

Agora, tente o Exercício 3.

■ Número de zeros reais

No Problema 3, a função polinomial, que era de grau 3, tinha exatamente 3 zeros. Já a função do Problema 4 só possuía 3 zeros, embora seu grau fosse 4. Na Seção 4.1, também vimos que funções polinomiais de grau 2 (funções quadráticas) podem ter 0, 1 ou 2 zeros.

Notamos, assim, que há uma relação entre o grau do polinômio e o número de zeros reais que ele possui. Essa relação é descrita pelo teorema a seguir.

Número de zeros reais de um polinômio

Uma função polinomial de grau n tem, no máximo, n zeros reais.

Embora esse teorema não nos permita determinar o número exato de zeros reais de uma função polinomial, ele fornece um limite superior, indicando que não é razoável esperar, por exemplo, que um polinômio de grau quatro tenha mais que quatro zeros.

De fato, se um polinômio de grau quatro tivesse cinco zeros, então ele teria cinco fatores na forma $(x-a)$. Entretanto, sabemos que o produto de cinco fatores na forma $(x-a)$ produz um polinômio de grau cinco, de modo que o polinômio jamais poderia ser de grau quatro.

A função $p(x) = 2x^4-7x^3+3x^2+7x+2$, obtida movendo-se o gráfico apresentado na Figura 4.17a oito unidades para cima, não possui zeros.

A Figura 4.17 mostra como uma simples translação na vertical pode fazer com que um polinômio de grau 4 tenha dois, três ou quatro zeros. Observando essa figura, inclusive, não seria difícil apresentar um polinômio de grau 4 que não tivesse zeros.

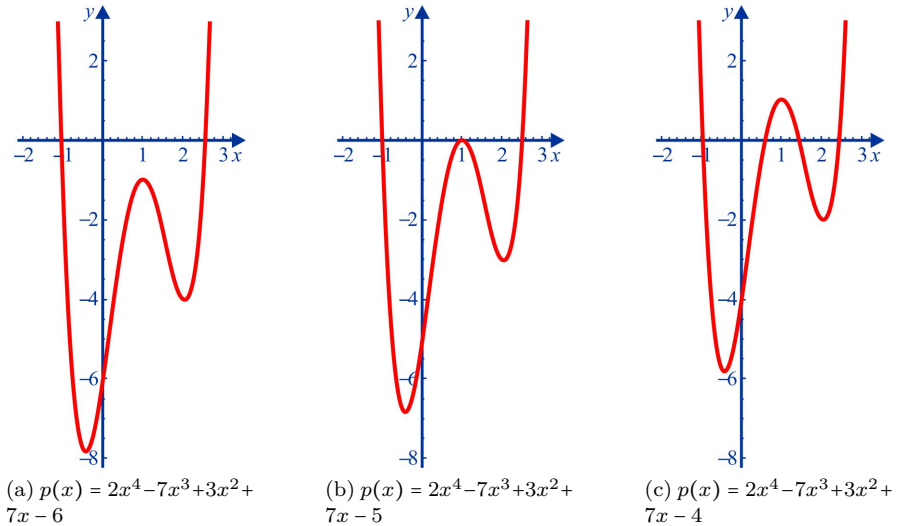



Figura 4.17: Gráficos de polinômios de grau quatro com dois, três e quatro zeros

Um teorema mais poderoso sobre polinômios com coeficientes reais é dado no quadro abaixo.

Esse teorema é derivado do *teorema fundamental da álgebra*, que envolve números complexos e será apresentado na Seção 4.6.

Decomposição em fatores lineares e quadráticos

Todo polinômio com coeficientes reais pode ser escrito como o produto de fatores lineares e fatores quadráticos irredutíveis.

Esse teorema nos diz que todo polinômio pode ser escrito como o produto de

A constante k é o coeficiente do monômio de maior grau do polinômio.

1. uma constante real k;
2. fatores lineares na forma $(x-c)$;
3. fatores quadráticos (ax^2+bx+c) que não possuem zeros reais, ou seja, que não podem ser decompostos em fatores lineares.

Além disso, a soma dos graus dos fatores deve corresponder ao grau do polinômio original.

Problema 5. Fatoração de um polinômio

Escreva o polinômio $p(x) = x^4-4x^3+13x^2$ na forma fatorada.

Solução.

Pondo x^2 em evidência, temos

$$p(x) = x^2(x^2 - 4x + 13).$$

Logo, $x = 0$ é uma raiz de $p(x) = 0$. Para tentar achar outras raízes, usamos Bháskara, começando pelo cálculo do discriminante:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36.$$

Como o discriminante é negativo, a equação $x^2 - 4x + 13 = 0$ não possui raízes reais, de modo que o termo $x^2 - 4x + 13$ é irredutível. Assim, a forma fatorada do polinômio é, simplesmente,

$$p(x) = x^2(x^2 - 4x + 13).$$

Problema 6. Fatoração de uma função polinomial

Escreva a função polinomial $p(x) = 4x^4 - 34x^2 - 18$ na forma fatorada.

Solução.

Os zeros de p são raízes de $4x^4 - 34x^2 - 18 = 0$, uma equação biquadrática, conforme mencionado na Seção 2.10. Fazendo, então, a substituição $y = x^2$, obtemos a equação quadrática

$$4y^2 - 34y - 18 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bháskara a essa equação, encontramos

$$\Delta = (-34)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-18) = 1444.$$

$$y = \frac{-(-34) \pm \sqrt{1444}}{2 \cdot 4} = \frac{34 \pm 38}{8}.$$

Logo, as raízes de $4y^2 - 34y - 18 = 0$ são

$$y_1 = \frac{34 + 38}{8} = 9 \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{34 - 38}{8} = -\frac{1}{2}.$$

De posse de y_1 e y_2, escrevemos a forma fatorada da expressão $4y^2 - 34y - 18$, que é

$$4\,(y - 9)\left(y + \frac{1}{2}\right).$$

Lembrando, agora, que $y = x^2$, podemos escrever $p(x)$ na forma

$$p(x) = \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

O termo $(x^2 - 9)$ pode ser novamente fatorado em

$$(x^2 - 9) = (x - 3)(x + 3).$$

Por outro lado, o termo $(x^2 + \frac{1}{2})$ é irredutível, já que a equação

$$x^2 + \frac{1}{2} = 0$$

não tem raízes reais. Assim, observando que a constante que multiplica x^4 em $p(x)$ é 4, concluímos que

Repare que, como o termo $x^2 + \frac{1}{2}$ (de grau 2) é irredutível, p tem apenas 2 zeros ($x = 3$ e $x = -3$) apesar de seu grau ser 4.

$$p(x) = 4\,(x-3)\,(x+3)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Agora, tente os Exercícios 4 e 5.

Quando fatoramos uma função polinomial p, de grau n, um termo $(x - a)$ pode aparecer mais de uma vez. Isso ocorre, por exemplo, com a função $p(x) = x^2 - 10x + 25$, cuja forma fatorada é

$$p(x) = (x-5)(x-5) \qquad \text{ou} \qquad p(x) = (x-5)^2.$$

O número de vezes em que um termo $(x - a)$ aparece na forma fatorada da função polinomial é chamado multiplicidade do zero $x = a$.

> Dizemos que um zero $x = a$, de um polinômio $p(x)$, tem **multiplicidade** m se a forma fatorada de $p(x)$ tem exatamente m fatores $(x - a)$.

Problema 7. Polinômio com zeros conhecidos

Defina um polinômio de grau 4 cujos zeros são $x = -1$, $x = 4$ e $x = 2$ (esse último com multiplicidade 2).

Solução.

Os zeros fornecidas no enunciado indicam que o polinômio como tem fatores $(x+1)$, $(x - 4)$ e $(x - 2)$, dos quais o último aparece duas vezes. Assim,

$$p(x) = a(x+1)(x-4)(x-2)^2,$$

em que a é um número real qualquer. Adotando, por simplicidade, $a = 1$, obtemos

$$p(x) = (x+1)(x-4)(x-2)^2.$$

Se quisermos escrever esse polinômio na forma expandida, basta calcular o produto acima. Nesse caso, teremos

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16.$$

Agora, tente o Exercício 6.

■ Determinação aproximada de zeros de funções polinomiais

Como dissemos anteriormente, encontrar zeros reais de funções polinomiais não é tarefa trivial se o grau do polinômio é grande. Nos problemas com funções de grau maior ou igual a 3 vistos até o momento, fizemos questão de permitir que o leitor fosse capaz de obter os zeros não fornecidos aplicando apenas o processo de deflação e a fórmula de Bháskara. Para tanto, foi preciso apresentar polinômios nos quais a variável x pudesse ser posta em evidência, ou polinômios biquadráticos, ou ainda polinômios com zeros conhecidos. Para concluir essa seção, discutiremos de forma sucinta como determinar aproximadamente os zeros reais de uma função polinomial.

O método mais largamente empregado para a determinação dos zeros envolve o cálculo de *autovalores* de matrizes, um conceito avançado de álgebra que não é possível apresentar nesse livro. Entretanto, sob certas condições, é possível encontrar um zero usando uma estratégia simples, baseada no teorema abaixo.

> **Teorema de Bolzano para polinômios**
>
> Seja dada uma função polinomial $p(x)$ e um intervalo $[a,b]$. Se $p(a)$ e $p(b)$ têm sinais contrários, isto é, $p(a) > 0$ e $p(b) < 0$, ou $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$, então existe um ponto c entre a e b tal que $p(c) = 0$, ou seja, $p(x)$ tem um zero em (a,b).

O teorema de Bolzano para polinômios é uma versão especializada do *teorema do valor intermediário*, visto em cursos universitários de cálculo. Ele diz que, se uma função polinomial troca de sinal entre dois pontos $x = a$ e $x = b$, então ela possui um zero entre a e b. A Figura 4.18a ilustra o teorema no caso em que $p(a)$ é negativo e $p(b)$ é positivo, e a Figura 4.18b mostra um exemplo em que $p(a) > 0$ e $p(b) < 0$.

(a) $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$ (b) $p(a) > 0$ e $p(b) < 0$

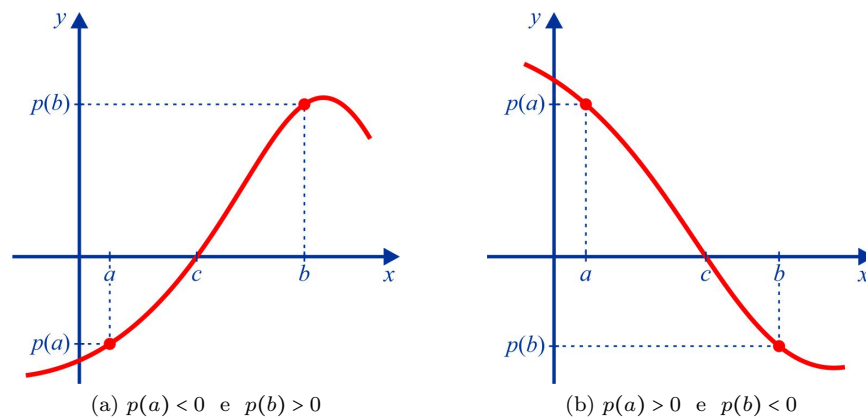



Figura 4.18: Pontos $(a,p(a))$ e $(b,p(b))$ que satisfazem o teorema de Bolzano.

Embora o teorema de Bolzano afirme que p possui um zero entre a e b, ele não fornece o valor desse zero, c. Entretanto, podemos localizar c aproximadamente usando várias vezes o teorema, como mostra o Problema a seguir.

Problema 8. Determinação de um zero pelo método da bissecção

Determine aproximadamente um zero de $p(x) = 6x^3 - 19x^2 + 25$, sabendo que $p(1) = 12$ e $p(2) = -3$.

Solução.

Como $p(1) > 0$ e $p(2) < 0$, o teorema de Bolzano garante que $p(x)$ tem um zero no intervalo $(1,2)$. Vamos chamar esse zero de x^*.

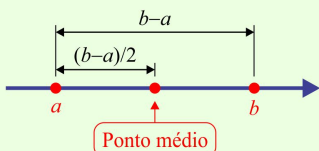
Para encontrar o zero no intervalo $(1,2)$, vamos aplicar um método iterativo no qual, a cada passo, encontramos um intervalo menor que contém x^*. Esse método exige que determinemos o ponto médio de um intervalo $[a,b]$, que é dado pela fórmula

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}.$$

> **Você sabia?**
>
> Um intervalo $[a,b]$ tem comprimento $(b-a)$. Assim, o ponto médio do intervalo é dado por
>
> $$\bar{x} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$
>
> b–a
> (b–a)/2
> a
> b
> Ponto médio

Primeiro passo

Uma vez que não conhecemos a localização exata de x^*, vamos supor que ele se encontra no meio do intervalo, ou seja, no ponto

$$\bar{x} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5.$$

Calculando o valor da função nesse ponto, obtemos $p(1{,}5) = 2{,}5$, o que indica que erramos na nossa estimativa da localização do zero. Entretanto, nosso esforço não foi em vão, pois reparamos que

$$p(1{,}5) > 0 \qquad \text{e} \qquad p(2) < 0,$$

de modo que, segundo o teorema de Bolzano, existe um zero no intervalo $(1{,}5;\ 2)$.

Como esse intervalo tem metade do comprimento de $[1{,}2]$, conseguimos reduzir nossa incerteza, obtendo uma aproximação melhor para o zero. A Figura 4.19a mostra o intervalo $[1{,}2]$ com o qual iniciamos, bem como o valor positivo de $p(1{,}5)$, que garante a existência do zero em $[1{,}5;\ 2]$.

Segundo passo

Supondo, novamente, que o zero está no meio do intervalo, que agora é $[1{,}5;\ 2]$, obtemos

$$\bar{x} = \frac{1{,}5 + 2}{2} = 1{,}75, \qquad \text{e} \qquad p(1{,}75) \approx -1.03125.$$

Nesse caso, $p(1{,}5) > 0$ e $p(1{,}75) < 0$, como mostra a Figura 4.19b. Desse modo, concluímos que há um zero no intervalo $[1{,}5;\ 1{,}75]$.

Terceiro passo

O ponto médio do intervalo $[1{,}5;\ 1{,}75]$ e a função nesse ponto valem, respectivamente,

$$\bar{x} = \frac{1{,}5 + 1{,}75}{2} = 1{,}625, \qquad \text{e} \qquad p(1{,}625) \approx 0.574219.$$

Como $p(1{,}625) > 0$ e $p(1{,}75) < 0$, concluímos que há um zero no intervalo $[1{,}625;\ 1{,}75]$, o que pode ser comprovado na Figura 4.19c.

Quarto passo

O ponto médio do intervalo $[1{,}625;\ 1{,}75]$ e a função nesse ponto valem

$$\bar{x} = \frac{1{,}625 + 1{,}75}{2} = 1{,}6875, \qquad \text{e} \qquad p(1{,}6875) \approx -0.272949.$$

Agora, temos $p(1{,}625) > 0$ e $p(1{,}6875) < 0$, como mostra a Figura 4.19d. Assim, há um zero no intervalo $[1{,}625;\ 1{,}6875]$.

(a) $1 < x^* < 2$ (b) $1{,}5 < x^* < 2$ (c) $1{,}5 < x^* < 1{,}75$ (d) $1{,}625 < x^* < 1{,}75$

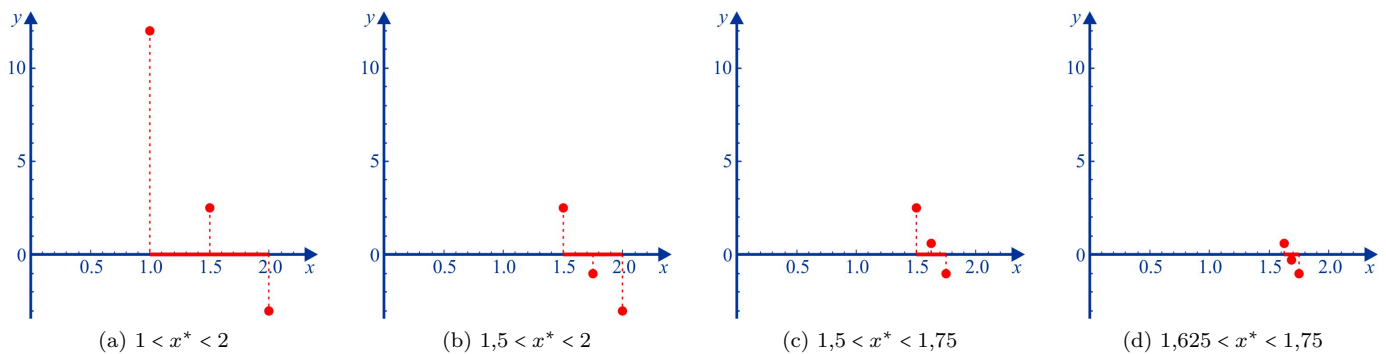



Figura 4.19: Intervalos e aproximações de x^* dos quatro primeiros passos do algoritmo da bissecção.

Note que começamos trabalhando em $[1{,}2]$ e já estamos no intervalo $[1{,}625; 1{,}6875]$, que tem apenas $1/16$ do comprimento do intervalo inicial. Prosseguindo com esse método por mais alguns passos, chegamos a um intervalo muito pequeno em torno do zero desejado de $p(x)$, que é

$$x^* = 1{,}666\ldots.$$

Agora, tente o Exercício 21.

Apesar de termos apresentado o teorema de Bolzano apenas para funções polinomiais, ele se aplica a toda função contínua, pois esse tipo de função possui uma característica muito especial:

A noção de função contínua será apresentada na Seção 4.4.

> Se f é uma função contínua, então f só muda de sinal em seus zeros. Ou seja, sempre que f passa de positiva para negativa, ou de negativa para positiva, ela passa por um ponto em que $f(x) = 0$.

Desse modo, o método da bissecção também pode ser usado para encontrar um zero de qualquer função contínua f, desde que conheçamos dois pontos nos quais f tenha sinais opostos.

■ Inequações polinomiais

Como vimos, sempre que uma função polinomial p troca de sinal, ela passa por um de seus zeros. Como consequência desse resultado, $p(x)$ é sempre positiva, ou sempre negativa, no intervalo (x_1, x_2) compreendido entre dois zeros consecutivos, x_1 e x_2.

A Figura 4.20 mostra o gráfico da função polinomial $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 7x + 5$, que tem como zeros

$$x = -1, \qquad x = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{5}{2}.$$

Figura 4.20: Gráfico de $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 7x + 5$.

Observe que a função p não muda de sinal entre dois de seus zeros consecutivos, ou seja, p é

- sempre positiva nos intervalos $(-1, \frac{1}{2})$ e $(\frac{5}{2}, \infty)$;
- sempre negativa nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

Assim, se enumerarmos todos os zeros de uma função polinomial p em ordem crescente de valor, podemos indicar com precisão se

$$p(x) \le 0 \qquad \text{ou} \qquad p(x) \ge 0$$

no intervalo entre dois zeros, bastando, para isso, testar o valor de $p(x)$ em um único ponto do intervalo.

Exemplo 9. Solução de uma inequação cúbica

Sabendo que os zeros da função $p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ são

$$x = 3, \qquad x = -1 \qquad \text{e} \qquad x = -4,$$

vamos resolver a inequação

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \le 0.$$

Nesse caso, pondo os zeros em ordem crescente, dividimos a reta real nos intervalos

$$(-\infty, -4), \qquad (-4, -1), \qquad (-1{,}3) \qquad \text{e} \qquad (3, \infty).$$

Como $p(x)$ só muda de sinal em seus zeros, testamos o sinal da função em cada intervalo calculando seu valor em um único ponto. Os quatro pontos selecionados são mostrados na Tabela 4.5, acompanhados dos respectivos valores de $p(x)$.

Tabela 4.5

x	$p(x)$
-5	-32
-2	10
0	-12
4	40

O diagrama da Figura 4.21 mostra os zeros em vermelho, e os pontos de teste da função em azul. Com base no sinal de $p(x)$ em cada um desses pontos, concluímos que $p(x) \le 0$ para

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -4 \ \text{ ou } \ -1 \le x \le 3\}.$$

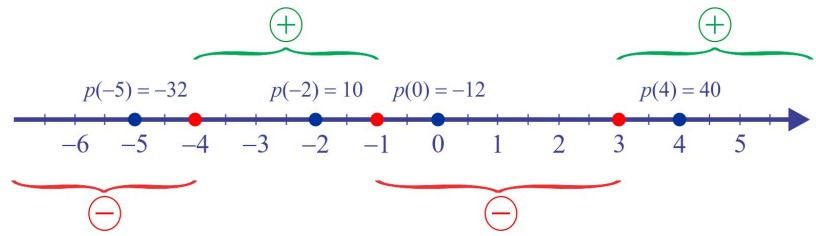



Figura 4.21: Sinal de $p(x)$ nos intervalos entre zeros consecutivos.

O quadro a seguir resume os passos para a solução de inequações polinomiais adotados no Exemplo 9.

Roteiro para a solução de inequações polinomiais

Para resolver uma inequação na forma $p(x) \leq 0$ ou $p(x) \geq 0$,

1. **Determine as raízes da equação associada.**
   Determine quantas e quais são as raízes da equação $p(x) = 0$.
2. **Crie intervalos.**
   Divida o problema em intervalos, de acordo com as raízes obtidas.
3. **Determine o sinal da função em cada intervalo.**
   Escolha um ponto em cada intervalo e calcule o valor da função no ponto.
4. **Resolva o problema.**
   Determine a solução do problema a partir do sinal de $p(x)$ nos pontos escolhidos. Expresse essa solução na forma de um ou mais intervalos.

Problema 10. Solução de uma inequação cúbica

Resolva a inequação
$$2x^3 + 13x^2 + 13x \geq 10,$$
sabendo que $x = \frac{1}{2}$ é uma raiz da equação $2x^3 + 13x^2 + 13x = 10$.

Solução.

Movendo todos os termos para o lado esquerdo, obtemos a inequação equivalente

$$2x^3 + 13x^2 + 13x - 10 \geq 0,$$

à qual associamos a função $p(x) = 2x^3 + 13x^2 + 13x - 10$. Sabendo que $x = \frac{1}{2}$ é um zero dessa função, vamos determinar os zeros restantes.

$\frac{1}{2}$	2	13	13	−10
		1	7	10
	2	14	20	0

Dividindo, então, $p(x)$ por $(x - \frac{1}{2})$, obtemos

$$q(x) = 2x^2 + 14x + 20.$$

Dessa forma,

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) q(x).$$

Aplicando, agora, a fórmula de Bháskara, encontramos as raízes de $q(x) = 0$:

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 36.$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{-14 \pm 6}{4}.$$

Logo, as raízes são

$$x_1 = \frac{-14+6}{4} = -2 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-14-6}{4} = -5,$$

de modo que $p(x)$ tem como zeros

$$x = -5, \qquad x = -2 \qquad \text{e} \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Tomando como base esses zeros, dividimos a reta real nos intervalos

$$(-\infty, -5), \qquad (-5, -2), \qquad \left(-2, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Escolhendo, então, os pontos mostrados na Tabela 4.6, montamos o diagrama da Figura 4.22, que mostra o sinal de $p(x)$ em cada intervalo. Com base nesse diagrama, concluímos que $p(x) \geq 0$ para

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -5 \leq x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Tabela 4.6

x	$p(x)$
-6	-52
-3	14
0	-10
2	84

+ +
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2
− −

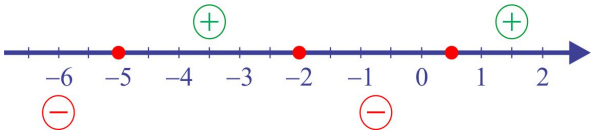



Figura 4.22: Sinal de $p(x)$ nos intervalos entre zeros consecutivos.

Solução alternativa

Também podemos resolver inequações polinomiais de qualquer grau fatorando o polinômio e analisando o sinal de cada termo com o auxílio de um diagrama ou tabela, a exemplo do que foi feito para inequações quadráticas na Seção 2.11.

Para o problema em questão, em que os zeros de $p(x) = 2x^3 + 13x^2 + 13x - 10$ são $x = -5$, $x = -2$ e $x = \frac{1}{2}$, a forma fatorada da função polinomial é

$$p(x) = 2\,(x+5)\,(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Tomando, então, os intervalos $(-\infty, -5)$, $(-5, -2)$, $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, montamos a tabela abaixo.

Tabela 4.7: Sinal de $p(x) = 2x^3 + 13x^2 + 13x - 10$ e de seus fatores em cada intervalo.

Termo	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
$(x+5)$	−	+	+	+
$(x+2)$	−	−	+	+
$(x-\frac{1}{2})$	−	−	−	+
$2(x+5)(x+2)(x-\frac{1}{2})$	−	+	−	+

Com base na tabela 4.7, concluímos que a solução da inequação é dada por

$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -5 \leq x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Agora, tente os Exercícios 8 e 18.

Problema 11. Solução de uma inequação de quarto grau

Resolva a inequação

$$x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 48x \leq 0,$$

sabendo que $x = 3$ é um zero de $p(x) = x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 48x$.

Solução.

3	1	5	−8	−48	0
		3	24	48	0
	1	8	16	0	0

Sabendo que $x = 3$ é um zero de p, podemos determinar os zeros restantes dividindo $p(x)$ pelo fator $(x - 3)$, usando do algoritmo de Ruffini. Do diagrama ao lado, concluímos essa divisão fornece

$$q(x) = x^3 + 8x^2 + 16x.$$

Sendo assim,

$$p(x) = (x - 3)\,(x^3 + 8x^2 + 16x).$$

Observando o segundo termo dessa expressão, notamos que é possível por x em evidência, de modo que

$$p(x) = (x - 3)\,x(x^2 + 8x + 16),$$

o que indica que x também é um fator de p, o que é o mesmo que dizer que $x = 0$ é um zero da função polinomial.

Para encontrar os demais zeros de p, aplicamos a fórmula de Bháskara à equação $x^2 + 8x + 16 = 0$:

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0.$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Assim, a única raiz de $x^2 + 8x + 16 = 0$ é $x = -4$. Reunindo, então, os zeros de p, temos

$$x = -4 \text{ (com multiplicidade 2)}, \qquad x = 0 \qquad \text{e} \qquad x = 3.$$

Tomando como base esses zeros, dividimos a reta real nos intervalos

$$(-\infty, -4), \qquad (-4, 0), \qquad (0, 3) \qquad \text{e} \qquad (3, \infty).$$

Escolhendo, agora, um valor de x em cada intervalo e calculando $p(x)$ para os quatro valores selecionados, obtemos os pares ordenados mostrados na Tabela 4.8. Com base nesses pares, montamos o diagrama da Figura 4.23, que fornece o sinal de p em cada intervalo.

Tabela 4.8

x	$p(x)$
-5	40
-1	36
1	-50
4	256

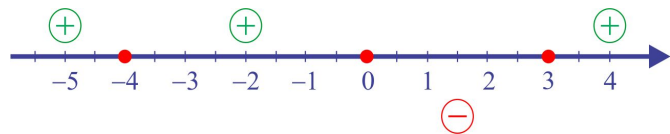



Figura 4.23: Sinal de $p(x)$ nos intervalos entre zeros consecutivos.

Com base na Figura 4.23, concluímos que $p(x) \leq 0$ para

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}.$$

Solução alternativa

Como alternativa, adotemos mais uma vez a estratégia apresentada na Seção 2.11, que consiste em fatorar $p(x)$ e determinar o valor dessa função em cada intervalo combinando os sinais de seus fatores.

Note que o termo $(x+4)$ aparece ao quadrado na forma fatorada de p, uma vez que a raiz $x=-4$ tem multiplicidade 2.

Observando que os zeros de $p(x) = x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 48x$ são $x = -4$ (com multiplicidade 2), $x = 0$ e $x = 3$, obtemos a forma fatorada da função, que é

$$p(x) = (x+4)^2 x(x-3).$$

Definindo, então, os intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, \infty)$, montamos a tabela a seguir, na qual o termo $(x+4)$ aparece duplicado em virtude de estar elevado ao quadrado na forma fatorada de p.

Seria possível substituir as duas linhas associadas a $(x+4)$ na tabela ao lado, por uma única linha contendo o termo $(x+4)^2$, que é positivo para todo x real.

Tabela 4.9: Sinal de $p(x) = x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 48x$ e de seus fatores em cada intervalo.

Termo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$(x+4)$	−	+	+	+
$(x+4)$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$(x-3)$	−	−	−	+
$(x+4)^2 x(x-3)$	+	+	−	+

Observando a Tabela 4.9, concluímos que $x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 48x \le 0$ para

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 3\}.$$

Exercícios 4.3

1. Para cada função polinomial abaixo, determine o valor da constante c de modo que o termo fornecido seja um fator de p.

a) $p(x) = x^2 - 9x + c$. Fator: $x - 8$
b) $p(x) = 5x^2 + cx + 9$. Fator: $x + 3$
c) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + c$. Fator: $x - 5$
d) $p(x) = 3x^3 + cx^2 - 13x + 3$. Fator: $x - 1$
e) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 8x^2 + cx - 2$. Fator: $x - 2$
f) $p(x) = 2x^4 - 10x^3 + cx^2 + 6x + 40$. Fator: $x - 4$

2. Determine as raízes das equações abaixo. Escreva na forma fatorada os polinômios que aparecem no lado esquerdo das equações.

a) $x^3 - 4x = 0$
b) $x^3 - 4x^2 - 21x = 0$
c) $2x^3 + 11x^2 - 6x = 0$
d) $-3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$
e) $x^4 - x^3 - 20x^2 = 0$
f) $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$
g) $5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = 0$
h) $8x^4 - 6x^3 - 2x^2 = 0$

3. Determine as raízes das equações abaixo. Escreva na forma fatorada os polinômios que aparecem no lado esquerdo das equações.

a) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$,
sabendo que $x = -1$ é uma raiz.
b) $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$,
sabendo que $x = 2$ é uma raiz.
c) $x^4 - 9x^3 - x^2 + 81x - 72 = 0$,
sabendo que $x = 8$ e $x = 3$ são raízes.
d) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$,
sabendo que $x = 4$ é uma raiz.
e) $x^3 - 4x^2 - 17x + 60 = 0$,
sabendo que $x = 3$ é uma raiz.
f) $4x^4 - 21x^3 - 19x^2 + 6x = 0$,
sabendo que $x = 1/4$ é uma raiz.
g) $4x^3 - 16x^2 + 21x - 9 = 0$,
sabendo que $x = 1$ é uma raiz.
h) $3x^3 - 26x^2 + 33x + 14$,
sabendo que $x = 7$ é uma raiz.
i) $x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90$,
sabendo que $x = -2$ e $x = 5$ são raízes.
j) $x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 30x$,
sabendo que $x = 6$ é uma raiz.
k) $2x^4 + 9x^3 - 80x^2 + 21x + 108$,
sabendo que $x = 4$ e $x = \frac{3}{2}$ são raízes.

4. Determine as raízes das equações abaixo. Escreva na forma fatorada os polinômios que aparecem no lado esquerdo das equações.

a) $x^3 + 7x^2 + 13x + 15 = 0$,
sabendo que $x = -5$ é uma raiz.

b) $3x^3 + 2x^2 + 17x - 6 = 0$,
sabendo que $x = \frac{1}{3}$ é uma raiz.

c) $x^3 + 7x^2 + 20x + 32 = 0$,
sabendo que $x = -4$ é uma raiz.

d) $x^3 - 3x^2 + 9x - 27 = 0$,
sabendo que $x = 3$ é uma raiz.

e) $2x^3 - 10x^2 - 13x - 105 = 0$,
sabendo que $x = 7$ é uma raiz.

f) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 36x + 60 = 0$,
sabendo que $x = 2$ é uma raiz de multiplicidade 2.

g) $x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 150x = 0$,
sabendo que $x = 6$ é uma raiz.

h) $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$,
sabendo que $x = \frac{1}{3}$ e $x = -\frac{1}{2}$ são raízes.

5. Fazendo a mudança de variável $w = x^2$, determine os zeros das funções abaixo, e as escreva na forma fatorada.

a) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
b) $p(x) = 4x^4 - 65x^2 + 16$
c) $p(x) = 9x^4 - 10x^2 + 1$
d) $p(x) = x^4 - 24x^2 - 25$
e) $p(x) = 2x^4 - 27x^2 - 80$
f) $p(x) = x^4 - 32x^2 - 144$

6. Em cada caso abaixo, escreva na forma expandida uma função polinomial que tenha o grau e os zeros indicadas.

a) Grau 2, com zeros $x = -4$ e $x = 0$.
b) Grau 2, com zeros $x = 1/2$ e $x = 2$, com concavidade para baixo.
c) Grau 3, com zeros $x = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.
d) Grau 3, com zeros $x = -2$ e $x = 1$ (com multiplicidade 2).
e) Grau 3, com zero $x = 8$ (com multiplicidade 3).
f) Grau 4, com zeros $x = -3$, $x = -2$, $x = 0$ e $x = 5$.
g) Grau 4, com zeros $x = -6$, $x = 6$ e $x = \sqrt{3}$ (com multiplicidade 2).
h) Grau 4, com zeros $x = -5$, $x = -4$, $x = -1$ e $x = 3$.
i) Grau 5, com zeros $x = -1/3$, $x = -2/3$, $x = 4/3$ e $x = 5/3$ (com multiplicidade 2).
j) Grau 6, com zeros $x = -1/2$ (com multiplicidade 3), $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ e $x = 0$.

7. Escreva na forma expandida as funções polinomiais que você encontrou nos itens (a) a (f) do Exercício 6.

8. Resolva as desigualdades abaixo.

a) $(x-1)(x+2)(x-4) \leq 0$
b) $(x+1)(x-2)x \geq 0$
c) $x^3 - 2x \geq 0$
d) $2x^3 - 18x \leq 0$

9. Sabendo que $x = 3$ é um zero de $f(x) = 3x^3 - 39x + 36$,

a) Determine todos os zeros da função.
b) Resolva $3x^3 - 39x + 36 \leq 0$.

10. Sabendo que $x = -5$ é uma raiz da equação $2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.
b) Resolva a inequação $2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 \geq 0$.

11. Sabendo que $x = 4$ é um zero da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$,

a) Determine todos os zeros de $f(x)$.
b) Escreva $f(x)$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

12. Sabendo que $x = 5$ é uma raiz da equação $-x^3 + 5x^2 + 4x - 20 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.
b) Escreva o polinômio $-x^3 + 5x^2 + 4x - 20$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $-x^3 + 5x^2 + 4x - 20 \leq 0$.

13. Sabendo que $x = -6$ é uma raiz da equação $16x^3 + 88x^2 - 47x + 6 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.
b) Escreva o polinômio $16x^3 + 88x^2 - 47x + 6$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $16x^3 + 88x^2 - 47x + 6 \leq 0$.

14. Sabendo que $x = 7$ é uma raiz da equação $x^3 - 5x^2 - 13x - 7 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.
b) Escreva o polinômio $x^3 - 5x^2 - 13x - 7$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $x^3 - 5x^2 - 13x - 7 \leq 0$.

15. Sabendo que $x = 2$ é uma raiz da equação $x^3 - 2x^2 + 16x - 32 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.
b) Escreva o polinômio $x^3 - 2x^2 + 16x - 32$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $x^3 - 2x^2 + 16x - 32 \leq 0$.

16. Sabendo que $x = -3$ é uma raiz da equação $x^3 + 5x^2 + 10x + 12 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.
b) Escreva o polinômio $x^3 + 5x^2 + 10x + 12$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $x^3 + 5x^2 + 10x + 12 \geq 0$.

17. Sabendo que $x = 4$ é uma raiz da equação $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x = 0$,

a) Determine todas as raízes da equação.
b) Escreva o polinômio $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x \geq 0$.

18. Sabendo que $x = 3$ é um zero da função $f(x) = 2x^4 + 10x^3 - 16x^2 - 96x$,

a) Determine todos os zeros de f.
b) Escreva $f(x)$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

19. Sabendo que $x = 6$ é um zero de $f(x) = 4x^4 - 20x^3 - 23x^2 - 6x$,

a) Determine todos os zeros da função.

b) Escreva $f(x)$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $f(x) \geq 0$.

20. Sabendo que $x = 1$ e $x = -2$ são zeros de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 2x - 16$,

a) Determine todos os zeros da função.
b) Escreva $f(x)$ na forma fatorada.
c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

21. Usando o método da bissecção, determine um zero de $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ que pertença ao intervalo $[2,4]$.

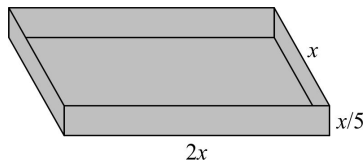
22. Usando o método da bissecção, determine um zero de $p(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 5$ no intervalo $[1,5]$.

23. Usando o método da bissecção, determine um zero de $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6$ no intervalo $[1,2]$.

24. Usando o método da bissecção, determine um zero de $p(x) = x^3 - 3x + 1$ no intervalo $[-2, -1]$.

25. Usando o método da bissecção, determine um zero de $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x$ no intervalo $[2,3]$.

26. Usando o método da bissecção, determine um zero de $p(x) = x^4 - 6x^2 - 5x$ no intervalo $[1,3]$.

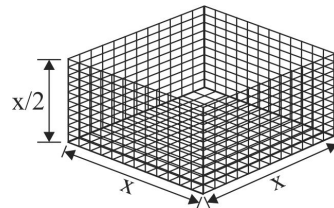
27. A figura abaixo mostra uma caixa, fabricada a partir de uma folha de papelão.

Encontre o valor de x, em centímetros, sabendo que a caixa cheia comporta 5 litros. Lembre-se de que 1 litro equivale a 1000 cm^3 e de que o volume de um prisma retangular de lados x, y e z é igual a xyz.

28. Quarenta pessoas em excursão pernoitam em um hotel. Somados, os homens despendem R\$ 2400,00. O grupo de mulheres gasta a mesma quantia, embora cada uma tenha pago R\$ 64,00 a menos que cada homem. Supondo que x denota o número de homens do grupo, determine esse valor.

29. Um tanque de gás tem o formato de um cilindro ao qual se acoplou duas semiesferas, como mostrado na figira abaixo. Observe que o comprimento do cilindro corresponde a 5 vezes o raio de sua base.

Responda às perguntas abaixo, lembrando que o volume de uma semiesfera de raio r é $\frac{2}{3}\pi r^3$, e que o volume de um cilindro com altura h e raio da base r é dado por $\pi r^2 h$.

a) Exprima o volume do cilindro em função apenas de r.
b) Escreva uma função $V(r)$ que forneça o volume do tanque em relação a r.
c) Determine o valor de r que permite que o tanque armazene 25 m^3 de gás.

30. Em um sistema de piscicultura superintensiva, uma grande quantidade de peixes é cultivada em tanques-rede colocados em açudes, com alta densidade populacional e alimentação à base de ração. Os tanques-rede têm a forma de um prisma retangular e são revestidos com uma rede que impede a fuga dos peixes, mas permite a passagem da água (vide figura).

Para uma determinada espécie, a densidade máxima de um tanque-rede é de 400 peixes adultos por metro cúbico. Suponha que um tanque possua largura igual ao comprimento e altura igual à metade da largura. Quais devem ser as dimensões mínimas do tanque para que ele comporte 7200 peixes adultos da espécie considerada? Lembre-se que o volume de um prisma retangular de lados x, y e z é xyz.

Respostas dos Exercícios 4.3

1. a) $c = 8$ b) $c = 18$ c) $c = 10$ d) $c = 7$ e) $c = -15$ f) $c = 4$

2.
a) $p(x) = x(x-2)(x+2)$
Raízes: 0, 2 e -2
b) $p(x) = x(x+3)(x-7)$
Raízes: 0, -3 e 7
c) $p(x) = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+6)$
Raízes: 0, $\frac{1}{2}$ e -6
d) $p(x) = -3x(x-3)(x+1)$
Raízes: 0, 3 e -1
e) $p(x) = x^2(x-5)(x+4)$
Raízes: 5, -4 e 0 (multiplicidade 2)
f) $p(x) = x^2(x-4)^2$
Raízes: 4 (mult. 2) e 0 (mult. 2)
g) $p(x) = 5x^2\left(x - \frac{3}{5}\right)(x-1)$
Raízes: $\frac{3}{5}$, 1 e 0 (multiplicidade 2)
h) $p(x) = 8x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$
Raízes: $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{4}$ e 0 (multiplicidade 2)

3.
a) $p(x) = (x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
Raízes: -1, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$
b) $p(x) = (x-1)(x-2)(x-8)$
Raízes: 1, 2 e 8
c) $p(x) = (x+3)(x-1)(x-3)(x-8)$
Raízes: -3, 1, 3 e 8
d) $p(x) = (x+3)(x-2)(x-4)$
Raízes: -3, 2 e 4
e) $p(x) = (x+4)(x-3)(x-5)$
Raízes: -4, 3 e 5
f) $p(x) = 4(x + \frac{1}{4})x(x+1)(x-6)$
Raízes: -1, 0, $\frac{1}{4}$ e 6
g) $p(x) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x-1)$
Raízes: 1 e $\frac{3}{2}$

4.
a) $p(x) = (x+5)\left(x^2 + 2x + 3\right)$
Raiz: -5

b) $p(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + x + 6\right)$
Raiz: $\frac{1}{3}$
c) $p(x) = (x + 4)\left(x^2 + 3x + 8\right)$
Raiz: -4
d) $p(x) = (x - 3)\left(x^2 + 9\right)$
Raiz: 3
e) $p(x) = (x - 7)\left(2x^2 + 4x + 15\right)$
Raiz: 7
f) $p(x) = (x - 2)^2\left(x^2 + 6x + 15\right)$
Raiz: 2 (multiplicidade 2)
g) $p(x) = x(x - 6)\left(x^2 + 25\right)$
Raizes: 0 e 6
h) $p(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + x + 1\right)$
Raizes: $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$

5. a) $x = -3$, $x = 3$, $x = -2$ e $x = 2$
$p(x) = (x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2)$
b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -4$ e $x = 4$
$p(x) = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x + 4)(x - 4)$
c) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, $x = -1$ e $x = 1$
$p(x) = 9(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})(x + 1)(x - 1)$
d) $x = -5$ e $x = 5$
$p(x) = (x + 5)(x - 5)(x^2 + 1)$
e) $x = -4$ e $x = 4$
$p(x) = (x + 4)(x - 4)\left(2x^2 + 5\right)$
f) $x = -6$ e $x = 6$
$p(x) = (x + 6)(x - 6)\left(x^2 + 4\right)$

6. a) $x(x + 4)$
b) $-(x - \frac{1}{2})(x - 2)$
c) $x(x - 1)(x - 3)$
d) $(x + 2)(x - 1)^2$
e) $(x - 8)^3$
f) $x(x + 3)(x + 2)(x - 5)$
g) $(x + 6)(x - 6)(x - \sqrt{3})^2$
h) $(x + 5)(x + 4)(x + 1)(x - 3)$
i) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{2}{3})(x - \frac{4}{3})(x - \frac{5}{3})^2$
j) $x(x - \frac{1}{2})^3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

7. a) $p(x) = x^2 + 4x$
b) $p(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x - 1$
c) $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
d) $p(x) = x^3 - 3x + 2$
e) $p(x) = x^3 - 24x^2 + 192x - 512$
f) $p(x) = x^4 - 19x^2 - 30x$

8. a) $x \le -2$ ou $1 \le x \le 4$
b) $-1 \le x \le 0$ ou $x \ge 2$
c) $-\sqrt{2} \le x \le 0$ ou $x \ge 2$
d) $x \le -3$ ou $0 \le x \le 3$

9. a) $x = -4$, $x = 1$ e $x = 3$
b) $x \le -4$ ou $1 \le x \le 3$

10. a) $x = -5$, $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$
b) $-5 \le x \le -\frac{1}{2}$ ou $x \ge 2$

11. a) $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = 4$
b) $f(x) = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})(x - 4)$
c) $x \le -3$ ou $\frac{1}{2} \le x \le 4$

12. a) $x = -2$, $x = 2$ e $x = 5$
b) $f(x) = -(x + 2)(x - 2)(x - 5)$
c) $-2 \le x \le 2$ ou $x \ge 5$

13. a) $x = -6$ e $x = \frac{1}{4}$ (multiplicidade 2)
b) $p(x) = 16(x + 6)\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$
c) $x \le -6$ ou $x = \frac{1}{4}$

14. a) $x = 7$ e $x = -1$ (multiplicidade 2)
b) $p(x) = (x - 7)(x + 1)^2$
c) $x \le 7$

15. a) $x = 2$ é a única raiz real
b) $p(x) = (x - 2)\left(x^2 + 16\right)$
c) $x \le 2$

16. a) $x = -3$ é a única raiz real
b) $p(x) = (x + 3)\left(x^2 + 2x + 4\right)$
c) $x \ge -3$

17. a) $x = 0$, $x = -3$, $x = 2$ e $x = 4$
b) $p(x) = x(x + 3)(x - 2)(x - 4)$
c) $x \le -3$ ou $0 \le x \le 2$ ou $x \ge 4$

18. a) $x = 0$, $x = 3$ e $x = -4$ (multiplic. 2)
b) $f(x) = 2x(x - 3)(x + 4)^2$
c) $x = -4$ ou $0 \le x \le 3$

19. a) $x = 0$, $x = 6$ e $x = -\frac{1}{2}$ (multiplic. 2)
b) $f(x) = 4x(x - 6)(x + \frac{1}{2})^2$
c) $x \le 0$ ou $x \ge 6$

20. a) $x = 1$ e $x = -2$
b) $f(x) = (x - 1)(x + 2)\left(x^2 + 3x + 8\right)$
c) $-2 \le x \le 1$

21. $x \approx 2{,}20557$

22. $x \approx 3{,}81912$

23. $x \approx 1{,}26795$

24. $x \approx -1{,}87939$

25. $x \approx 2{,}59431$

26. $x \approx 2{,}79129$

27. $x = 5\sqrt[3]{100} \approx 23{,}2$ cm

28. O grupo tem 15 homens e 25 mulheres.

29. a) $V_c(r) = 5\pi r^3$
b) $V(r) = \frac{19}{3}\pi r^3$
c) $r = 3{,}69$ m

30. Aproximadamente $3{,}3 \times 3{,}3 \times 1{,}65$ m

4.4 Gráficos de funções polinomiais

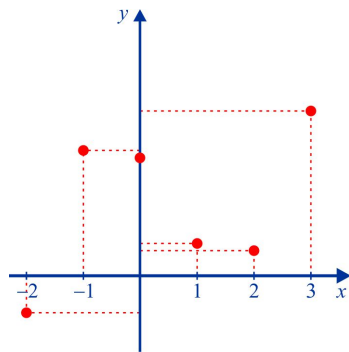



Figura 4.24: Os pontos do exemplo 1.

Embora já tenhamos traçado alguns gráficos de funções polinomiais, ainda não discutimos suas características principais, às quais nos dedicaremos nessa seção.

Para iniciar nossa análise, vamos recorrer a um exemplo simples, que mostra um engano típico do traçado de gráficos de funções desconhecidas.

Exemplo 1. Gráfico de uma função a partir de pontos do plano

Tentemos construir o gráfico de uma função f da qual conhecemos apenas os valores de $f(x)$ para $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Para tanto, suponha que dispomos de uma tabela de pares $(x, f(x))$, a partir da qual foram marcados no plano Cartesiano os seis pontos mostrados na Figura 4.24.

Para obter o gráfico de f, é preciso ligar os pontos por uma curva que represente de forma mais ou menos fiel a função. Nesse caso, temos duas opções. Podemos traçar uma curva com trechos quase retos, como se vê na Figura 4.25a, ou podemos traçar uma curva mais suave, como a que é exibida na Figura 4.25b.

A curva mostrada na Figura 4.25a só é adequada quando sabemos de antemão que a função a ser representada é definida por partes. Entretanto, como isso ocorre com pouca frequência, na maioria das vezes é melhor traçar uma curva como a que aparece na Figura 4.25b, que é mais suave. Curvas desse tipo são características de funções polinomiais, como veremos a seguir.

(a) Gráfico de uma função definida por partes

(b) Gráfico de uma função polinomial

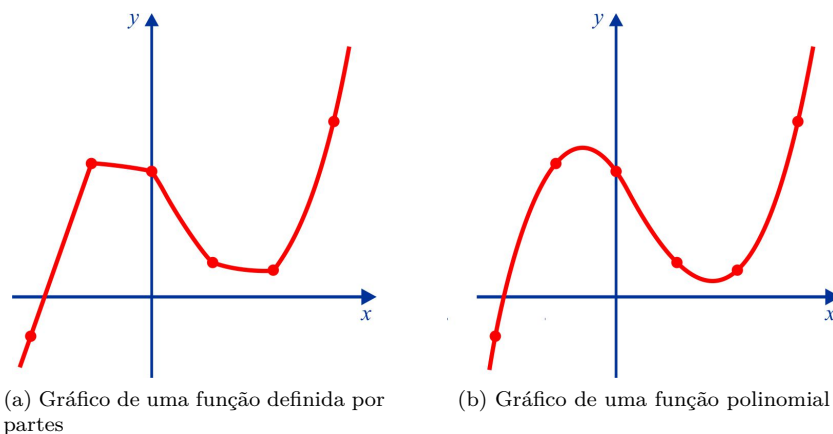



Figura 4.25: Curvas que passam por um dado conjunto de pontos

Continuidade e suavidade

De forma geral, o gráfico de uma função polinomial possui as seguintes características:

- Ele é **contínuo**, ou seja, ele não contém **buracos**, **saltos** (descontinuidades verticais) ou **falhas** (descontinuidades horizontais), como o que se vê nas Figuras 4.26a e 4.26b.

(a) Não é o gráfico de uma função polinomial, pois há um buraco em a e um salto em b

(b) Não é o gráfico de uma função polinomial, pois há uma falha entre a e b

(c) Não é o gráfico de uma função polinomial, pois há uma quina em a e um bico em b

(d) Pode ser o gráfico de uma função polinomial, pois é contínuo e suave

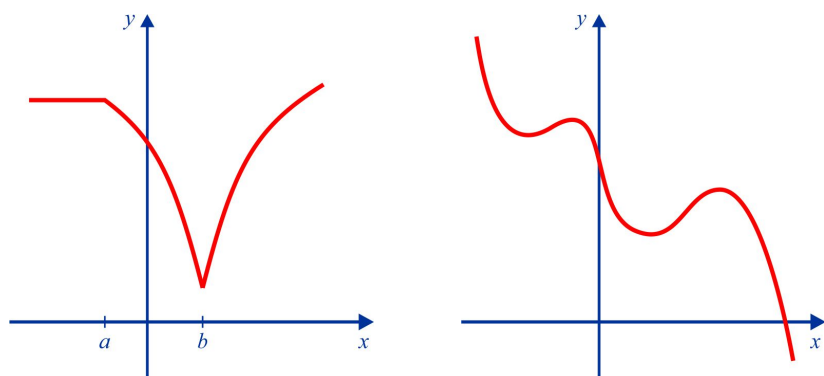
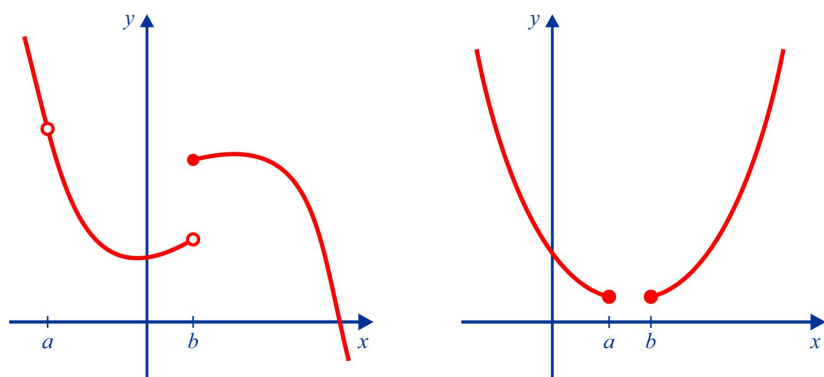



Figura 4.26: Funções contínuas e descontínuas, suaves e não suaves.

- Ele é **suave**, ou seja, ele não possui mudanças bruscas de direção ou inclinação, como as mostradas na Figura 4.26c. Essas mudanças são denominadas informalmente de **quinas** ou **bicos**.

A Figura 4.26d mostra o gráfico de uma função que pode perfeitamente ser polinomial, pois a curva é contínua e tem mudanças suaves de inclinação.

Problema 2. Descontinuidades e "bicos"

Trace os gráficos das funções abaixo, e verifique quais são contínuas e quais são suaves.

a) $f(x) = |3x - 3| - 2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

Solução.

A Figura 4.27 mostra os gráficos das três funções desse problema. Como se observa na Figura 4.27a, a função $f(x) = |3x-3|-2$, embora contínua, não é suave, pois possui um "bico" em $x = 1$.

Por sua vez, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, mostrada na Figura 4.27b, possui uma descontinuidade em $x = 0$, embora seja suave nos pontos nos quais está definida.

Já a função polinomial $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ é, ao mesmo tempo, contínua e suave, como comprova a Figura 4.27c.

(a) $f(x) = |3x - 3| - 2$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}$ (c) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

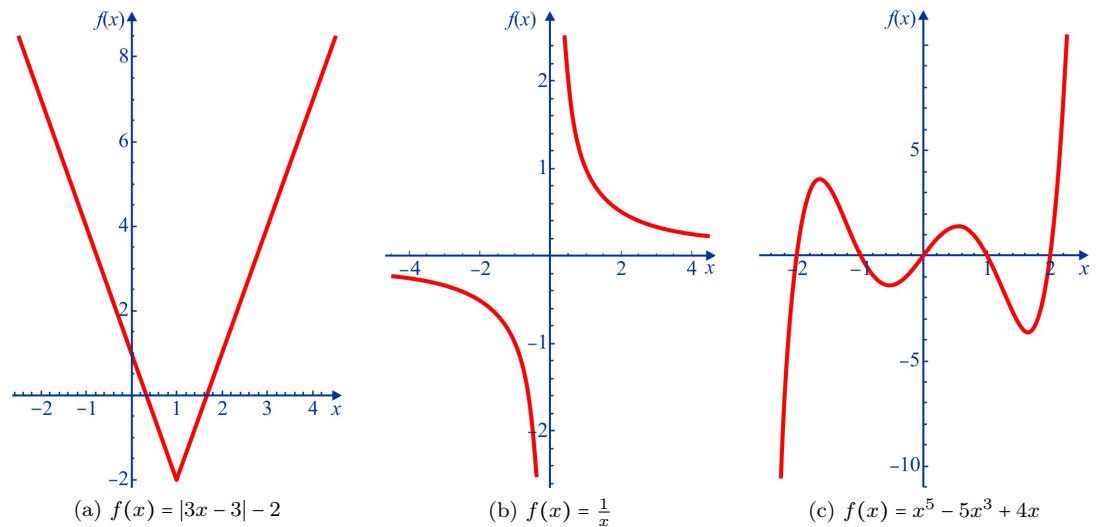



Figura 4.27: Gráficos das funções do Problema 2.

Agora, tente o Exercício 1.

■ Comportamento extremo

Outra característica interessante das funções polinomiais é o seu comportamento quando os valores de x ficam muito grandes em módulo, isto é, quando eles se afastam de $x = 0$ tanto na direção positiva, como na direção negativa do eixo-x.

Para descrever o que ocorre com as funções nesse casos, precisamos definir o que significa *tender ao infinito*.

Dizemos que

- **x tende ao infinito** quando x cresce arbitrariamente, ou seja, assume valores arbitrariamente grandes no sentido positivo do eixo-x. Nesse caso, usamos a notação
$$x \to \infty.$$

- **x tende a menos infinito** quando x decresce arbitrariamente, ou seja, se afasta do zero no sentido negativo do eixo-x. Nesse caso, escrevemos
$$x \to -\infty.$$

Logo, analisar o **comportamento extremo** das funções é o mesmo que analisar o que acontece quando $x \to -\infty$ e quando $x \to \infty$. Observe que a mesma notação pode ser usada para y, se tomamos como referência o eixo vertical. Assim, também é possível escrever
$$y \to \infty \qquad \text{e} \qquad y \to -\infty.$$

Uma função polinomial é a soma de vários monômios na forma $a_i x^i$. Por exemplo, a função
$$p(x) = x^3 + x^2 + x$$
é composta pelos monômios x^3, x^2 e x. Como vimos na Seção 3.9, o gráfico de p é a composição dos gráficos desses três monômios. Assim, é possível usá-los para investigar como cada monômio influencia o comportamento de p quando $x \to \infty$.

Começaremos nossa análise traçando os gráficos de
$$y = x, \qquad y = x^2, \qquad y = x^3 \qquad \text{e} \qquad y = x^3 + x^2 + x$$
para x entre 0 e 2. Observando esses gráficos, mostrados na Figura 4.28a, constatamos que, para esse intervalo de x, o comportamento de $p(x)$ depende de todos os monômios que compõem a função.

Entretanto, o intervalo $[0,2]$ não é adequado para que descubramos como p se comporta para valores grandes de x. Por exemplo, se traçarmos os mesmos gráficos para x entre 0 e 10, como se vê na Figura 4.28b, perceberemos facilmente que, à medida que consideramos valores maiores de x, os monômios de menor grau perdem importância, e o gráfico de $p(x) = x^3 + x^2 + x$ passa a ser fortemente influenciado pelo gráfico de $y = x^3$, isto é, pelo gráfico do monômio de maior grau.

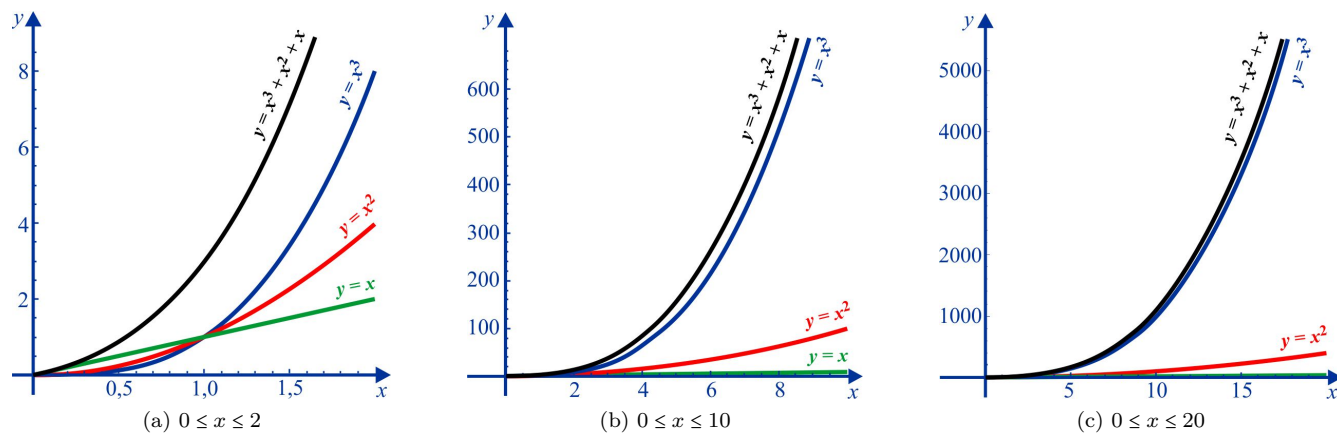



Figura 4.28: Gráfico de $p(x) = x^3 + x^2 + x$ e de seus monômios em diferentes intervalos.

O fato de que é o termo de maior grau que determina o comportamento de p para valores grandes de x fica ainda mais evidente quando traçamos os gráficos de

p e de seus monômios em um intervalo maior, como ocorre na Figura 4.28c, em que mostramos as curvas obtidas para $x \in [0, 20]$. A figura indica que, para valores de x maiores que 10, os gráficos de $y = p(x)$ e $y = x^3$ quase se superpõem, enquanto a contribuição do gráfico do monômio de grau 1 torna-se praticamente irrelevante.

Os resultados apresentados na Figura 4.28 sugerem que, para conhecer o comportamento da função $p(x) = x^3 + x^2 + x$ quando x tende a infinito, podemos nos ater ao que ocorre com o termo de maior grau. De fato, isso é verdade para toda função polinomial. Além disso, também é suficiente analisar o monômio de maior grau para descobrir o que acontece quando $x \to -\infty$.

Teste do coeficiente dominante

O comportamento extremo da função polinomial de grau n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

depende de n, bem como de a_n, o **coeficiente dominante** (ou principal) do polinômio, isto é, o coeficiente de seu monômio de maior grau.

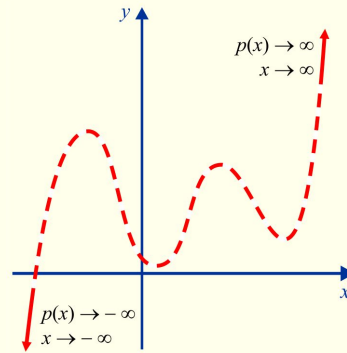
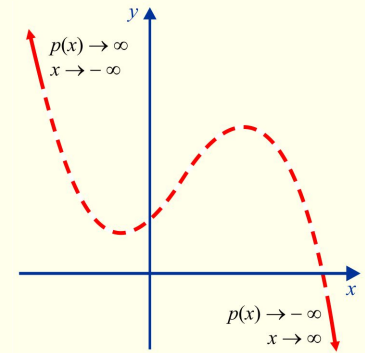
1. Se n é **ímpar**, temos duas situações, dependendo do sinal de a_n:

(a) Se $a_n > 0$, então p decresce ilimitadamente ($p \to -\infty$) quando $x \to -\infty$ e p cresce ilimitadamente ($p \to \infty$) quando $x \to \infty$.

(b) Se $a_n < 0$, então p cresce ilimitadamente ($p \to \infty$) quando $x \to -\infty$ e p decresce ilimitadamente ($p \to -\infty$) quando $x \to \infty$.

Figura 4.29: Comportamento extremo de funções com grau ímpar

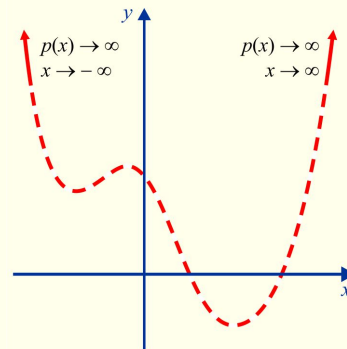
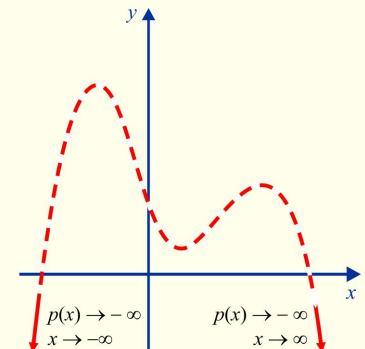
2. Se n é **par**, temos duas possibilidades, dependendo do sinal de a_n:

(a) Se $a_n > 0$, então p cresce ilimitadamente ($p \to -\infty$) quando $x \to -\infty$ e quando $x \to \infty$.

(b) Se $a_n < 0$, então p decresce ilimitadamente ($p \to -\infty$) quando $x \to -\infty$ e quando $x \to \infty$.

Figura 4.30: Comportamento extremo de funções com grau par

Problema 3. Teste do coeficiente dominante

Determine o comportamento extremo de cada uma das funções abaixo.

a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 10$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^3 + 16$ c) $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 4$

Solução.

a) Como $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 10$ tem grau ímpar (3) e o coeficiente dominante é -1, que é negativo, a função cresce ilimitadamente para $x \to -\infty$, e decresce ilimitadamente para $x \to \infty$. O gráfico de f é exibido na Figura 4.31a.

b) A função $f(x) = -x^4 + 3x^3 + 16$ tem grau par (4) e o coeficiente dominante é negativo ($a_4 = -1$). Sendo assim, a função decresce ilimitadamente tanto para $x \to -\infty$, como para $x \to \infty$. A Figura 4.31b mostra o gráfico de f.

c) Uma vez que $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 4$ tem grau ímpar (5) e $a_5 > 0$ (pois $a_5 = 1$), a função decresce ilimitadamente para $x \to -\infty$, e cresce ilimitadamente para $x \to \infty$, como apresentado na Figura 4.31c.

(a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 10$ (b) $f(x) = -x^4 + 3x^3 + 16$ (c) $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 4$

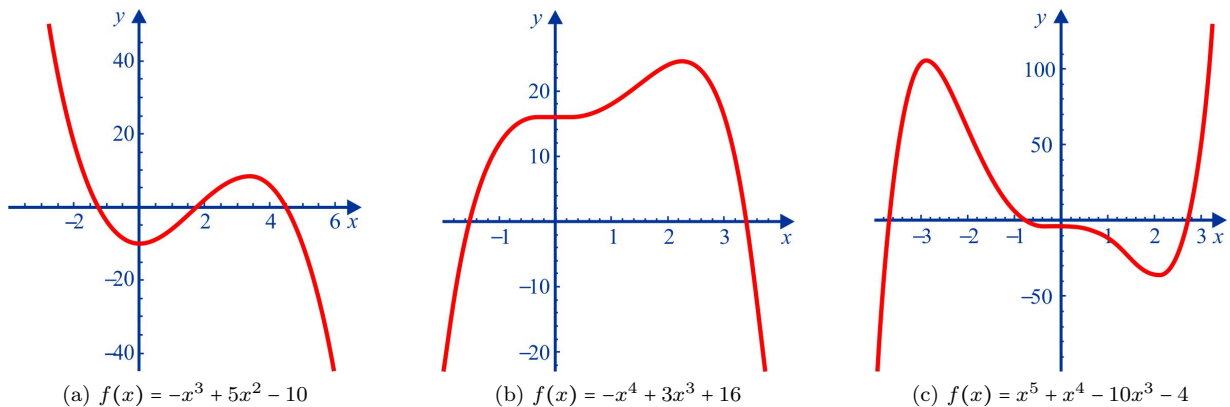



Figura 4.31: Gráficos do Problema 3.

Agora, tente o Exercício 3.

■ Máximos e mínimos locais

Para determinar o comportamento de funções polinomiais, também é conveniente conhecer seus pontos de máximo e de mínimo local. Entretanto, assim como ocorre com os zeros, não há um número fixo desses pontos extremos, como mostra a Figura 4.32, na qual vemos polinômios de grau 3 e 4 com quantidades variadas de pontos de máximo e mínimo locais.

O teorema abaixo fornece um limite superior para o número de pontos extremos de uma função polinomial.

Pontos extremos de funções polinomiais

Uma função polinomial de grau n tem, no máximo, $n - 1$ extremos locais (que podem ser máximos ou mínimos).

(a) $p(x) = x^3$ (b) $p(x) = -x^3 + 5x + 1$ (c) $p(x) = x^4$ (d) $p(x) = -x^4 + x^3 + 11x^2 - 9x - 18$

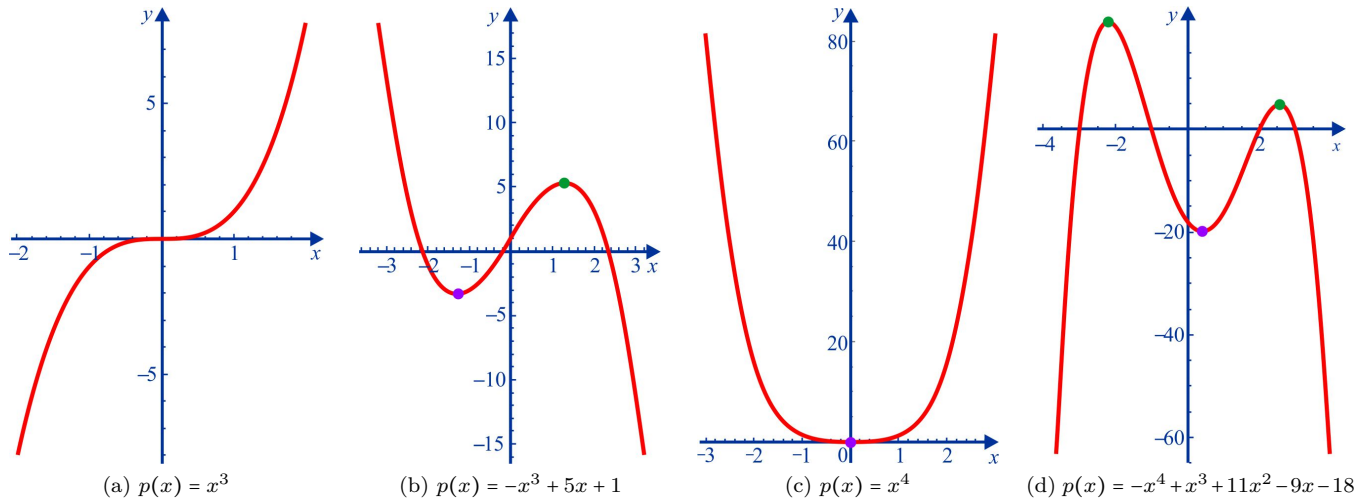



Figura 4.32: Pontos extremos de algumas funções. Pontos de máximo local estão indicados em verde, e pontos de mínimo local em roxo.

Como vimos nas Figuras 4.32a e 4.32b, o polinômio $p(x) = x^3$ não tem pontos de máximo ou mínimo local, enquanto $p(x) = -x^3 + 5x + 1$ tem um máximo e um mínimo. Esses valores estão de acordo com o teorema, que prevê um limite de dois pontos extremos para um polinômio de grau 3.

De forma semelhante, o polinômio $p(x) = x^4$ tem apenas um ponto de mínimo local (e nenhum ponto de máximo), enquanto $p(x) = -x^4 + x^3 + 11x^2 - 9x - 18$ tem dois máximos e um mínimo, como mostram as Figuras 4.32c e 4.32d. Mais uma vez, os polinômios satisfazem o teorema, que indica apenas que não devemos esperar que um polinômio de grau 4 tenha mais de três pontos extremos.

Apesar de ter alguma utilidade, esse teorema não é muito esclarecedor, pois não informa o número exato ou a localização dos pontos de máximo e mínimo local de uma função. Podemos obter um limite inferior para o número de pontos extremos, bem como uma estimativa melhor da localização de alguns desses pontos se conhecermos os zeros de uma função, como indica o próximo teorema.

Pontos extremos e zeros de funções polinomiais

Entre dois zeros distintos de uma função polinomial há, ao menos, um ponto extremo.

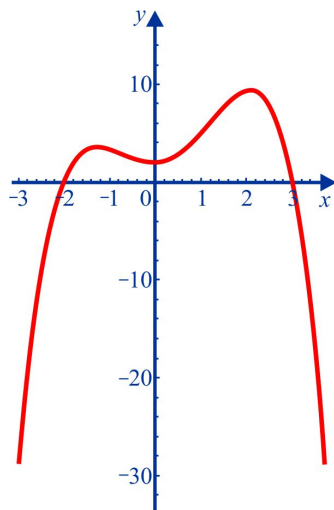



Figura 4.33: Gráfico de $p(x) = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{8x^2}{3} + \frac{x}{3} + 2$.

Tomemos como exemplo a função polinomial $p(x) = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{8x^2}{3} + \frac{x}{3} + 2$, que possui exatamente dois zeros: $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$. Para essa função, os dois teoremas acima nos garantem que

a) p tem, no máximo, três pontos extremos, já que seu grau é 4);

b) há um ponto extremo entre x_1 e x_2.

Concluímos, então, que p possui de um a três pontos extremos, dos quais um está no intervalo $(-2{,}3)$. Mesmo assim, ficamos sem saber o número exato de pontos extremos, e a localização dos demais pontos, caso eles existam.

De fato, observando o gráfico de p, apresentado na Figura 4.33, notamos que a função tem três pontos extremos (um mínimo e dois máximos locais), todos os quais entre x_1 e x_2, embora o último teorema só tenha assegurado a existência de um extremo nesse intervalo.

Temos, portanto, um teorema que oferece um limite inferior e outro que fornece um limite superior para o número de pontos extremos. Embora frequentemente essas

informações não nos permitam tirar grandes conclusões, o exemplo abaixo mostra que, quando os limites são iguais, é possível determinar com alguma precisão a localização dos máximos e mínimos locais.

Exemplo 4. Pontos extremos

A função $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x + 8$, tem como zeros

$$x = -4, \qquad x = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad x = 2.$$

Assim, ela possui ao menos um ponto extremo em $(-4, \frac{1}{2})$ e outro em $(\frac{1}{2}, 2)$. Além disso, como $p(x)$ tem grau 3, a função pode ter, no máximo, dois pontos extremos.

Observamos, então, que o limite inferior para o número de pontos extremos é igual ao limite superior, o que nos permite concluir que há exatamente dois desses pontos, um em cada um dos intervalos acima.

Para descobrir se o extremo local dentro de um intervalo é um ponto de máximo ou de mínimo, basta calcular o valor de $p(x)$ em um ponto qualquer do intervalo. Assim, escolhendo $x = 0$ no intervalo $(-4, \frac{1}{2})$, e $x = 1$ no intervalo $(\frac{1}{2}, 2)$, temos

Intervalo	x	$p(x)$	Sinal
$(-4, \frac{1}{2})$	0	8	Positivo
$(\frac{1}{2}, 2)$	1	-5	Negativo

Da tabela acima, concluímos que $p(x)$ possui um máximo local no intervalo $(-4, \frac{1}{2})$ e um mínimo local em $(\frac{1}{2}, 2)$.

Agora, tente os Exercícios 5 e 7.

Embora uma função polinomial possa ter mais de um mínimo ou máximo local, as aplicações práticas costumam envolver intervalos específicos, nos quais só um ponto extremo faz sentido, como ilustra o problema a seguir.

Problema 5. Otimização do formato de uma caixa

Uma folha de papelão com 56 × 32 cm será usada para fabricar uma caixa sem tampa, como a que é mostrada na Figura 4.34a.

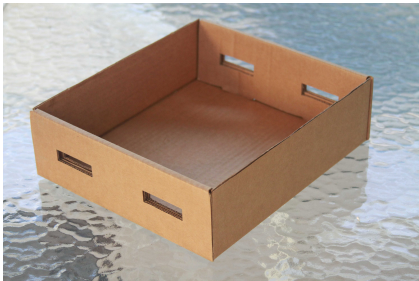
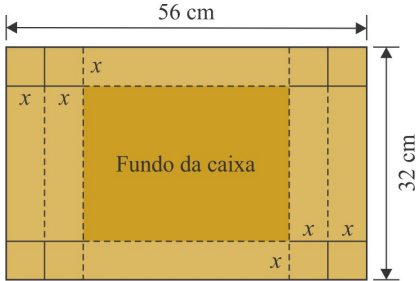
Para obter a caixa, a folha de papelão deverá ser cortada nas linhas contínuas e dobrada nas linhas tracejadas indicadas na Figura 4.34b. Observe que a base da caixa corresponde ao retângulo interno da Figura 4.34b, e que a altura da caixa é x. Responda às perguntas abaixo, lembrando que o volume de um prisma retangular de lados x, y e z é igual a xyz.

(a) Uma caixa sem tampa.

(b) Planificação da caixa.

Figura 4.34

a) Exprima em função da variável x cada uma das duas dimensões do fundo da caixa dobrada.

b) Determine uma função $V(x)$ que forneça o volume da caixa em relação a x.

c) Defina um domínio adequado para V, considerando que os lados da caixa não podem ser negativos.

d) Esboce o gráfico de $V(x)$.

e) A partir do gráfico de $V(x)$, determine o valor de x que maximiza o volume da caixa. Calcule o volume correspondente.

Solução.

a) Observando a Figura 4.34b, notamos que a folha de papelão tem 56 cm de largura. Desse comprimento, uma parcela correspondente a $4x$ deve ser reservada para formar a lateral da caixa. Assim, a largura do fundo da caixa é dada por

$$L(x) = 56 - 4x.$$

Por sua vez, dos 32 cm de altura que a folha de papelão possui, $2x$ devem ser usados na lateral da caixa, de modo que a outra dimensão do fundo da caixa é definida por

$$A(x) = 32 - 2x.$$

b) Dadas as dimensões do fundo da caixa, e considerando que sua altura mede x, o volume comportado será equivalente a

$$V(x) = (56 - 4x)(32 - 2x)x.$$

c) Como nenhuma dimensão da caixa pode ser negativa, devemos impor as seguintes condições:

   a) $x \geq 0$.
   b) $56 - 4x \geq 0$, o que nos leva a $x \leq 14$.
   c) $32 - 2x \geq 0$, que implica que $x \leq 16$.

   Tomando a interseção dessas desigualdades, obtemos

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 14\}.$$

Figura 4.35: Gráfico de $V(x) = (56 - 4x)(32 - 2x)x$.

d) Claramente, a função $V(x)$ tem como zeros

$$x = 0, \qquad x = 14 \qquad \text{e} \qquad x = 16.$$

Entretanto, como vimos no item anterior, somente os valores de x entre 0 e 14 têm sentido físico. Limitando nosso gráfico a esse intervalo, obtemos a curva mostrada na Figura 4.35.

e) Analisando a Figura 4.35, concluímos que a altura que maximiza o volume da caixa é

$$x \approx 5\text{cm},$$

à qual corresponde um volume aproximado de

$$V(5) = (56 - 4 \cdot 5)(32 - 2 \cdot 5) \cdot 5 = 3960 \text{ cm}^3.$$

Agora, tente o Exercício 8.

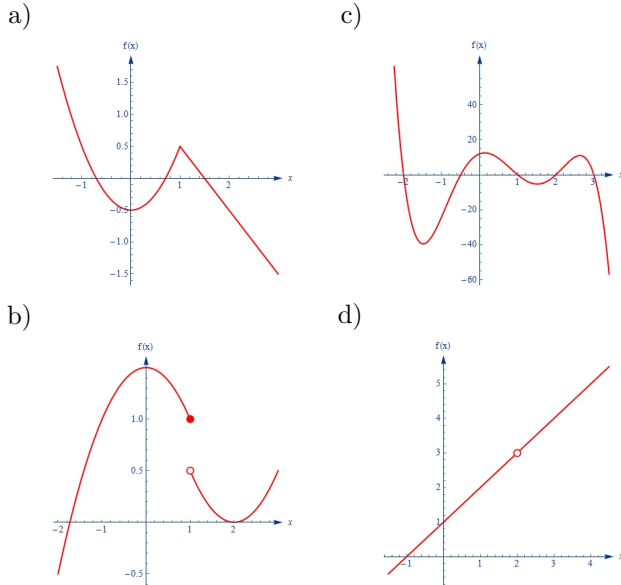
Exercícios 4.4

1. Dados os gráficos abaixo, determine quais podem representar uma função polinomial. Caso o gráfico não possa corresponder a uma função polinomial, indique o motivo.

a)

c)

b)

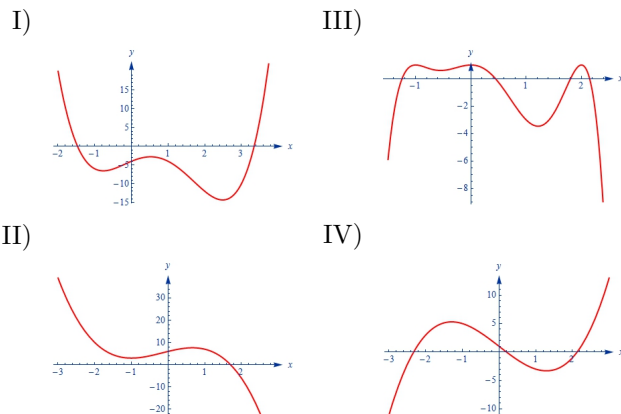
d)

2. Considerando apenas o comportamento extremo das funções abaixo, relacione-as aos gráficos apresentados.

a) $f(x) = x^3 - 5x + 1$
b) $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 6$
c) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 4$
d) $f(x) = 1 - 4x^2 - 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 - x^6$

I)

III)

II)

IV)

3. Descreva o comportamento extremo de cada função abaixo.

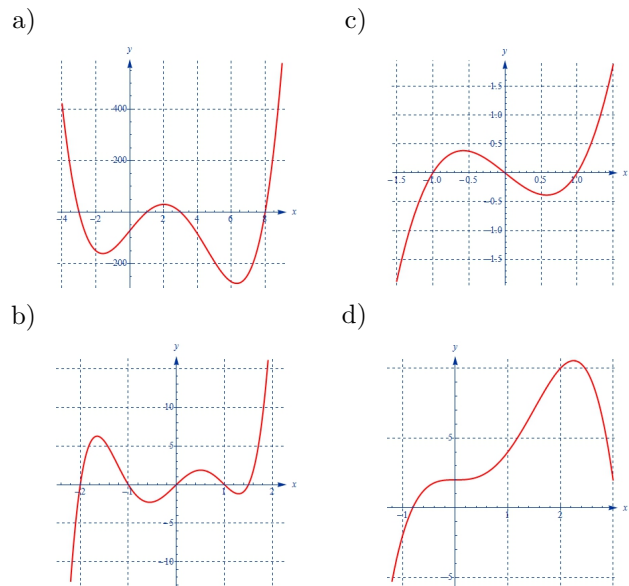
a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - x + 1$
b) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 5x$
c) $f(x) = 625 - x^4$
d) $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 3x + 10$
e) $f(x) = 3x^5 - 25x^2 + 30$
f) $f(x) = -x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 21x^2 - 18x - 20$
g) $f(x) = -2x^6 + 36x^4 - 25x^2 - 48$
h) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^3$

4. Os gráficos de algumas funções polinomiais foram desenhados abaixo, com o auxílio de um programa matemático. Determine aproximadamente os pontos de mínimo e máximo local e os valores correspondentes de cada função.

a)

c)

b)

d)

5. Determine o número de mínimos e máximos locais das funções abaixo. Indique um intervalo que contém a coordenada x de cada mínimo ou máximo.

a) $f(x) = (x-3)(x-4)$
b) $f(x) = (\sqrt{5} - x)(x + 1/4)$
c) $f(x) = 3x(x-2)(x+3)$
d) $f(x) = (x+5)(2-x)(x+3)$
e) $f(x) = (x-1)^2(x + \frac{1}{2})$
f) $f(x) = x(x-3)(x+2)(x-\sqrt{2})$
g) $f(x) = -2(x-1)(x-4)(x+4)(x+1)$
h) $f(x) = (x-2)^2(x+5)^2$
i) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x+1)(x+2)\left(x - \sqrt{3}\right)$
j) $f(x) = -4x(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)$
k) $f(x) = (x-4)(x-3/2)(x+3)(x+3/2)(x+6)$
l) $f(x) = -2x(x-5/2)(x-5)(x+5/2)(x+5)(x-7)$

6. Faça um esboço rudimentar dos gráficos das funções do Exercício 5, levando em conta seus zeros, a localização dos pontos de mínimo e máximo e o comportamento extremo.

7. Fatore as funções abaixo, determine seus zeros, e indique um intervalo que contenha cada ponto de mínimo ou de máximo local.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$

b) $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

c) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

d) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$, sabendo que $x = 3$ é um zero de f.

8. Uma companhia aérea permite que um passageiro leve consigo uma bagagem cuja soma das dimensões (altura, largura e profundidade) não ultrapasse 150 cm. Joaquim pretende tomar um voo dessa companhia levando uma caixa cuja base é quadrada. Suponha que o comprimento do lado da base seja x.

a) Escreva uma função $h(x)$ que forneça a altura da caixa em relação às outras duas dimensões.

b) Forneça uma função $v(x)$ que forneça o volume da caixa, lembrando que o volume de um prisma retangular de lados x, y e z é igual a xyz.

c) Defina um domínio adequado para $v(x)$, lembrando que nenhum lado da caixa pode ter comprimento negativo.

d) Esboce o gráfico de $v(x)$ no domínio que você escolheu.

e) Determine o valor de x que maximiza o volume da caixa. Calcule o volume correspondente.

Respostas dos Exercícios 4.4

1. a) A curva não corresponde ao gráfico de uma função polinomial, pois não é suave.

b) A curva não corresponde ao gráfico de uma função polinomial, pois não é contínua.

c) A curva pode corresponder ao gráfico de uma função polinomial.

d) A curva não corresponde ao gráfico de uma função polinomial, pois não é contínua.

2. a) IV b) II c) I d) III

3. a) Cresce quando $x \to -\infty$
Decresce quando $x \to \infty$

b) Decresce quando $x \to -\infty$
Cresce quando $x \to \infty$

c) Decresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

d) Cresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

e) Decresce quando $x \to -\infty$
Cresce quando $x \to \infty$

f) Cresce quando $x \to -\infty$
Decresce quando $x \to \infty$

g) Decresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

h) Cresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

4. a) Máximo local: $x \approx 2$
Mínimos locais: $x \approx -1{,}5$ e $x \approx 6{,}3$

b) Máximos locais: $x \approx -1{,}6$ e $x \approx 0{,}5$
Mínimos locais: $x \approx -0{,}5$ e $x \approx 1{,}3$

c) Máximo local: $x \approx -0{,}6$
Mínimo local: $x \approx 0{,}6$

d) Máximo local: $x \approx 2{,}2$
Não há mínimos locais

5. a) Um mínimo local no intervalo $(3{,}4)$

b) Um máximo local em $(-\frac{1}{4}, \sqrt{5})$

c) Um mínimo em $(0{,}2)$ e um máximo em $(-3{,}0)$

d) Um mínimo em $(-5,-3)$ e um máximo em $(-3{,}2)$

e) Um mínimo em $x = 1$ e um máximo em $(-\frac{1}{2}, 1)$

f) Mínimos nos intervalos $(-2{,}0)$ e $(\sqrt{2}, 3)$. Máximo em $(0, \sqrt{2})$

g) Um mínimo em $(-1{,}1)$ e máximos em $(-4,-1)$ e $(1{,}4)$

h) Mínimos em $x = -5$ e $x = 2$. Máximo em $(-5{,}2)$

i) Mínimos em $(-1, \frac{1}{2})$ e em $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$. Máximos em $x = \frac{1}{2}$ e em $(-2,-1)$

j) Mínimos em $(-4,-2)$ e em $(0{,}3)$. Máximos em $(-2{,}0)$ e em $(3{,}5)$

k) Mínimos em $(-3,-\frac{3}{2})$ e em $(\frac{3}{2}, 4)$. Máximos em $(-6,-3)$ e em $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

l) Mínimos em $(-\frac{5}{2}, 0)$ e em $(\frac{5}{2}, 5)$. Máximos em $(-5, -\frac{5}{2})$, $(0, \frac{5}{2})$ e $(5{,}7)$

6. a)

b)

c)

d)

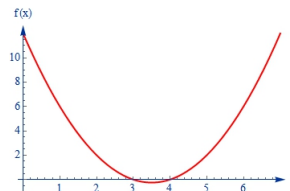
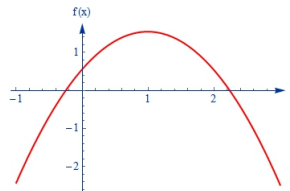
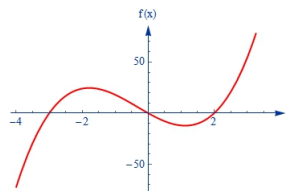
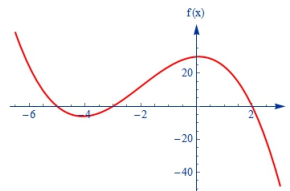
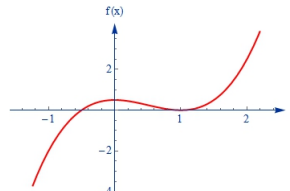
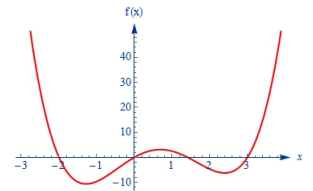
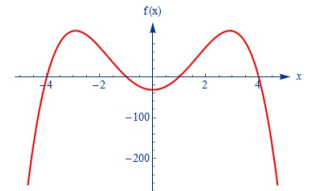
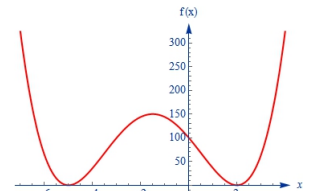
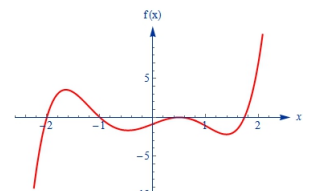
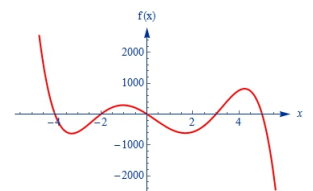
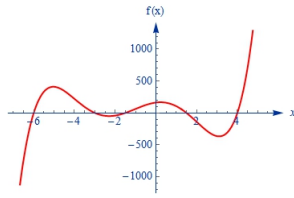
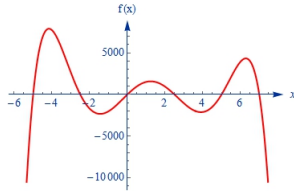
e)

f)

g)

h)

i)

j)

k)

l)

7. a) $f(x) = x(x-3)(x+4)$
Um mínimo local no intervalo (0,3) e um máximo no intervalo (−4,0)

b) $f(x) = -2x(x-1)(x+3)$
Um mínimo local no intervalo (−3,0) e um máximo no intervalo (0,1)

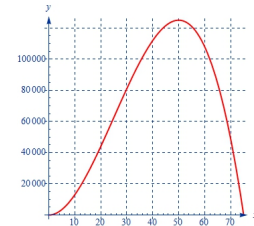
c) $f(x) = x^2(x+1)(x-2)$
Um mínimo local no intervalo (−1,0) e outro mínimo no intervalo (0,2)

d) $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$
Um mínimo local no intervalo $(\frac{1}{2},3)$ e um máximo no intervalo $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

8. a) $h(x) = 150 - 2x$

b) $v(x) = x^2(150 - 2x)$

c) $x \in [0, 75]$

d)

e) $x = 50$ cm. $v(50) = 125.000$ cm^3.

4.5 Números complexos

Vimos na Seção 2.10 que as equações quadráticas cujo discriminante é negativo – ou seja, $\Delta < 0$ – não têm solução real. Uma equação quadrática simples que não possui raiz real é

$$x^2 + 1 = 0,$$

pois, subtraindo 1 dos dois lados da equação, obtemos $x^2 = -1$, e não há um número real cujo quadrado valha −1.

Dificuldade semelhante ocorre com equações cúbicas (do terceiro grau), quárticas (do quarto grau) ou que envolvam polinômios de maior grau.

Para contornar o inconveniente de não ser possível encontrar raízes reais para todas as equações polinomiais, os matemáticos inventaram o conjunto dos **números complexos**, representado por $\mathbb{C}$. Nesse conjunto, há um número especial, denominado **unidade imaginária**, ou simplesmente i, que é definido por

$$i = \sqrt{-1},$$

de modo que $i^2 = -1$. Usando a unidade imaginária, podemos resolver a equação quadrática acima fazendo

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{-1}.$$

Assim, a equação tem duas soluções, que são $x_1 = i$ e $x = -i$.

Consideremos, agora, a equação

$$x^2 + 9 = 0.$$

Nesse caso, seguindo a mesma ideia apresentada acima, escrevemos

$$x^2 + 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = -9 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{-9}.$$

Assim, se admitirmos a existência de $\sqrt{-9}$, podemos dizer que a equação tem duas soluções, $x_1 = \sqrt{-9}$ e $x_2 = -\sqrt{-9}$, embora nenhuma delas seja real. Na verdade, notando que

$$(3i)^2 = 3^2 i^2 = 9(-1) = -9, \qquad \text{e} \qquad (-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = 9(-1) = -9,$$

concluímos que as raízes da equação são os números complexos $x_1 = 3i$ e $x_2 = -3i$.

■ Raiz quadrada de números negativos

Vimos acima que $\sqrt{-1} = i$ e que $\sqrt{-9} = 3i$. O quadro abaixo mostra como obter a raiz quadrada de um número real negativo qualquer.

Naturalmente, $i\sqrt{b} = \sqrt{b}i$. Entretanto, damos preferência à forma $i\sqrt{b}$ para deixar claro que o termo i não está dentro da raiz.

Raiz quadrada de números reais negativos

Dado um número real positivo b,

$$\sqrt{-b} = i\sqrt{b}.$$

Observe que

$$\sqrt{-b} = \sqrt{(-1) \cdot b} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} = i\sqrt{b}.$$

Logo, a regra do produto de raízes de números reais, que diz que

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

quando $a \geq 0$ e $b \geq 0$, também pode ser aplicada quando $a \geq 0$ e $b < 0$ (ou $a < 0$ e $b \geq 0$). Porém, essa regra não é válida quando os dois termos são negativos, ou seja, não se pode dizer que

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{(-3) \cdot (-5)} = \sqrt{15}. \qquad \text{☠ Errado!}$$

Para obter o resultado correto nesse caso, devemos seguir o que foi apresentado no quadro acima e escrever

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = i\sqrt{3} \cdot i\sqrt{5} = i \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = i^2\sqrt{3 \cdot 5} = -\sqrt{15}.$$

Esse exemplo ilustra o motivo principal de os matemáticos adotarem a unidade imaginária i. Sem ela, os erros no cálculo de produtos de raízes quadradas de números negativos poderiam ser frequentes.

Exemplo 1. Raízes quadradas de números reais negativos

a) $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$

b) $-\sqrt{-25} = -i\sqrt{25} = -5i$

c) $\sqrt{-\frac{3}{4}} = i\sqrt{\frac{3}{4}} = i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Os Exemplos (d) e (e) deixam claro que $\sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$ quando a e b são números reais negativos.

d) $\sqrt{-2}\sqrt{-8} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{8} = i^2\sqrt{2 \cdot 8} = -\sqrt{16} = -4$

e) $\sqrt{(-2)(-8)} = \sqrt{16} = 4$

f) $\frac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}} = \frac{i\sqrt{75}}{i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

Agora, tente o Exercício 1.

■ Número complexo

Para estender os conceitos vistos acima a todas as equações polinomiais, definimos os números complexos conforme mostrado no quadro abaixo.

Número complexo

Uma expressão na forma

$$a + bi$$

é denominada **número complexo**, desde que a e b sejam números reais e $i^2 = -1$.

O termo a é chamado **parte real** do número, pois é a parcela que se obtém quando $b = 0$. Por sua vez, o termo b é conhecido como a **parte imaginária** do número complexo.

Exemplo 2. Números complexos

a) $5 + 3i$ é um número complexo com parte real 5 e parte imaginária 3.

b) $7 - i\sqrt{2}$ é um número complexo com parte real 7 e parte imaginária $-\sqrt{2}$.

c) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5}i$ é um número complexo com parte real $\frac{3}{4}$ e parte imaginária $-\frac{4}{5}$.

d) $\frac{5i-2}{3}$ é um número complexo com parte real $-\frac{2}{3}$ e parte imaginária $\frac{5}{3}$.

e) $4i$ é um número complexo com parte real 0 e parte imaginária 4.

f) -3 é um número complexo com parte real -3 e parte imaginária 0.

Agora, tente o Exercício 2.

Números complexos com a parte real igual a zero, como aquele mostrado no item (e) acima, são chamados **puramente imaginários**. Por sua vez, os números reais – como o valor -3 citado no item (f) – podem ser vistos como números complexos sem a parte imaginária. Assim, sendo, o conjunto dos números complexos contém todos os números reais, ou seja,

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Os números complexos são empregados em diversos ramos da matemática, da física e da engenharia. Entretanto, sua aplicação mais imediata é a solução de equações polinomiais, como mostra o exemplo abaixo.

Problema 3. Equação quadrática

Resolva $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Solução.

O discriminante dessa equação é

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16.$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, mesmo observando que $\Delta < 0$, obtemos

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}.$$

Logo, apesar de não haver solução real, a equação tem duas raízes complexas, que são

$$x = \frac{6+4i}{2} = 3+2i \qquad \text{e} \qquad \bar{x} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i.$$

Agora, tente o Exercício 3.

Note que, quando $\Delta < 0$, as raízes complexas da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$ têm sempre a forma

$$x = r+si \qquad \text{e} \qquad \bar{x} = r-si,$$

em que $r = -b/(2a)$ e $s = \sqrt{|\Delta|}/(2a)$. Nesse caso, dizemos que as soluções formam um **par conjugado**. A definição de conjugado complexo é dada no quadro abaixo.

Conjugado complexo

O **conjugado** de um número complexo $z = a+bi$, representado por $\bar{z}$, é obtido trocando-se o sinal da parte imaginária, ou seja,

$$\bar{z} = a - bi.$$

Da mesma forma, dizemos que z é o conjugado de $\bar{z}$, pois z pode ser obtido trocando-se o sinal da parte imaginária de $\bar{z}$.

Exemplo 4. Conjugados complexos

Os exemplos a seguir ilustram como obter os conjugados $\bar{z}$ de números complexos na forma $z = a+bi$, em que a é a parte real e b a parte imaginária.

	Número complexo	Parte real	Parte imaginária	Conjugado complexo
a)	$z = 5-6i$	$a = 5$	$b = -6$	$\bar{z} = 5+6i$
b)	$z = 2i-7$	$a = -7$	$b = 2$	$\bar{z} = -7-2i$
c)	$z = 3i$	$a = 0$	$b = 3$	$\bar{z} = -3i$
d)	$z = -4$	$a = -4$	$b = 0$	$\bar{z} = -4$
e)	$z = \frac{3+i}{4}$	$a = \frac{3}{4}$	$b = \frac{1}{4}$	$\bar{z} = \frac{3-i}{4}$
f)	$z = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{5}i$	$a = -\frac{2}{3}$	$b = -\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\bar{z} = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{5}i$

Agora, tente o Exercício 4.

■ Soma e subtração de números complexos

Ao resolvermos o Problema 3, chegamos à conclusão de que as raízes da equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

são $x = 3+2i$ e $\bar{x} = 3-2i$. Entretanto, não conferimos se os valores que obtivemos estão corretos. Para descobrir se essas duas raízes realmente satisfazem a equação, precisamos

- calcular, em cada caso, o polinômio que está do lado esquerdo da equação, substituindo x pela raiz correspondente;

- descobrir se o número complexo assim obtido é igual a zero (que também é um número complexo).

Começando pelo último desses itens, vejamos como definir a igualdade entre dois números complexos.

Igualdade entre números complexos

Dois números complexos são iguais se e somente se suas partes reais são iguais, o mesmo ocorrendo com as partes imaginárias. Em notação matemática, dizemos que

$$a + bi = c + di \qquad \text{se e somente se} \qquad a = c \;\text{ e }\; b = d.$$

Passemos, agora, ao cálculo do polinômio do lado esquerdo da equação, ou seja, ao cálculo de

$$(3 + 2i)^2 - 6(3 + 2i) + 13 \qquad \text{e} \qquad (3 - 2i)^2 - 6(3 - 2i) + 13.$$

Para determinar esses dois valores, precisamos saber como efetuar a soma, a subtração e a multiplicação de números complexos, operações que, junto com a divisão, serão objeto dessa e da próxima subseção.

Em linhas gerais, trabalhamos com números complexos seguindo as mesmas regras adotadas para os números reais com raízes (como $2 + 3\sqrt{5}$, por exemplo), tomando o cuidado de considerar que $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1$, conforme já mencionado.

Realçando essa semelhança entre números complexos e números reais, algumas das propriedades da soma e da multiplicação apresentadas no Capítulo 1 são compartilhadas pelos conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Para refrescar a memória do leitor, tomamos a liberdade de reproduzir essas propriedades no quadro abaixo.

Propriedades da soma e da multiplicação

Suponha que u, v e w sejam números complexos.

	Propriedade	**Exemplo**
1.	Comutatividade da soma	$u + v = v + u$
2.	Associatividade da soma	$(u + v) + w = u + (v + w)$
3.	Comutatividade da multiplicação	$u \cdot v = v \cdot u$
4.	Associatividade da multiplicação	$(uv)w = u(vw)$
5.	Distributividade	$u(v + w) = uv + uw$

Usando essas propriedades, não é difícil efetuar a soma e a subtração de dois números complexos, bastando para isso que trabalhemos separadamente com as partes reais e as imaginárias.

Começemos pela soma:

$$\begin{aligned}
(a + bi) + (c + di) &= a + bi + c + di && \text{Eliminação dos parênteses.}\\
&= a + c + bi + di && \text{Comutatividade da soma.}\\
&= a + c + (b + d)i && \text{Propriedade distributiva.}\\
&= (a + c) + (b + d)i && \text{Associatividade da soma.}
\end{aligned}$$

Observe que as propriedades foram usadas para reagrupar os termos do resultado da soma, de forma a separar a parte real da parte imaginária.

Adotemos, agora, procedimento análogo para a subtração:

$$\begin{aligned}(a+bi)-(c+di) &= a+bi-c-di && \text{Propriedade distributiva.}\\ &= a-c+bi-di && \text{Comutatividade da soma.}\\ &= a-c+(b-d)i && \text{Propriedade distributiva.}\\ &= (a-c)+(b-d)i && \text{Associatividade da soma.}\end{aligned}$$

O quadro abaixo resume essas operações.

Soma e subtração de números complexos

Suponha que $a+bi$ e $c+di$ sejam números complexos.

	Operação	Exemplo
1.	Soma $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$	$(2+7i)+(3+4i)=(2+3)+(7+4)i$
2.	Subtração $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$	$(5+6i)-(2+3i)=(5-2)+(6-3)i$

Exemplo 5. Soma e subtração de números complexos

a) (6+7i) + (2-3i) = (6+2) + (7-3)i = 8+4i

b) (2+5i) - (4+2i) = (2-4) + (5-2) = -2 + 3i

c) (8-4i) - (7-9i) = (8-7) + [-4-(-9)]i = 1 + 5i

d) (3+10i) + (6-10i) = (3+6) + (10-10)i = 9

e) 2i - (4-5i) = -4 + [2-(-5)]i = -4+7i

Agora, tente o Exercício 5.

Problema 6. Equação com números complexos

Determine os valores dos números reais x e y tais que

$$(13+2yi)-(x+9i)=7-4i.$$

Solução.

Reescrevendo o lado esquerdo da equação de forma a separar a parte real da parte imaginária, obtemos

$$(13+2yi)-(x+9i)=(13-x)+(2y-9)i.$$

Igualando a parte real dessa expressão ao valor que aparece do lado direito da equação, obtemos o valor de x:

$$13-x=7 \qquad\Rightarrow\qquad 13-7=x \qquad\Rightarrow\qquad x=6.$$

Por sua vez, o valor de y pode ser obtido fazendo-se o mesmo com a parte imaginária dos números complexos:

$$2y - 9 = -4 \qquad \Rightarrow \qquad 2y = 5 \qquad \Rightarrow \qquad y = 5/2.$$

Agora, tente o Exercício 6.

■ Multiplicação e divisão de números complexos

Para efetuar o produto de dois números complexos, além de aplicarmos as propriedades do produto e da soma, usamos o fato de que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}
(a+bi)\cdot(c+di) &= a(c+di) + bi(c+di) && \text{Propriedade distributiva.}\\
&= ac + adi + bic + bidi && \text{Propriedade distributiva.}\\
&= ac + adi + bci + bdi^2 && \text{Comutatividade da multiplicação.}\\
&= ac + adi + bci - bd && i^2 = -1.\\
&= ac - bd + adi + bci && \text{Comutatividade da soma.}\\
&= ac - bd + (ad+bc)i && \text{Propriedade distributiva.}\\
&= (ac - bd) + (ad+bc)i && \text{Associatividade da soma.}
\end{aligned}$$

Seria fácil apresentar esse resultado em um quadro, mas isso induziria o leitor a decorá-lo, o que não é adequado. Ainda que consuma mais tempo, a melhor estratégia para multiplicar números complexos é aplicar a propriedade distributiva e usar os conhecimentos de aritmética sempre que necessário, como mostram os exemplos abaixo.

Problema 7. Multiplicação de números complexos

Efetue os produtos

a) $5(3-2i)$

b) $4i(5+7i)$

c) $(3+6i)(4-5i)$

d) $(9-4i)^2$

e) $\left(-1+\frac{i}{2}\right)(3-8i)$

Solução.

Note que o produto de dois números complexos inclui o caso em que um deles é real.

a)

$$\begin{aligned}
5(3-2i) &= 5\cdot 3 - 5\cdot 2i\\
&= 15 - 10i.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
4i(5+7i) &= 4i\cdot 5 + 4i\cdot 7i\\
&= 20i + 28i^2\\
&= 20i + 28(-1)\\
&= -28 + 20i.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
(3+6i)(4-5i) &= 3\cdot(4-5i) + 6i(4-5i)\\
&= 3\cdot 4 - 3\cdot 5i + 6i\cdot 4 - 6i\cdot 5i\\
&= 12 - 15i + 24i - 30i^2\\
&= 12 + 9i - 30(-1)\\
&= 42 + 9i.
\end{aligned}$$

Observe que

$$(a - bi)^2 = a^2 - 2abi + (bi)^2$$
$$= a^2 - 2abi + b^2(-1)$$
$$= a^2 - 2abi - b^2$$
$$= (a^2 - b^2) - 2abi.$$

d)

$$(9-4i)^2 = (9-4i)(9-4i)$$
$$= 9 \cdot (9-4i) - 4i(9-4i)$$
$$= 9 \cdot 9 - 9 \cdot 4i - 4i \cdot 9 - 4i \cdot (-4i)$$
$$= 81 - 36i - 36i + 16i^2$$
$$= 81 - 72i + 16(-1)$$
$$= 65 - 72i.$$

e)

$$\left(-1 + \frac{i}{2}\right)(3-8i) = -1 \cdot (3-8i) + \frac{i}{2}(3-8i)$$
$$= -1 \cdot 3 - 1 \cdot (-8i) + \frac{i}{2} \cdot 3 - \frac{i}{2} \cdot 8i$$
$$= -3 + 8i + \frac{3i}{2} - 4i^2$$
$$= -3 - \frac{19i}{2} - 4(-1)$$
$$= 1 - \frac{19i}{2}.$$

Agora, tente o Exercício 7.

Como vimos no Problema 7(d), é possível calcular $(a - bi)^2$ aplicando a regra de produto notável

$$(a - bi)^2 = a^2 - 2abi + (bi)^2 = a^2 - 2abi - b^2,$$

embora o resultado obtido seja um pouco diferente do usual, já que $i^2 = -1$. Os exemplos abaixo mostram como obter, de forma geral, o quadrado de um número complexo, bem como o produto de um número pelo seu conjugado.

Exemplo 8. Aplicando as regras de produtos notáveis

a) Quadrado de um número complexo

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2$$
$$= a^2 + 2abi + b^2(-1)$$
$$= \underbrace{(a^2 - b^2)}_{\text{parte real}} + \underbrace{2abi}_{\text{parte imag.}}$$

Note que, se a e b são reais,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

enquanto

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

b) Produto de um número complexo pelo seu conjugado:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2$$
$$= a^2 - b^2(-1)$$
$$= \underbrace{(a^2 + b^2)}_{\text{parte real}}$$

Compare

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

com

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

No Exemplo 8(b), vimos que o produto de um número complexo pelo seu conjugado fornece um número real. Essa propriedade é a chave para o cálculo da divisão de dois números complexos, pois ela permite que transformemos um denominador complexo em um número real, como mostrado abaixo.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) \qquad \text{Multiplicação por } \frac{c-di}{c-di} = 1.$$

$$= \frac{a(c-di)+bi(c-di)}{c(c-di)+di(c-di)} \qquad \text{Propriedade distributiva.}$$

$$= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-cdi+cdi-d^2i^2} \qquad \text{Propriedades distributiva e comutativa.}$$

$$= \frac{ac-adi+bci-bd(-1)}{c^2-d^2(-1)} \qquad i^2 = -1.$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \qquad \text{Reagrupamento dos termos.}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2} \qquad \text{Separação das partes real imaginária.}$$

À semelhança do que ocorre com a multiplicação, não é vantajoso decorar a fórmula da divisão de números complexos, sendo preferível recordar os passos necessários para efetuar essa operação. O quadro abaixo resume as estratégias de cálculo do produto e do quociente de números complexos.

Multiplicação e divisão de números complexos

Sejam dados os números complexos $a+bi$ e $c+di$.

1. Para calcular o **produto** $(a+bi)(c+di)$, aplique a propriedade distributiva, combinada com o fato de que $i^2 = -1$.
2. Para obter o **quociente** $(a+bi)/(c+di)$, multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)}.$$

Note que $\frac{c-di}{c-di} = 1$.

Você sabia?
As operações de multiplicação e divisão são mais fáceis de efetuar se escrevemos os números complexos na forma polar, em lugar de adotarmos a forma $a+bi$. Entretanto, o uso da forma polar requer alguns conceitos que só serão vistos no segundo volume desse livro.

Problema 9. Divisão de números complexos

Efetue as divisões

a) $\dfrac{12-21i}{3}$ b) $\dfrac{8+2i}{4i}$ c) $\dfrac{2-6i}{3-4i}$ d) $\dfrac{11-2i}{1+\frac{i}{2}}$

Solução.

a)

$$\frac{12-21i}{3} = \frac{12}{3} - \frac{21i}{3}$$
$$= 4-7i.$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{8+2i}{4i} &= \left(\frac{8+2i}{4i}\right)\left(\frac{i}{i}\right)\\ &= \frac{8i+2i^2}{4i^2}\\ &= \frac{8i+2(-1)}{4(-1)}\\ &= \frac{-2+8i}{-4}\\ &= \frac{1}{2}-2i.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{2-6i}{3-4i} &= \left(\frac{2-6i}{3-4i}\right)\left(\frac{3+4i}{3+4i}\right)\\ &= \frac{6+8i-18i-24i^2}{9+12i-12i-16i^2}\\ &= \frac{6-10i-24(-1)}{9-16(-1)}\\ &= \frac{30-10i}{25}\\ &= \frac{30}{25}-\frac{10}{25}i\\ &= \frac{6}{5}-\frac{2}{5}i.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{11-2i}{1+\frac{i}{2}} &= \left(\frac{11-2i}{1+\frac{i}{2}}\right)\left(\frac{1-\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)\\ &= \frac{11-\frac{11}{2}i-2i+i^2}{1-\frac{i}{2}+\frac{i}{2}-\frac{i^2}{4}}\\ &= \frac{11-\frac{15}{2}i+(-1)}{1-\frac{(-1)}{4}}\\ &= \frac{10-\frac{15}{2}i}{5/4}\\ &= \left(10-\frac{15}{2}i\right)\cdot\frac{4}{5}\\ &= \frac{40}{5}-\frac{60}{10}i\\ &= 8-6i.\end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 8.

Agora que sabemos como efetuar operações básicas com números complexos, podemos finalmente conferir a solução de uma equação quadrática.

Problema 10. Verificação da solução de uma equação quadrática

Verifique se $x = 3 + 2i$ e $\bar{x} = 3 - 2i$ são, de fato, as soluções da equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

apresentada no Problema 3.

Solução.

Trabalharemos com uma raiz de cada vez, começando por $x = 3+2i$. Substituindo, então, essa raiz na equação, obtemos

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 13 &= 0 && \text{Equação original.}\\
(3+2i)^2 - 6(3+2i) + 13 &= 0 && \text{Substituição de } x \text{ por } 3+2i.\\
3^2 + 2\cdot 3\cdot 2i + 2^2 i^2 - 6\cdot 3 - 6\cdot 2i + 13 &= 0 && \text{Propriedade distributiva.}\\
9 + 12i - 4 - 18 - 12i + 13 &= 0 && \text{Cálculo dos produtos.}\\
(9 - 4 - 18 + 13) + (12 - 12)i &= 0 && \text{Reagrupamento dos termos.}\\
0 &= 0 && \text{Ok! } 3+2i \text{ é solução da equação.}
\end{aligned}$$

Repetindo, agora, o procedimento para $\bar{x} = 3 - 2i$, obtemos

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 13 &= 0 && \text{Equação original.}\\
(3-2i)^2 - 6(3-2i) + 13 &= 0 && \text{Substituição de } x \text{ por } 3-2i.\\
3^2 - 2\cdot 3\cdot 2i + 2^2 i^2 - 6\cdot 3 + 6\cdot 2i + 13 &= 0 && \text{Propriedade distributiva.}\\
9 - 12i - 4 - 18 + 12i + 13 &= 0 && \text{Cálculo dos produtos.}\\
(9 - 4 - 18 + 13) + (12 - 12)i &= 0 && \text{Reagrupamento dos termos.}\\
0 &= 0 && \text{Ok! } 3-2i \text{ é solução da equação.}
\end{aligned}$$

Problema 11. Verificação da solução de uma equação quadrática

Verifique se $x = 4 - 3i$ é solução da equação

$$4x^2 - 24x + 45 = 0.$$

Solução.

Substituindo $x = 4 - 3i$ na equação, obtemos

$$\begin{aligned}
4x^2 - 24x + 45 &= 0\\
4(4-3i)^2 - 24(4-3i) + 45 &= 0\\
4[4^2 - 2\cdot 4\cdot 3i + (3i)^2] - 24\cdot 4 + 24\cdot 3i + 45 &= 0\\
4[16 - 24i - 9] - 96 + 72i + 45 &= 0\\
4[7 - 24i] - 51 + 72i &= 0\\
28 - 96i - 51 + 72i &= 0\\
-23 - 24i &= 0 + 0i.
\end{aligned}$$

Comparando em separado a parte real e a parte imaginária de cada lado da última equação acima, concluímos que

$$-23 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad -24 \neq 0,$$

de modo que o valor fornecido não é uma raiz de $4x^2 - 24x + 45 = 0$.

Agora, tente o Exercício 9.

Exercícios 4.5

1. Reescreva as expressões abaixo usando a unidade imaginária i quando necessário.

a) $\sqrt{-49}$
b) $-\sqrt{-81}$
c) $\sqrt{-8}$
d) $\sqrt{-\frac{9}{16}}$
e) $\sqrt{-\frac{6}{25}}$
f) $\sqrt{4}\sqrt{-25}$
g) $\sqrt{-4}\sqrt{-25}$
h) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$
i) $\sqrt{3}\sqrt{-12}$
j) $\sqrt{(-3)(-12)}$
k) $\sqrt{-20}\sqrt{-5}$
l) $\frac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-2}}$
m) $\frac{\sqrt{-192}}{\sqrt{-3}}$
n) $\frac{\sqrt{-56}}{\sqrt{-7}\sqrt{-2}}$

2. Forneça a parte real e a parte imaginária de cada número complexo a seguir.

a) $8 - 6i$
b) $5i - 7$
c) $16i$
d) 25
e) $\sqrt{36}$
f) $-\frac{5i}{4}$
g) $\frac{3}{7} - 2i$
h) $\frac{12-8i}{3}$
i) $11 + \sqrt{-9}$

3. Resolva as equações abaixo.

a) $9x^2 + 1 = 0$
b) $25x^2 + 16 = 0$
c) $x^2 - 4x + 5 = 0$
d) $x^2 + 2x + 10 = 0$
e) $x^2 - 12x + 40 = 0$
f) $-x^2 + 8x - 25 = 0$
g) $x^2 - 5x + 7 = 0$
h) $3x^2 - 12x + 87 = 0$
i) $4x^2 + 4x + 5 = 0$
j) $2x^2 - 6x + 9 = 0$
k) $4x^2 + 24x + 85 = 0$
l) $5x^2 - 2x + 10 = 0$

4. Escreva os conjugados complexos dos números a seguir.

a) $\frac{7-5i}{6}$
b) $4i - 3$
c) $-\frac{i\sqrt{5}}{4} - 8$
d) $-\frac{4i}{9}$
e) $-\frac{2}{3}$
f) $\sqrt{-36}$

5. Efetue as operações.

a) $(4 + 6i) + (8 - 3i)$
b) $(6 + 5i) - (5 + 2i)$
c) $(-2 + 5i) + (5 + 7i)$
d) $(3 - 8i) - (10 + 6i)$
e) $(2 - i) - (5 - 3i)$
f) $(2 - 3i) + (5 + 4i)$
g) $(-4 + 3i) - \left(1 - \frac{i}{2}\right)$
h) $9i + (4 - 7i)$
i) $13 - (9 - 5i)$
j) $(6 - 3i) - 7i$
k) $\left(4 - 2i\sqrt{3}\right) - \left(2 - 3i\sqrt{3}\right)$
l) $(5{,}2 - 2{,}4i) - (6{,}4 + 1{,}8i)$

6. Determine os valores dos números reais x e y que satisfazem as equações abaixo.

a) $(3 + x) + (2 + y)i = 5 - 6i$
b) $(4 - xi) - (y - 5i) = 3 + 2i$
c) $(2x - 4i) + (3x - 2yi) = 25 - 16i$
d) $(2x - 4yi) + (3y + xi) = 1 + 6i$

7. Efetue as operações.

a) $6\left(2 - \frac{i}{3}\right)$
b) $4i(5 - 7i)$
c) $-5i(3 - 2i)$
d) $(4 + 3i)(6 - i)$
e) $(8 - 3i)(7 - 5i)$
f) $(-2 + i)(1 - 2i)$
g) $(2 - 3i)(5 + 4i)$
h) $\left(\sqrt{3} - 2i\right)\left(\sqrt{3} + i\right)$
i) $(4 + 2i)^2$
j) $(5 - 6i)^2$
k) $(3 - 5i)^2$
l) $(3 - 5i)(3 + 5i)$
m) $(-3 + 5i)(3 + 5i)$

8. Efetue as operações.

a) $\frac{36-20i}{4}$
b) $-\frac{21}{3i}$
c) $\frac{2}{1+i}$
d) $-\frac{7}{1+3i}$
e) $\frac{8i}{2-4i}$
f) $-\frac{5i}{3+i}$
g) $\frac{6+5i}{2i}$
h) $\frac{-4+7i}{5i}$
i) $\frac{5+i}{1-i}$
j) $\frac{4-6i}{2+3i}$
k) $\frac{-2+5i}{5-2i}$
l) $\frac{1-3i}{1-\frac{i}{2}}$
m) $\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}$
n) $\frac{7}{1+2i} - \frac{3}{1-2i}$

9. Para cada equação, verifique se x é uma raiz.

a) $3x^2 + 3 = 0, \quad x = -i$
b) $x^2 - 4x + 53 = 0, \quad x = 2 + 7i$
c) $x^2 + 2x + 10 = 0, \quad x = 1 - 3i$
d) $4x^2 + 24x + 37 = 0, \quad x = -3 - \frac{i}{2}$
e) $x^2 - 4x + 5 = 0, \quad x = -2 + i$
f) $3x^2 - 24x + 60 = 0, \quad x = 4 - i$

10. Calcule $i^1, i^2, i^3, \ldots, i^8$. Encontre um padrão que permita prever os valores dessas potências. Usando o padrão que você encontrou, calcule i^{25}, i^{50}, i^{76} e i^{155}.

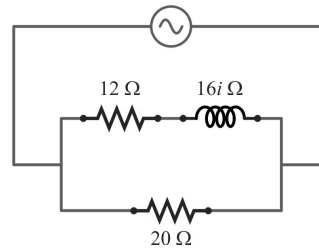
11. Em um circuito elétrico, damos o nome de *impedância* à oposição à passagem de corrente elétrica no circuito, quando este é submetido a uma tensão.

Cada elemento de um circuito (resistor, capacitor, indutor) produz uma impedância. Para um resistor de 10 Ω, por exemplo, a impedância é igual à resistência, ou seja, vale os mesmos 10 Ω. Já em um indutor de 10 Ω, a impedância é igual a $10i$ Ω.

Quando um circuito possui dois ramos em paralelo, a impedância total, z, pode ser obtida a partir da equação

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2},$$

em que z_1 e z_2 são as impedâncias nos ramos 1 e 2 do circuito. Já quando há dois elementos em série dentro de um mesmo ramo do circuito, a impedância total do ramo é igual à soma das impedâncias dos elementos.

A figura abaixo mostra um pequeno circuito com dois ramos em paralelo, um dos quais com apenas um resistor e outro com um resistor e um indutor. Determine a impedância total do circuito.

Respostas dos Exercícios 4.5

1. a) $7i$ b) $-9i$ c) $2i\sqrt{2}$ d) $\frac{3i}{4}$ e) $\frac{i\sqrt{6}}{5}$ f) $10i$ g) -10 h) -6 i) $6i$ j) 6 k) -10 l) 6 m) 8 n) $-2i$

2.
a) Parte real: 8; Parte imaginária: -6
b) Parte real: -7; Parte imaginária: 5
c) Parte real: 0; Parte imaginária: 16
d) Parte real: 25; Parte imaginária: 0
e) Parte real: 6; Parte imaginária: 0
f) Parte real: 0; Parte imaginária: $-\frac{5}{4}$
g) Parte real: $\frac{3}{7}$; Parte imaginária: -2
h) Parte real: 4; Parte imaginária: $-\frac{8}{3}$
i) Parte real: 11; Parte imaginária: 3

3.
a) $x = -\frac{i}{3}$, $\bar{x} = \frac{i}{3}$
b) $x = -\frac{4i}{5}$, $\bar{x} = \frac{4i}{5}$
c) $x = 2 - i$, $\bar{x} = 2 + i$
d) $x = -1 - 3i$, $\bar{x} = -1 + 3i$
e) $x = 6 - 2i$, $\bar{x} = 6 + 2i$
f) $x = 4 - 3i$, $\bar{x} = 4 + 3i$
g) $x = \frac{5-i\sqrt{3}}{2}$, $\bar{x} = \frac{5+i\sqrt{3}}{2}$
h) $x = 2 - 5i$, $\bar{x} = 2 + 5i$
i) $x = -\frac{1}{2} - i$, $\bar{x} = -\frac{1}{2} + i$
j) $x = \frac{3-3i}{2}$, $\bar{x} = \frac{3+3i}{2}$
k) $x = -3 - \frac{7i}{2}$, $\bar{x} = -3 + \frac{7i}{2}$
l) $x = \frac{1-7i}{5}$, $\bar{x} = \frac{1+7i}{5}$

4. a) $\frac{7+5i}{6}$ b) $-4i - 3$ c) $\frac{i\sqrt{5}}{4} - 8$ d) $\frac{4i}{9}$ e) $-\frac{2}{3}$ f) $-6i$

5. a) $12 + 3i$ b) $1 + 3i$ c) $3 + 12i$ d) $-7 - 14i$ e) $-3 + 2i$ f) $7 + i$ g) $-5 + \frac{7}{2}i$ h) $4 + 2i$ i) $4 + 5i$ j) $6 - 10i$ k) $2 + i\sqrt{3}$ l) $-1{,}2 - 4{,}2i$

6. a) $x = 2$, $y = -8$ b) $x = 3$, $y = 1$ c) $x = 5$, $y = 6$ d) $x = 2$, $y = -1$

7. a) $12 - 2i$ b) $28 + 20i$ c) $-10 - 15i$ d) $27 + 14i$ e) $41 - 61i$ f) $5i$ g) $22 - 7i$ h) $5 - i\sqrt{3}$ i) $12 + 16i$ j) $-11 + 60i$ k) $-16 - 30i$ l) 34 m) -34

8. a) $9 - 5i$ b) $7i$ c) $1 - i$ d) $-\frac{7}{10} + \frac{21i}{10}$ e) $-\frac{8}{5} + \frac{4i}{5}$ f) $-\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}$ g) $\frac{5}{2} - 3i$ h) $\frac{7}{5} + \frac{4i}{5}$ i) $2 + 3i$ j) $-\frac{10}{13} - \frac{24i}{13}$ k) $-\frac{20}{29} + \frac{21i}{29}$ l) $2 - 2i$ m) $-i$ n) $\frac{4}{5} - 4i$

9. $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$.
Após a divisão do expoente por 4, observa-se que:

- Se o resto for 1, a potência valerá i.
- Se o resto for 2, a potência valerá -1.
- Se o resto for 3, a potência valerá $-i$.
- Se o resto for 0, a potência valerá 1.

Usando essa regra, obtemos $i^{25} = i$, $i^{50} = -1$, $i^{76} = 1$ e $i^{155} = -i$.

10. a) Sim b) Sim c) Não d) Sim e) Não f) Não

11. $z = 10 + 5i\ \Omega$

4.6 Zeros complexos de funções polinomiais

A Seção 4.3 foi dedicada ao estudo dos zeros reais de funções polinomiais. Agora que aprendemos a trabalhar com números complexos, estenderemos nossa análise de modo a incluir os zeros complexos dessas funções. Começaremos apresentando um teorema que é pomposamente chamado de *teorema fundamental da álgebra*, nome dado em uma época em que a solução de equações polinomiais ocupava uma posição central no estudo da álgebra.

■ Teorema fundamental da álgebra

Já vimos que toda equação polinomial de grau n, com coeficientes reais, tem no máximo n raízes reais. Veremos agora que, trabalhando com números complexos, conseguimos resultados bem mais precisos, baseados no teorema abaixo, que apresentamos sem demonstração.

Observe que o teorema fundamental da álgebra também se aplica a polinômios com coeficientes reais, já que todo número real é também complexo.

Teorema fundamental da álgebra

Toda função polinomial $p(x)$ com coeficientes complexos tem ao menos um zero complexo.

Apresentado dessa forma, o teorema parece pouco promissor, pois só indica que uma função polinomial de grau n,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tem um zero complexo $\bar{x}_1$. Entretanto, a sua combinação com o Teorema do Fator, apresentado à página 391, nos permite decompor a função p_n no produto de um fator linear por uma função polinomial p_{n-1}, que tem grau $n-1$:

$$p(x) = (x - \bar{x}_1) \cdot p_{n-1}(x).$$

Supondo, então, que $n-1$ seja maior que zero, podemos aplicar novamente o teorema fundamental da álgebra, agora a p_{n-1}. Concluímos, assim, que essa função também tem ao menos um zero complexo, $\bar{x}_2$, e que é possível escrever $p_{n-1}(x) = (x - \bar{x}_2)p_{n-2}(x)$. Desse modo,

$$p(x) = (x - \bar{x}_1) \cdot (x - \bar{x}_2) \cdot p_{n-2}(x),$$

em que $p_{n-2}(x)$ é um polinômio de grau $n-2$. Repetindo esse processo outras $n-2$ vezes, chegamos à expressão

$$p(x) = a_n(x - \bar{x}_1) \cdot (x - \bar{x}_2) \cdot \cdots \cdot (x - \bar{x}_n).$$

Esse resultado é importante porque indica que é possível decompor uma função polinomial de grau n em n fatores de grau 1, embora o teorema não explique como os zeros de p_n são determinados.

Teorema da decomposição

Se $p_n(x)$ é um polinômio de grau $n > 0$, então é possível escrevê-lo como

$$p_n(x) = a_n(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) \cdot \cdots \cdot (x - \bar{x}_n),$$

em que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ são números complexos e $a_n \neq 0$.

Exemplo 1. Fatoração de um polinômio

No Problema 5 da Seção 4.3, vimos que o polinômio

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 13x^2$$

podia ser escrito na forma

$$p(x) = x^2(x^2 - 4x + 13),$$

bastando para isso que puséssemos x^2 em evidência. Concluímos, assim, que $x_1 = 0$ é uma raiz (de multiplicidade 2) de $p(x) = 0$.

Para achar os outros zeros do polinômio, aplicamos a fórmula de Bháskara à equação

$$x^2 - 4x + 13 = 0,$$

calculando, em primeiro lugar, o discriminante:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36.$$

Uma vez que já sabemos trabalhar com números complexos, não nos intimidamos com o fato de o discriminante ser negativo, e prosseguimos escrevendo

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Assim, as raízes (complexas) de $x^2 - 4x + 13 = 0$ são

$$x_2 = 2 + 3i \qquad \text{e} \qquad x_3 = 2 - 3i.$$

Finalmente, lembrando que $x_1 = 0$ também é um zero da função polinomial $p(x) = x^4 - 4x^3 + 13x^2$, e aplicando o Teorema da Decomposição, obtemos

Observe que, nesse exemplo, o coeficiente do monômio de maior grau do polinômio original é $a_4 = 1$.

$$p(x) = x^2(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i).$$

Multiplicidade de zeros e pares conjugados

O Teorema da Decomposição indica que é possível escrever uma função polinomial de grau n como o produto de n fatores lineares que envolvem $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, os zeros complexos da função. Entretanto, não se exige que esses números sejam distintos. De fato, vimos à página 399 que uma função quadrática simples como $p(x) = x^2 - 10x + 25$ pode ser apresentada na forma fatorada

$$p(x) = (x - 5)(x - 5),$$

na qual o zero real $x = 5$ aparece duas vezes, tendo, portanto, *multiplicidade* 2.

Problema 2. Multiplicidade dos zeros de uma função

A função polinomial $p(x) = 4x^7 + 44x^6 + 73x^5 - 508x^4 - 1070x^3 + 1400x^2 - 375x$ pode ser escrita na forma fatorada

$$p(x) = 4x(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x + 5)^3.$$

Determine os zeros da função e suas multiplicidades.

Solução.

Como já dispomos da função na forma fatorada, concluímos trivialmente que seus zeros são

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_4 = -5.$$

A multiplicidade de cada zero c é o número de vezes que o termo $(x - c)$ aparece quando a função é apresentada na forma fatorada. Dito de outra forma, a multiplicidade de um zero c é o expoente do fator $(x - c)$. Sendo assim, nesse problema,

- $x_1 = 0$ tem multiplicidade 1,
- $x_2 = 3$ tem multiplicidade 1,
- $x_3 = \frac{1}{2}$ tem multiplicidade 2,
- $x_4 = -5$ tem multiplicidade 3.

No problema acima, notamos que a soma das multiplicidades é exatamente igual ao grau do polinômio. Esse resultado, que vale para toda função polinomial, está resumido no quadro a seguir.

Número de zeros da função polinomial

Uma função polinomial de grau $n \geq 1$ tem exatamente n zeros, supondo que um zero com multiplicidade m seja contado m vezes.

Problema 3. Zeros de uma função polinomial

Dada a função

$$p(x) = 5(x+1)^3(x-2+i)^2(x-2-i)^2,$$

determine as raízes da equação $p(x) = 0$, bem como o grau de p.

Solução.

As raízes da equação $p(x) = 0$ são os zeros da função, ou seja,

$$x = -1, \quad x = 2-i \quad \text{e} \quad x = 2+i.$$

Já o grau de p pode ser obtido somando-se os expoentes dos fatores lineares:

$$3+2+2 = 7.$$

Agora, tente o Exercício 1.

Problema 4. Escrevendo um polinômio a partir de seus zeros

Uma função polinomial p tem como zeros $x = 3$ (com multiplicidade 2), $x = 2i$ e $x = -2i$. Escreva a expressão de p, sabendo que $p(0) = 144$.

Solução.

Segundo o Teorema da Decomposição, a função pode ser escrita na forma

$$p(x) = a(x-3)^2(x-2i)(x+2i).$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} p(0) &= a(0-3)^2(0-2i)(0+2i) && \text{Substituindo } x \text{ por } 0. \\ &= a(-3)^2(-2i)(2i) && \text{Simplificando os termos entre parênteses.} \\ &= a \cdot 9 \cdot (-4i^2) && \text{Calculando a potência e o produto.} \\ &= a \cdot 9 \cdot 4 && \text{Usando o fato de que } i^2 = -1. \\ &= 36a && \text{Simplificando o resultado.} \end{aligned}$$

Como sabemos que $p(0) = 144$, concluímos que

$$36a = 144 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{144}{36} = 4.$$

Logo,

$$p(x) = 4(x-3)^2(x-2i)(x+2i).$$

Agora, tente o Exercício 4.

Observe que, no Exemplo 1 e no Problema 4, os zeros complexos do polinômio apareceram em pares conjugados. No primeiro caso, esses zeros eram $2+3i$ e $2-3i$, enquanto no segundo tínhamos $2i$ e $-2i$. De fato, isso não ocorreu por acaso, mas como consequência direta de os coeficientes do polinômio serem reais, como indicado no quadro abaixo.

Raízes complexas conjugadas

Seja p uma função polinomial com coeficientes reais $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$. Se $z = c + di$ é um zero de p, então seu conjugado, $\bar{z} = c - di$ também é um zero da função.

Problema 5. Zeros conjugados

Escreva uma função polinomial de quarto grau, com coeficientes reais, que tenha como zeros

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -6, \quad \text{e} \quad x_3 = 4 - 5i.$$

Solução.

Como os coeficientes da função devem ser reais, concluímos que os zeros complexos aparecerão em pares conjugados. Assim, se $x_3 = 4 - 5i$ é um desses zeros, devemos ter $x_4 = 4 + 5i$. Logo, a função terá a forma

$$p(x) = a(x-1)(x+6)(x-4+5i)(x-4-5i).$$

Escolhendo $a = 1$ por simplicidade, obtemos

$$p(x) = (x-1)(x+6)(x-4+5i)(x-4-5i).$$

Agora, tente o Exercício 5.

Problema 6. Fatoração completa de uma função polinomial

Sabendo que $x_1 = 1 + 2i$ é um zero de

$$p(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 8x + 80,$$

encontre os demais zeros da função e a escreva na forma fatorada.

Solução.

Como os coeficientes da função são reais, o conjugado de $x_1 = 1 + 2i$ também é um zero, de modo que podemos definir

$$x_2 = 1 - 2i.$$

Usando, então, o Teorema do Fator, temos

Observe que $a_4 = 1$.

$$p(x) = (x-1-2i)(x-1+2i)\,p_2(x),$$

em que $p_2(x)$ é uma função polinomial de grau 2. Para encontrar essa função, escrevemos

Você consegue mostrar que $(x-1-2i)(x-1+2i) = x^2 - 2x + 5$?

$$p_2(x) = \frac{p(x)}{(x-1-2i)(x-1+2i)} = \frac{x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 8x + 80}{x^2 - 2x + 5}.$$

Efetuando a divisão de polinômios, obtemos

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +6x^3 & +5x^2 & +8x & +80 & x^2 -2x +5 \\ \hline -x^4 & +2x^3 & -5x^2 & & & x^2+8x+16 \\ \hline & 8x^3 & +0x^2 & +8x & +80 & \\ & -8x^3 & +16x^2 & -40x & & \\ \hline & & 16x^2 & -32x & +80 & \\ & & -16x^2 & +32x & -80 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

Logo, $p_2(x) = x^2 + 8x + 16$. Para encontrar os zeros dessa função, calculamos o discriminante

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0.$$

e usamos a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Como p_2 tem apenas um zero, $x = -4$, escrevemos

$$p_2(x) = (x+4)^2,$$

Desse modo, a forma fatorada de p é

$$p(x) = (x+4)^2(x-1-2i)(x-1+2i)$$

e seus zeros são $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$ e $x_3 = -4$ (com multiplicidade 2).

Agora, tente o Exercício 3.

Exercícios 4.6

1. Determine os zeros das funções polinomiais abaixo e indique suas multiplicidades. Informe também o grau das funções.

a) $16(x-2)^2(x+\frac{7}{2})^3$
b) $(x-2-5i)(x-2+5i)(x+3-4i)(x+3+4i)$
c) $(x+4)^3(x-5-5i)(x-5+5i)$
d) $2(x-1)(x-1)(x-1-i)(x-1+i)$
e) $(x-8-2i)^4(x-8+2i)^4$
f) $3x(x-\frac{1}{3})(x-3i)^2(x+3i)^2$

2. Determine as raízes das equações abaixo e escreva os polinômios do lado esquerdo na forma fatorada.

a) $16x^2 + 81 = 0$
b) $x^3 - 9x = 0$
c) $4x^3 + 25x = 0$
d) $x^3 + 2x^2 + 5x = 0$
e) $2x^3 - 16x^2 + 50x = 0$
f) $x^4 + 4x^2 = 0$
g) $256x^4 + x^2 = 0$
h) $x^5 + 64x^3 = 0$
i) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$
j) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

3. Determine as raízes das equações abaixo e escreva os polinômios do lado esquerdo na forma fatorada.

a) $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0$, sabendo que 2 é raiz
b) $2x^3 - 3x^2 + 50x - 75 = 0$, sabendo que $5i$ é raiz
c) $x^3 - 7x^2 + 44x + 52 = 0$, sabendo que $4 - 6i$ é raiz
d) $x^3 - 3x^2 + 7x + 75 = 0$, sabendo que -3 é raiz
e) $4x^3 - 24x^2 + 25x - 25 = 0$, sabendo que 5 é raiz
f) $x^3 - 64 = 0$
g) $x^4 - 1 = 0$, sabendo que 1 e -1 são raízes
h) $x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 36x - 108 = 0$, sabendo que $3i$ é raiz
i) $9x^4 - 36x^3 + 76x^2 - 16x + 32$, sabendo que $-\frac{2i}{3}$ é raiz
j) $4x^4 - 24x^3 + 37x^2 - 20x = 0$, sabendo que 4 é raiz

4. Encontre as funções polinomiais p que possuem as características abaixo.

a) Grau 3, $p(0) = -16$ e zeros iguais a 1, $4i$ e $-4i$
b) Grau 3, $p(2) = 3$ e zeros iguais a $\frac{1}{2}$, $2 + 2i$ e $2 - 2i$
c) Grau 4, $p(1) = -30$ e zeros iguais a 0, 4, $-1 + i$ e $-1 - i$
d) Grau 4, $p(0) = 200$ e zeros iguais a -3, -5, $2 - \frac{2i}{3}$ e $2 + \frac{2i}{3}$

5. Encontre funções polinomiais p que possuam as características abaixo.

a) Grau 3 e zeros iguais a 6, $\frac{i}{3}$ e $-\frac{i}{3}$

b) Grau 3 e zeros iguais a 0, $5+2i$ e $5-2i$

c) Grau 4 e zeros iguais a -2, 7, $1+\frac{5i}{2}$ e $1-\frac{5i}{2}$

d) Grau 4 e zeros iguais a 5 (com multiplicidade 2), $4+i\sqrt{2}$ e $4-i\sqrt{2}$

e) Grau 4 e zeros iguais a $6+i$ e $6-i$, ambos com multiplicidade 2

f) Grau 5 e zeros iguais a $\frac{3}{4}$ (com multiplicidade 3), $-3+i$ e $-3-i$

g) Grau 5 e zeros iguais a 0 (com multiplicidade 2), -4, $2+3i$ e $2-3i$

Respostas dos Exercícios 4.6

1. a) Zeros: 2 (com multiplicidade 2) e $-\frac{7}{2}$ (com multiplicidade 3). Grau: 5.
b) Zeros: $2+5i$, $2-5i$, $-3+4i$ e $-3-4i$. Grau: 4.
c) Zeros: -4 (com multiplicidade 3), $5+5i$ e $5-5i$. Grau: 5.
d) Zeros: 1 (com multiplicidade 2), $1+i$ e $1-i$. Grau: 4.
e) Zeros: $8+2i$ e $8-2i$, ambos com multiplicidade 4. Grau: 8.
f) Zeros: 0, $\frac{1}{3}$, $3i$ (com multiplicidade 2) e $-3i$ (com multiplicidade 2). Grau: 6.

2. a) $x=9i/2$ e $x=-9i/2$. Polinômio: $16(x-\frac{9i}{2})(x+\frac{9i}{2})$
b) $x=0$, $x=3$ e $x=-3$. Polinômio: $x(x-3)(x+3)$
c) $x=0$, $x=5i/2$ e $x=-5i/2$. Polinômio: $4x(x-\frac{5i}{2})(x+\frac{5i}{2})$
d) $x=0$, $x=-1+2i$ e $x=-1-2i$. Polinômio: $x(x+1-2i)(x+1+2i)$
e) $x=0$, $x=4+3i$ e $x=4-3i$. Polinômio: $2x(x-4-3i)(x-4+3i)$
f) $x=0$, $x=2i$ e $x=-2i$. Polinômio: $x^2(x-2i)(x+2i)$
g) $x=0$, $x=i/10$ e $x=-i/16$. Polinômio: $256x^2(x-\frac{i}{16})(x+\frac{i}{16})$
h) $x=0$, $x=i/10$ e $x=-i/16$. Polinômio: $x^3(x-8i)(x+8i)$
i) $x=2$, $x=-2$, $x=i\sqrt{6}$ e $x=-i\sqrt{6}$. Polinômio: $(x-2)(x+2)(x-i\sqrt{6})(x+i\sqrt{6})$
j) $x=i$, $x=-i$, $x=2i$ e $x=-2i$. Polinômio: $(x-i)(x+i)(x-2i)(x+2i)$

3. a) $x=2$, $x=-2+i$ e $x=-2-i$. Polinômio: $(x-2)(x+2-i)(x+2+i)$
b) $x=\frac{3}{2}$, $x=5i$ e $x=-5i$. Polinômio: $2(x-\frac{3}{2})(x-5i)(x+5i)$
c) $x=-1$, $x=4+6i$ e $x=4-6i$. Polinômio: $(x+1)(x-4-6i)(x-4+6i)$
d) $x=-3$, $x=3+4i$ e $x=3-4i$. Polinômio: $(x+3)(x-3+4i)(x-3-4i)$
e) $x=5$, $x=\frac{1}{2}+i$ e $x=\frac{1}{2}-i$. Polinômio: $4(x-5)(x-\frac{1}{2}-i)(x-\frac{1}{2}+i)$
f) $x=4$, $x=-2+2i\sqrt{3}$ e $x=-2-2i\sqrt{3}$. Polinômio: $(x-4)(x+2-2i\sqrt{3})(x+2+2i\sqrt{3})$
g) $x=1$, $x=-1$, $x=i$ e $x=-i$. Polinômio: $(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$
h) $x=2$, $x=-6$, $x=3i$ e $x=-3i$. Polinômio: $(x-2)(x+6)(x-3i)(x+3i)$
i) $x=\frac{2i}{3}$, $x=-\frac{2i}{3}$, $x=2+2i$ e $x=2-2i$. Polinômio: $9(x-\frac{2i}{3})(x+\frac{2i}{3})(x-2-2i)(x-2+2i)$
j) $x=0$, $x=4$, $x=1+\frac{i}{2}$ e $x=1-\frac{i}{2}$. Polinômio: $4x(x-4)(x-1-\frac{i}{2})(x-1+\frac{i}{2})$

4. a) $(x-1)(x-4i)(x+4i)$
b) $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})(x-2-2i)(x-2+2i)$
c) $2x(x-4)(x+1-i)(x+1+i)$
d) $3(x+3)(x+5)(x-2-\frac{2i}{3})(x-2+\frac{2i}{3})$

5. a) $(x-6)(x-\frac{i}{3})(x+\frac{i}{3})$
b) $x(x-5-2i)(x-5+2i)$
c) $(x+2)(x-7)(x-1-\frac{5i}{2})(x-1+\frac{5i}{2})$
d) $(x-5)^2(x-4-i\sqrt{2})(x-4+i\sqrt{2})$
e) $(x-6-i)^2(x-6+i)^2$
f) $(x-\frac{3}{4})^3(x+3-i)(x+3+i)$
g) $x^2(x-4)(x-2-3i)(x-2+3i)$

4.7 Ajuste de curvas

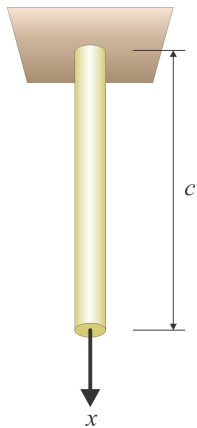



Figura 4.36: Barra vertical sujeita a força axial.

Experimentalmente, um engenheiro descobriu que uma determinada barra vertical, quando submetida a uma força axial, alonga-se conforme indicado na tabela abaixo.

Força, x (tf)	5	10	15	20
Comprimento, c (m)	3,700	3,867	3,950	4,083

A Figura 4.36 mostra a barra sob o efeito da força axial. Por sua vez, a Figura 4.37, criada com o auxílio de um programa de traçado de gráficos, exibe no plano Cartesiano os mesmos pares (x,c) apresentados na tabela.

O engenheiro deseja encontrar uma função que relacione comprimento da barra, c, em metros (m) ao valor da força aplicada, x, em tonelada-força (tf), pois isso o permitiria descobrir o comprimento que a barra teria se fosse submetida a uma força de, por exemplo, 30 tf, que é um valor diferente daqueles mostrados na tabela.

Como os pontos da Figura 4.36 estão quase alinhados, é razoável supor que a função seja linear, ou seja, que

$$c(x) = mx + b,$$

em que m e b são constantes reais que é preciso determinar. Entretanto, apesar de dois pares (x,c) definirem unicamente uma função linear, é impossível encontrar uma reta passe exatamente sobre os quatro pontos.

Nesse caso, por que o engenheiro montou uma tabela com quatro pontos, se dois deles bastariam para determinar as constantes m e b? A resposta a essa pergunta é simples: porque os instrumentos de medida (régua, termômetro etc) não são muito precisos e as condições ambientes mudam durante as medições, de modo que os dados coletados costumam conter erros.

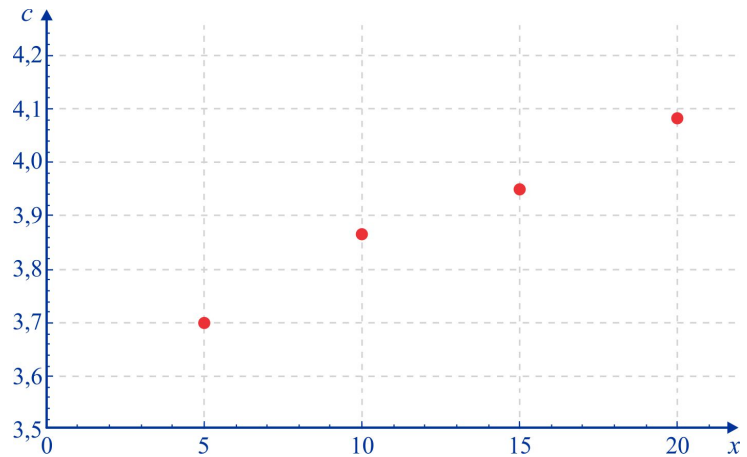



Figura 4.37: Gráfico que relaciona o comprimento da barra, c, à força, x.

Além disso, é possível que o fenômeno que o engenheiro está representando no gráfico não corresponda exatamente a uma reta. Mesmo assim, ele pode adotar um modelo linear para relacionar o comprimento da barra à força aplicada se esta aproximação for suficiente para seus propósitos.

Em resumo, é comum fazermos um número grande de medidas para encontrar uma única reta, pois isso reduz os erros de medição e os efeitos decorrentes do fato de nosso modelo linear ser apenas uma aproximação do fenômeno real que analisamos.

> Denominamos **ajuste de curvas** ao processo de obtenção de uma função que aproxima um conjunto de pontos (em número maior do que seria necessário para definir a função). No caso particular em que a função a ser obtida é afim, o ajuste e chamado *linear*.

O ajuste de curvas linear consiste em encontrar a reta $y = mx + b$ que passe tão próximo quanto possível dos n pontos do plano Cartesiano

$$P_1 = (x_1, y_1),\ P_2 = (x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n = (x_n, y_n),$$

com $n \geq 2$. Para encontrar os coeficientes m e b dessa reta, minimizamos a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos e a reta, ou seja, minimizamos

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2,$$

em que $d_i = y_i - (mx_i + b)$, para $i = 1,2,\ldots,n$. A Figura 4.38 ilustra o ajuste.

Você sabia?
A técnica de ajuste de curvas baseada na soma dos quadrados é a mais empregada em aplicações práticas, e é denominada **método dos quadrados mínimos**.

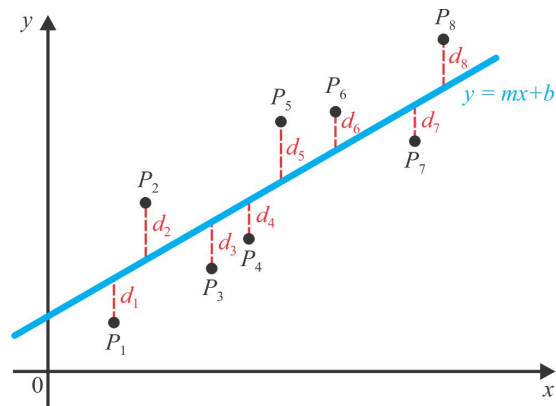



Figura 4.38

A justificativa para a adoção dessa estratégia de obtenção da reta envolve conceitos matemáticos que estão além do escopo desse livro. Entretanto, as planilhas eletrônicas

usuais possuem um recurso gráfico chamado *linha de tendência*, que cria uma função de ajuste para um conjunto de pontos. Assim, felizmente, somos capazes de encontrar a reta para nosso problema sem recorrer a cálculos complicados.

Para encontrar a função de ajuste usando uma planilha, é preciso

1. Criar na planilha uma **tabela** com duas colunas, uma contendo as coordenadas x e a outra as coordenadas y dos pontos que se pretende aproximar.

2. Usar essa tabela para inserir na planilha um **gráfico de dispersão**, que é aquele que permite o traçado de pares ordenados no plano Cartesiano.

3. Adicionar aos pontos do gráfico uma **linha de tendência**, indicando que se deseja mostrar a equação no gráfico. Para ajustes lineares, deve-se selecionar a linha de tendência **linear**.

A Figura 4.39 mostra a reta obtida para o alongamento da barra. Nesse caso, a linha de tendência linear fornecida pela planilha nos permite concluir que a função c que descreve como o comprimento da barra varia com relação à força axial aplicada sobre ela é

$$c(x) = 0{,}0246x + 3{,}592.$$

Note que não é necessário que a reta passe exatamente sobre um ou mais pontos, mas que as distâncias verticais desses pontos à reta sejam reduzidas ao mínimo.

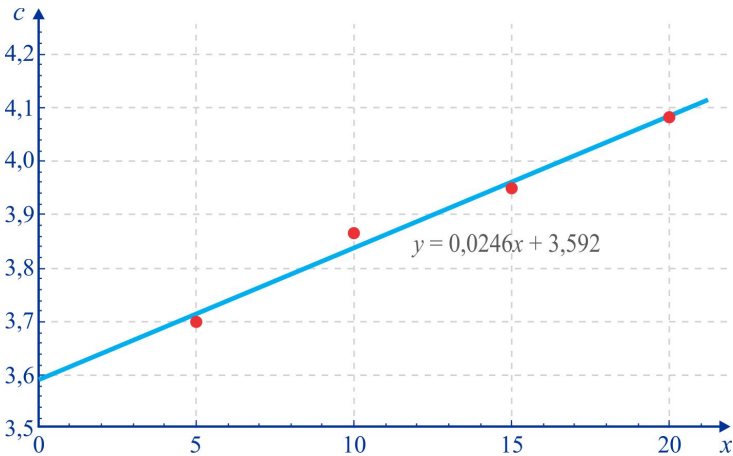



Figura 4.39: Ajuste linear do alongamento da barra.

Agora que dispomos da função c, podemos estimar o comprimento da barra quando ela está sujeita a uma força axial qualquer. Assim, por exemplo, se aplicarmos uma força de 30 tf à barra, esta deverá atingir

$$c(40) = 0{,}0246 \cdot 30 + 3{,}592 = 4{,}330 \text{ m de comprimento.}$$

Problema 1. População brasileira

A população brasileira vem crescendo ao longo dos anos de acordo com a Tabela 4.10, criada a partir de dados do IBGE.

Tabela 4.10: População brasileira.

Ano	População (milhões)
1960	70,992343
1970	94,508583
1980	121,150573
1991	146,917459
2000	169,590693
2010	190,755799

a) Transfira os dados da tabela para uma planilha eletrônica.

b) Trace um gráfico de dispersão no qual o eixo horizontal forneça o ano (a partir de 1960) e o eixo vertical registre a população (em milhões).

c) Aproxime os pontos do gráfico usando uma linha de tendência.

d) Com base na curva de ajuste, defina a função $P(t)$ que fornece a população brasileira (em milhões de habitantes) no ano t, contado a partir de 1960.

e) Estime a população do país em 2020.

Solução.

Os dados do problema foram transferidos para uma planilha, como mostrado na Figura 4.41. Observe que os anos transcorridos desde 1960 foram inseridos na coluna A, enquanto a coluna B foi usada para guardar o número de habitantes do país, em milhões.

A Figura 4.40 mostra em azul os pontos extraídos da planilha. Notando que esses pontos estão bem alinhados, escolhemos uma linha de tendência linear, a qual aparece tracejada na figura. Finalmente, indicamos na planilha que desejávamos exibir a função linear associada à linha de tendência.

	A	B
1	População brasileira	
2		
3	Ano (desde 1960)	População (milhões)
4	0	70,992343
5	10	94,508583
6	20	121,150573
7	31	146,917459
8	40	169,590693
9	50	190,755799

Figura 4.41: Planilha do Problema 1.

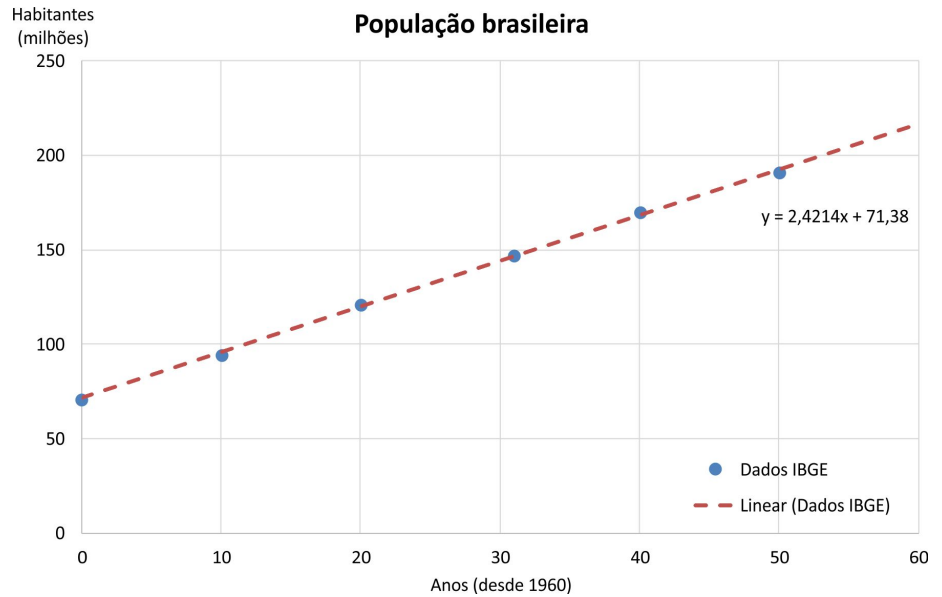



Figura 4.40: Gráfico gerado pela planilha do Problema 1.

A partir do gráfico gerado pela planilha, concluímos que a população brasileira (em milhões) pode ser definida em função do tempo (em anos, desde 1960) por

$$P(t) = 2{,}4214x + 71{,}38.$$

O propósito da determinação de $P(t)$ é a estimativa da população em anos nos quais não houve censo demográfico, incluindo os anos futuros. Usando, então, essa função para prever a população brasileira em 2020, chegamos à conclusão de que o país terá

$$P(2020 - 1960) = P(60) = 2{,}4214 \cdot 60 + 71{,}38 = 216{,}664 \text{ milhões de habitantes.}$$

Agora, tente o Exercício 1.

■ Coeficiente de determinação

Para qualquer conjunto com dois ou mais pares de dados, é possível encontrar uma linha de tendência linear. Entretanto, em muitos casos, essa aproximação não é boa. A Figura 4.42, por exemplo, mostra um conjunto de pontos para os quais o ajuste linear não produz bons resultados.

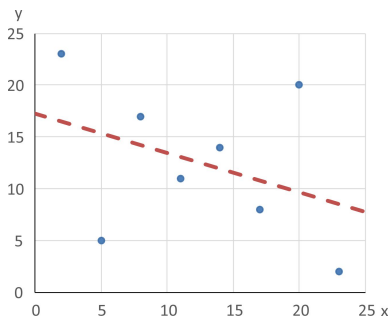



Figura 4.42: Pontos que não permitem um bom ajuste linear.

Para definir se a reta obtida fornece um bom ajuste, usamos uma medida estatística denominada **coeficiente de determinação**. Esse coeficiente, representado por R^2, é um valor entre 0 e 1 tal que

- Se o valor de R^2 está próximo de 1, a curva obtida ajusta-se bem aos dados.
- Se R^2 é próximo de zero, então quase não há relação entre os valores observados e a curva obtida através do ajuste.

Ao criarmos uma linha de tendência em uma planilha, podemos mostrar o valor de R^2 sobre o gráfico, para conferirmos se o ajuste é satisfatório.

Para o problema do alongamento da barra (vide Figura 4.39), por exemplo, o coeficiente de determinação é $R^2 = 0{,}9846$, o que sugere que a função que encontramos descreve o alongamento de forma apropriada.

De forma semelhante, os dados do Problema 1 possuem $R^2 = 0{,}9992$, indicando um alto grau de relação entre $P(t)$ e os pontos da tabela, o que pode ser comprovado observando-se a Figura 4.40. Já os dados usados para criar o gráfico da Figura 4.42 têm $R^2 = 0{,}1451$, um indício de que o ajuste linear não foi adequado nesse caso.

■ Ajuste de curva polinomial

Quando não há uma função afim que aproxima bem um conjunto de pontos do plano Cartesiano, podemos tentar fazer um ajuste de curva usando uma função polinomial de grau maior que 1.

O ajuste de curva polinomial de grau m consiste na obtenção do polinômio

$$y = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

que melhor aproxima um conjunto de pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, com $n \geq m+1$.

Nesse caso, devemos encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ que minimizam a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos e a curva polinomial, ou seja, que minimizam

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2$$

em que $d_i = y_i - (a_m x_i^m + a_{m-1}x_i^{m-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mais uma vez, os conceitos matemáticos apresentados nesse livro não são suficientes para que expliquemos em detalhes como calcular esse polinômio, mas é possível obtê-lo com o auxílio de um planilha eletrônica, como mostra os exemplos a seguir.

Problema 2. Mortalidade infantil

A mortalidade infantil vem decrescendo ao longo dos anos no Brasil. A Tabela 4.11 apresenta o número de mortes até um ano de idade por 1000 nascidos vivos, segundo o IBGE.

Tabela 4.11: Mortalidade infantil segundo o censo do IBGE.

Ano	Casos (‰)
1980	69,12
1991	45,15
2000	30,07
2009	22,47

a) Transfira os dados da tabela para uma planilha eletrônica.

b) Trace um gráfico Ano (a partir de 1980) x número de óbitos.

c) Aproxime os pontos do gráfico usando uma linha de tendência quadrática e confira o valor do coeficiente de determinação.

d) Com base na curva de ajuste que você encontrou, defina a função $M(t)$ que fornece o número de mortes por 1000 nascidos vivos no ano t, contado a partir de 1980.

e) Estime a mortalidade infantil em 2015.

Solução.

Seguindo o roteiro acima, passamos os dados da tabela para a planilha exibida na Figura 4.44. Note que subtraímos 1980 dos anos, de modo que $t = 0$ em 1980 e $t = 29$ em 2009.

Em seguida, traçamos o gráfico de dispersão e incluímos nesse gráfico uma linha de tendência polinomial de ordem 2, conforme mostrado na Figura 4.43.

Figura 4.43: Gráfico gerado pela planilha do Problema 2.

	A	B
1	Mortalidade infantil	
2		
3	Ano (desde 1980)	Casos por 1000 nascidos vivos
4	0	69,12
5	11	45,14
6	20	30,07
7	29	22,47

Figura 4.44: Planilha do Problema 2.

Como o coeficiente de determinação associado ao ajuste quadrático é $R^2 = 0{,}9995$, não há dúvida de que o ajuste escolhido é adequado. Assim, a mortalidade infantil brasileira, desde 1980, tem um comportamento dado aproximadamente pela função

$$M(t) = 0{,}0345t^2 - 2{,}6205 + 69{,}267.$$

Segundo essa função, a mortalidade infantil em 2015 foi de

$$M(2015 - 1980) = M(35) = 19{,}812,$$

ou cerca de 20 óbitos de crianças de até um ano de idade por 1000 nascidos vivos.

Agora, tente o Exercício 4.

Problema 3. Vida útil de um pneu

A vida útil de um pneu de carro depende da pressão (calibragem) utilizada. Pneus muito vazios ou cheios costumam durar menos. A Tabela 4.12 fornece a vida útil (em milhares de quilômetros rodados) observada para um determinado pneu.

Tabela 4.12: Vida útil de um pneu.

Pressão (lb/pol^2)	Vida útil (1000 km)
22	47
25	62
28	72
31	75
34	69
37	64
40	52

a) Transfira os dados da tabela para uma planilha eletrônica.

b) Trace um gráfico Pressão x Vida útil.

c) Aproxime os pontos do gráfico usando uma linha de tendência polinomial.

d) Determine graficamente qual pressão fornece a maior vida útil para esse pneu.

Solução.

Após transferir os dados da Tabela 4.12 para uma planilha e traçar os pontos no plano Cartesiano, decidimos fazer ajustes usando linhas de tendência polinomiais com ordens variadas, como mostrado na Figura 4.45.

Para esse problema, o ajuste polinomial de ordem 2 já fornece uma curva satisfatória, como indica a Figura 4.45a. Por outro lado, subindo de 2 para 3 a ordem do

(a) Ordem 2

(b) Ordem 3

(c) Ordem 4

(d) Ordem 5

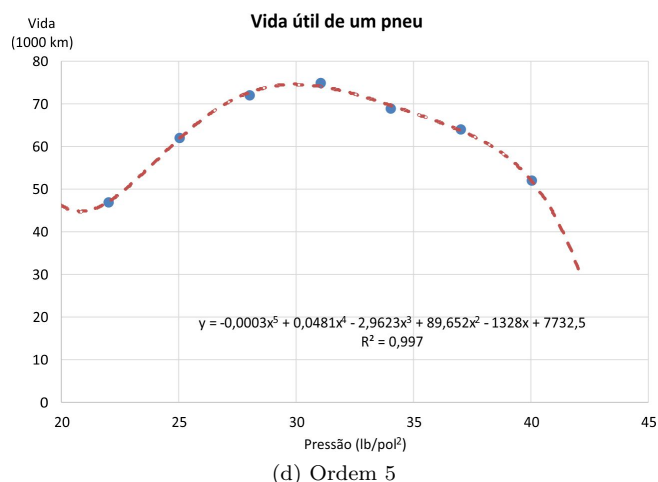
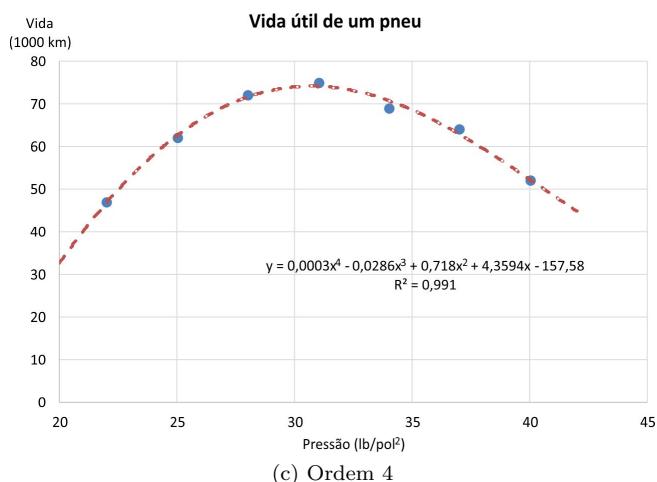
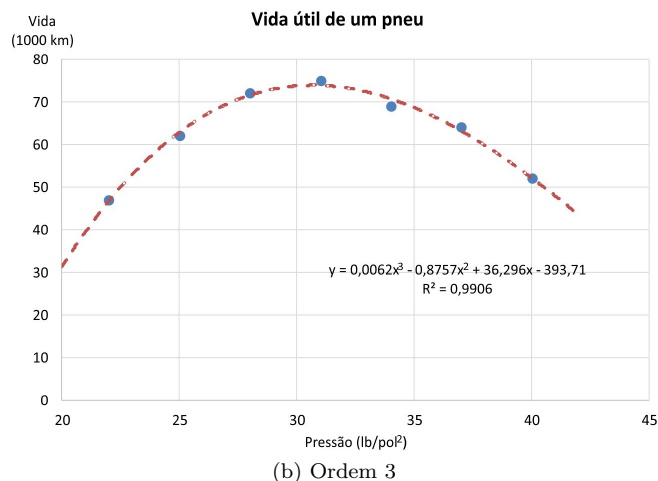
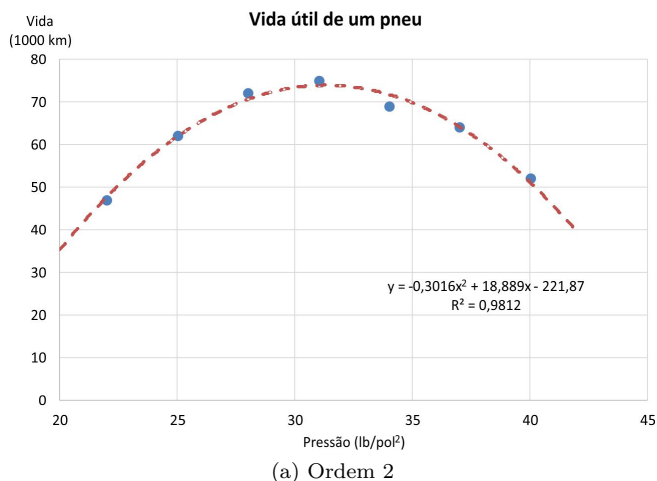



Figura 4.45: Ajustes polinomiais de ordens variadas.

polinômio de ajuste, aumenta-se o coeficiente de determinação de 0,9812 para 0,9906, como se vê na Figura 4.45b.

Naturalmente, a curva se aproxima dos pontos à medida que aumentamos a ordem do polinômio. De fato, se chegarmos ao extremo de exigir que o polinômio tenha ordem igual ao número de pontos menos 1, a curva passará exatamente sobre todos os pontos. Entretanto, as Figuras 4.45c mostram que esse aumento de ordem nem sempre traz os resultados esperados.

Observando a Figura 4.45c, notamos que aumentar a ordem de 3 para 4 provoca um crescimento bastante modesto de R^2, à custa de exigir o cálculo de um monômio de quarto grau. Além disso, o baixo valor de a_4 (o coeficiente que multiplica x^4) sugere que um polinômio de terceiro grau talvez fosse suficiente.

Por sua vez, a Figura 4.45d deixa claro que o aumento da ordem para 5 faz com que a curva aproximadora tenha um aspecto incompatível com aquilo que se imagina que seja a relação entre a vida útil de um pneu e a sua pressão. Nesse caso, apesar de R^2 ter um valor alto, o polinômio é claramente inadequado.

Sendo assim, os ajustes polinomiais de grau 2 e 3 parecem ser os mais úteis para esse problema. Usando qualquer um deles, concluímos a partir das Figuras 4.45a e 4.45b que devemos calibrar o pneu com aproximadamente 31 lb/pol^2, pois essa é a pressão que corresponde ao ponto de máximo do gráfico da função.

Agora, tente o Exercício 5.

Exercícios 4.7

1. A tabela abaixo mostra as alturas e pesos de uma amostra de nove funcionários de uma indústria.

Altura a (m)	Peso P (kg)
1,83	79
1,73	69
1,68	70
1,88	81
1,58	61
1,63	63
1,93	79
1,63	71
1,78	73

a) Transfira a tabela para uma planilha.

b) Trace um gráfico altura x peso.

c) Aproxime os pontos do gráfico por uma função na forma $P(a) = m \cdot a + b$.

d) Determine o peso aproximado de um funcionário com 1,75 m de altura.

2. A expectativa de sobrevida é uma estimativa de quantos anos uma pessoa ainda viverá, conhecida apenas a sua idade atual. Ao dizermos que um indivíduo de 35 anos tem expectativa de sobrevida de 43,3 anos, por exemplo, queremos dizer que, em média, as pessoas que chegam aos 35 anos ainda vivem outros 43,3 anos.

A tabela abaixo fornece a expectativa de sobrevida da população brasileira segundo os dados divulgados pelo IBGE em 2014.

Idade x (anos)	Sobrevida S (anos)
1	75,3
5	71,5
10	66,6
15	61,7
20	57,0
25	52,4
30	47,8

Idade x (anos)	Sobrevida S (anos)
35	43,3
40	38,7
45	34,3
50	30,0
55	25,9
60	22,0
65	18,3

a) Transfira a tabela para uma planilha.

b) Trace um gráfico idade x expectativa de sobrevida.

c) Aproxime os pontos do gráfico por uma função na forma $S(x) = m \cdot x + b$.

d) Estime a sobrevida de uma pessoa com 52 anos.

3. Uma empresa de produtos eletrônicos está lançando um novo telefone celular e fez uma pesquisa de mercado para descobrir o número potencial de compradores do aparelho em função do preço de cada unidade. O resultado dessa pesquisa é exibido na tabela abaixo.

Preço x (R$/un)	Vendas V (1000 unid)
700	45
750	42
800	37
850	33
900	27
950	21
1000	15

a) Transfira a tabela para uma planilha.

b) Trace um gráfico preço unitário x telefones celulares vendidos.

c) Aproxime os pontos do gráfico por uma função na forma $V(x) = m \cdot x + b$.

d) Determine o número estimado de telefones vendidos se cada aparelho custar R$ 820,00.

4. Em um estudo visando a construção de uma barragem, foram obtidos os dados abaixo, que relacionam a cota do nível d'água (em metros, com relação ao nível do mar) ao volume do reservatório (em milhões de metros cúbicos).

Cota x (m)	Volume V (10^6 m^3)
875	0,051
885	2,900
895	12,62
905	30,58
915	64,21
925	122,6

a) Transfira a tabela para uma planilha.

b) Trace um gráfico cota x volume.

c) Aproxime os pontos do gráfico por $V(x) = ax^2 + bx + c$.

d) Determine o volume aproximado do reservatório quando o nível d'água atinge a cota de 930 m em relação ao nível do mar.

5. Em um local de mantido sob pressão constante, mediu-se o calor específico da água, em cal/(g °C), para valores diferentes de temperatura. Os resultados dessa experiência são apresentados na tabela abaixo.

Temperatura T (°C)	Cal. específico C (cal/(g °C)
0	1,0076
10	1,0015
20	0,9991
30	0,9983
40	0,9983
50	0,9988
60	0,9997
70	1,0009

a) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, trace um gráfico temperatura x calor específico.

b) Encontre o polinômio de ordem 4 que melhor se ajusta aos pontos dados.

c) Determine o coeficiente de determinação associado ao ajuste que você fez.

d) Com base no polinômio obtido, forneça um valor aproximado para o calor específico da água a 25°C.

6. A tabela abaixo fornece o ìndice de Desenvolvimento Humano (IDH) do Brasil, segundo o Progranma das Nações Unidas para o Desenvolvimento.

Ano t (desde 2000)	IDH I
0	0,683
5	0,702
10	0,737
11	0,742
12	0,746
13	0,752
14	0,755

a) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, trace um gráfico ano x IDH.

b) Encontre a função $I(t) = m \cdot t + b$ que melhor se ajusta aos dados.

c) Determine o coeficiente de determinação associado ao ajuste que você fez.

d) Com base no polinômio obtido, estime o IDH brasileiro em 2018.

7. A tabela abaixo fornece o valor do salário mínimo brasileiro no período compreendido entre maio de 2004 e maio de 2016.

Ano t (desde 2004)	Salário S (R$)
0	260,00
1	300,00
2	350,00
3	380,00
4	415,00
5	465,00
6	510,00
7	545,00
8	622,00
9	678,00
10	724,00
11	788,00
12	880,00

a) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, trace um gráfico ano x salário mínimo.

b) Encontre o polinômio de ordem 2 que melhor se ajusta aos pontos dados.

c) Determine o coeficiente de determinação associado ao ajuste que você fez.

d) Com base no polinômio obtido, estime o salário mínimo de 2020.

8. A tabela a seguir mostra as temperaturas médias mensais de Estocolmo, calculadas com base no período compreendido entre 1961 e 1990.

Mês t	Temperatura T (°C)
Jan	−2,8
Fev	−3,0
Mar	0,1
Abr	4,6
Mai	10,7
Jun	15,6
Jul	17,2
Ago	16,2
Set	11,9
Out	7,5
Nov	2,6
Dez	−1,0

a) Associando os meses de janeiro a dezembro aos números $1,2,\ldots,12$, trace um gráfico mês x temperatura

b) Encontre o polinômio de ordem 4 que melhor se ajusta aos pontos dados.

c) Determine o coeficiente de determinação associado ao ajuste que você fez.

9. A tabela a seguir contém a precipitação (de chuva) acumulada mensal em Brasília, segundo o Instituto Nacional de Metereologia.

Mês t	Precipitação P (mm)
Jan	247,4
Fev	217,5
Mar	180,6
Abr	123,8
Mai	38,6
Jun	8,7
Jul	11,1
Ago	13,9
Set	55,2
Out	166,6
Nov	231,1
Dez	246,0

a) Associando os meses de janeiro a dezembro aos números $1, 2, \ldots, 12$, trace um gráfico mês x precipitação

b) Encontre o polinômio de ordem 5 que melhor se ajusta aos pontos dados.

c) Determine o coeficiente de determinação associado ao ajuste que você fez.

10. O índice de vegetação por diferença normalizada (NDVI, na abreviatura em inglês) é um número que indica o vigor da vegetação de uma determinada região da superfície terrestre. A tabela abaixo contém os valores do NDVI obtidos com base nos dados referentes a uma pequena área do município de Jaboticabal, na qual há uma plantação de cana-de-açúcar. Os dados foram captados pelo sensor AVHRR instalado em uma satélite do *National Oceanic and Atmospheric Administration* dos EUA.

Mês t	NDVI N
0,5	0,518769
1,0	0,540239
1,5	0,568995
2,0	0,589468
2,5	0,595483
3,0	0,550770
3,5	0,577311
4,0	0,547884
4,5	0,554079
5,0	0,505137
5,5	0,461094
6,0	0,416425

Mês t	NDVI N
6,5	0,436176
7,0	0,341504
7,5	0,383055
8,0	0,282024
8,5	0,287794
9,0	0,344487
9,5	0,370684
10,0	0,336426
10,5	0,451557
11,0	0,468254
11,5	0,462831
12,0	0,472036

Observe que os dados da tabela se referem a quinzenas, de modo que os valores dos meses aparecem na forma decimal.

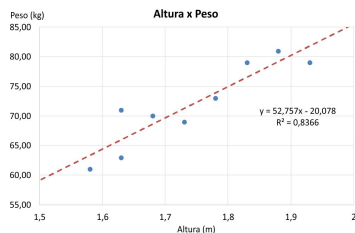
a) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, trace um gráfico mês x NDVI.

b) Encontre o polinômio de ordem 3 que melhor se ajusta aos pontos dados.

c) Determine o coeficiente de determinação associado ao ajuste que você fez.

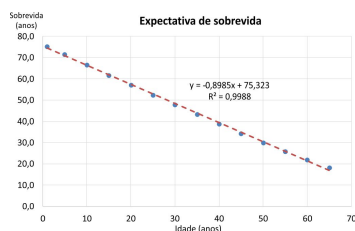
Respostas dos Exercícios 4.7

1. a) ...

b)

c) $P(a) = 52{,}757a - 20{,}078$

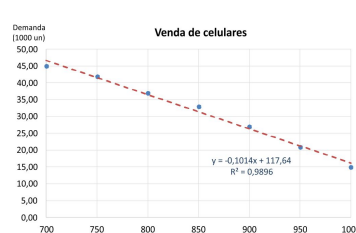
d) 72,2 kg

2. a) ...

b)

c) $S(x) = 75{,}323 - 0{,}8985x$

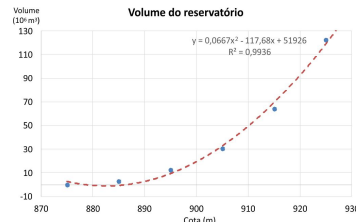
d) 28,6 anos

3. a) ...

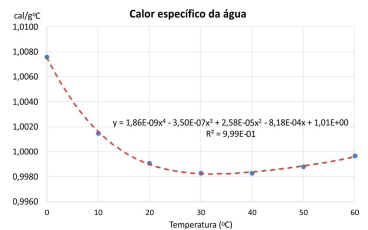
b)

c) $V(x) = 117{,}64 - 0{,}1014x$

d) Cerca de 34,5 mil aparelhos

4. a) ...

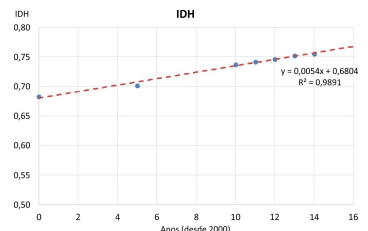
b)

c) $V(x) = 0{,}06666875x^2 - 117{,}6762x + 51926{,}293$

d) $149{,}2 \cdot 10^6$ m^3

5. a)

b) $C(t) = 1{,}86 \cdot 10^{-9}T^4 - 3{,}50 \cdot 10^{-7}T^3 + 2{,}58 \cdot 10^{-5}T^2 - 8{,}18 \cdot 10^{-4}T + 1{,}008$

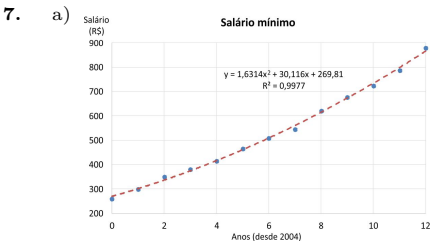
c) $R^2 = 0{,}9992$

d) $C(25°) \approx 0{,}9989$cal/(g°C)

6. a)

b) $I(t) = 0{,}0054t + 0{,}6804$

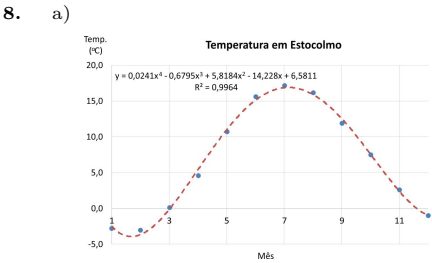
c) $R^2 = 0{,}9891$

d) $I(18) \approx 0{,}778$

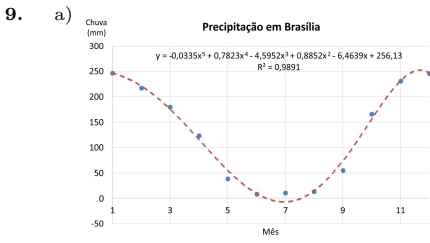
7. a)

b) $S(t) = 1{,}6314t^2 + 30{,}116t + 269{,}81$

c) $R^2 = 0{,}9977$

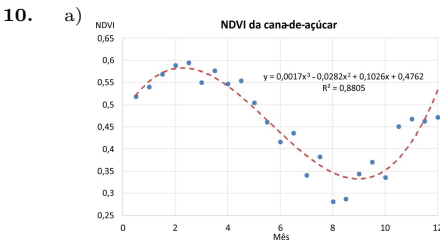
d) $S(16) \approx$ R$ 1169,00

8. a)

b) $T(t) = 0{,}0241t^4 - 0{,}6795t^3 + 5{,}8184t^2 - 14{,}228t + 6{,}5811$

c) $R^2 = 0{,}9964$

9. a)

b) $P(t) = -0{,}0335t^5 + 0{,}7823t^4 - 4{,}5952t^3 + 0{,}8852t^2 - 6{,}4639t + 256{,}13$

c) $R^2 = 0{,}9891$

10. a)

b) $N(t) = 0{,}0017t^3 - 0{,}0282t^2 + 0{,}1026t + 0{,}4762$

c) $R^2 = 0{,}8805$

5 Funções exponenciais e logarítmicas

Antes de ler o capítulo
A leitura desse capítulo exige o domínio de vários tópicos já vistos ao longo do livro, incluindo *potências* (Seção 1.8), *equações* (Seções 2.1 e 2.4), *sistemas* (Seção 2.5), e *funções* (Seções 3.5 a 3.9).

Em muitos problemas aplicados, estudamos fenômenos que apresentam um crescimento ou decrescimento que não pode ser representado por uma função polinomial ou racional. Problemas cuja modelagem exige o emprego de uma função exponencial, o tema central desse capítulo, ocorrem em áreas tão distintas como a economia (cálculo de juros de investimentos e dívidas bancárias), a biologia (determinação da população de bactérias) e química (decaimento de material radioativo).

As funções logarítmicas, por sua vez, desempenham o papel contrário, permitindo-nos, por exemplo, determinar o instante em que uma função exponencial atinge um valor preestabelecido. Para compreender essa relação entre funções exponenciais e logarítmicas, vamos iniciar o capítulo pelo estudo de funções inversas.

5.1 Função inversa

Até o momento, toda vez que quisemos descobrir para que valor de x uma função f valia c, foi preciso resolver uma equação na forma $f(x) = c$. Nessa seção, veremos como obter o mesmo resultado determinando a *função inversa* de f. Para que fique clara para o leitor a relevância desse tema, começaremos apresentando um exemplo.

Exemplo 1. População de uma cidade

Suponha que um geógrafo tenha tenha aproximado a população de uma certa cidade ao longo do tempo pela função

$$p(t) = 12000 + 240t,$$

em que t é o tempo, em anos, transcorrido desde o dia 1 de Janeiro de 2010.

Imagine, agora, que o mesmo geógrafo queira determinar, aproximadamente, quando a população dessa cidade irá atingir 13.000, 15.000 e 20.000 habitantes.

Uma alternativa para o geógrafo seria resolver cada um dos três problemas em separado, usando equações. Por exemplo o instante em que a população atinge 13.000 habitantes é o valor de t que resolve a equação $p(t) = 13000$. Logo,

$$\begin{aligned} 12000 + 240t &= 13000 \\ 240t &= 1000 \\ t &= 1000/240 \approx 4{,}167 \text{ anos.} \end{aligned}$$

Como a contagem dos anos começa em 2010, concluímos que a população da cidade chegou à marca de 13.000 habitantes em $2010 + 4$, ou seja, em 2014.

Para determinar o momento em que a população atingirá 15.000 habitantes, adotamos estratégia semelhante, resolvendo a equação $p(t) = 15000$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} 12000 + 240t &= 15000 \\ 240t &= 3000 \\ t &= 3000/240 = 12{,}5 \text{ anos.} \end{aligned}$$

Logo, a população chegará a esse valor em 2022 $(2010 + 12)$.

Finalmente, para descobrir quando a cidade terá 20.000 habitantes, devemos achar a solução da equação $p(t) = 20.000$. Assim, como nos casos anteriores, temos

$$\begin{aligned} 12000 + 240t &= 20000 \\ 240t &= 8000 \\ t &= 8000/240 \approx 33{,}333 \text{ anos.} \end{aligned}$$

Portanto, a população atingira as 20.000 almas em 2043 $(2010 + 33)$.

Observe que é muito cansativo resolver uma equação para cada tamanho da população, mesmo trabalhando com uma função muito simples. Imagine, então, o que aconteceria se a função $p(t)$ fosse mais complicada.

A dificuldade em resolver esse problema reside no fato de que a função $p(t)$ foi definida para que calculemos o valor de p a partir de um valor dado de t. Entretanto, queremos exatamente o inverso, ou seja, determinar t, uma vez dado o valor de p.

Nosso trabalho seria facilitado se fôssemos capazes de escrever uma nova função $t(p)$, que nos fornecesse diretamente o valor de t a partir de p. Mas será que é possível encontrar tal função?

Não custa tentar. Tomando a expressão de $p(t)$, vamos escrever uma equação simples que relacione p e t:

$$p = 12000 + 240t.$$

Observe que não estamos mais indicando que p é função de t, pois nosso objetivo é obter $t(p)$. Tentemos, agora, isolar t na equação acima.

$$\begin{aligned} 12000 + 240t &= p \\ 240t &= p - 12000 \\ t &= \frac{p - 12000}{240}. \end{aligned}$$

Pronto! Uma vez que t foi isolada, podemos definir a função

$$t(p) = \frac{p - 12000}{240}$$

e, a partir dela, calcular facilmente os instantes em que a população atinge 13.000, 15.000 e 20.000 habitantes.

$$\begin{aligned} t(13000) &= \frac{13000 - 12000}{240} = \frac{1000}{240} \approx 4{,}167. \\ t(15000) &= \frac{15000 - 12000}{240} = \frac{3000}{240} = 12{,}5. \\ t(20000) &= \frac{20000 - 12000}{240} = \frac{8000}{240} \approx 33{,}333. \end{aligned}$$

Observe que esses valores são compatíves com aqueles encontrados acima, resolvendo as equações. Dizemos, nesse caso, que $t(p)$ é a *função inversa* de $p(t)$.

Agora, tente o exercício 6.

A partir do exemplo acima, podemos definir um roteiro simples para a determinação da inversa de uma função.

Roteiro para a obtenção da inversa de uma função

Para encontrar a inversa de uma função f definida na forma

$$f(x) = \text{expressão que depende de } x,$$

1. Troque o termo "$f(x)$" por y, de forma que a equação se torne

$$y = \text{expressão que depende de } x.$$

2. Resolva essa equação com relação a x, ou seja, isole x de modo a obter

$$x = \text{expressão que depende de } y.$$

3. Escreva a nova função na forma

$$g(y) = \text{expressão que depende de } y.$$

Problema 1. Inversa de uma função

Determine a função inversa de $f(x) = x^3 - 1$.

Solução.

Substituindo o termo "$f(x)$" por y, obtemos a equação

$$y = x^3 - 1.$$

Agora, precisamos resolver essa equação com relação a x, ou seja, obter uma equação em que x esteja isolado:

$$\begin{aligned}
y &= x^3 - 1 && \text{Equação original.}\\
y + 1 &= x^3 && \text{Somando 1 a ambos os lados.}\\
(y+1)^{1/3} &= (x^3)^{1/3} && \text{Elevando ambos os lados a 1/3.}\\
\sqrt[3]{y+1} &= x && \text{Simplificando o resultado.}\\
x &= \sqrt[3]{y+1} && \text{Invertendo os termos.}
\end{aligned}$$

Logo, a função inversa é dada por $g(y) = \sqrt[3]{y+1}$.

■ Gráfico da função inversa

Como vimos, a inversa de $f(x) = x^3 - 1$ é $g(y) = \sqrt[3]{y+1}$. Os gráficos dessas duas funções são dados na Figura 5.1.

Repare que, no gráfico de f, o eixo horizontal contém os valores da variável x, e o eixo vertical contém os valores de $y = f(x)$. Por outro lado, no gráfico de g, o eixo horizontal contém os valores de y, enquanto o eixo vertical contém os valores de $x = g(y)$. Essa inversão não é acidental. De fato,

> O gráfico da inversa de $f(x)$ pode ser obtido trocando-se as posições dos eixos x e y, isto é, desenhando-se o eixo-x na vertical e o eixo-y na horizontal. Essa troca é equivalente à reflexão do gráfico em torno da reta $y = x$.

(a) $f(x) = x^3 - 1$ (b) $g(y) = \sqrt[3]{y+1}$

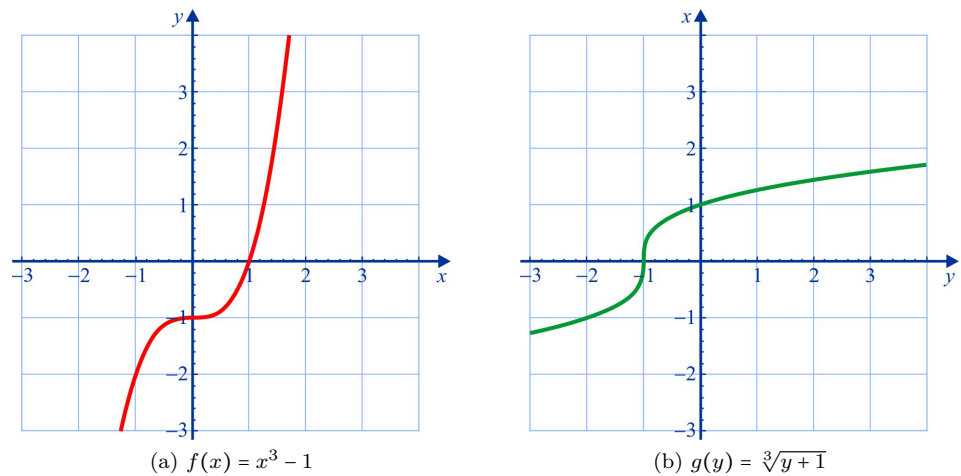



Figura 5.1: Gráficos de $f(x)$ e de sua inversa.

A Figura 5.2 mostra o efeito da reflexão do gráfico de $f(x) = x^3 - 1$ em torno da reta $y = x$, com a consequente obtenção do gráfico de $g(x) = \sqrt[3]{y+1}$. Repare que a reflexão de uma reta horizontal em torno de $y = x$ produz uma reta vertical, e vice-versa, motivo pelo qual essa reflexão é equivalente à troca de posição entre os eixos coordenados.

(a) Reflexão de $f(x)$ em torno da reta $y = x$ (b) $y = f(x)$ e $x = g(y)$

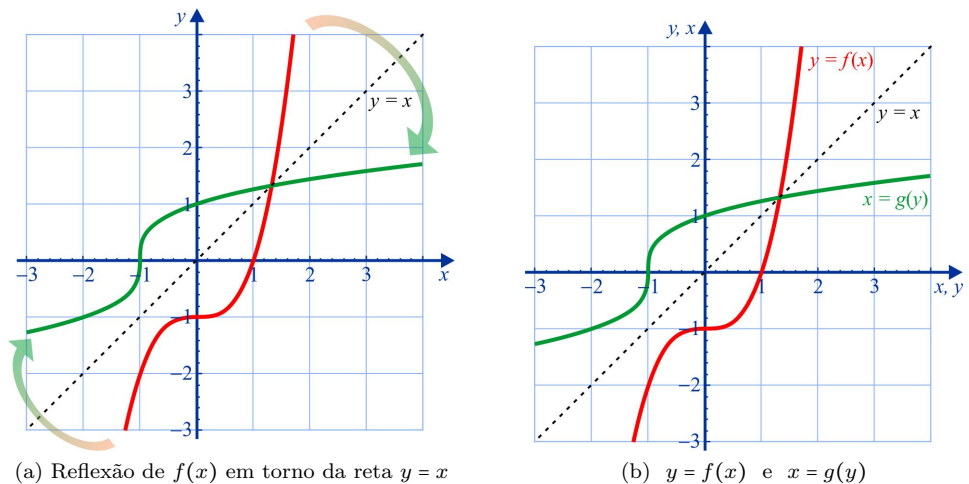



Figura 5.2: Reflexão de $y = f(x)$ em relação à reta $y = x$.

Essa relação entre a inversão de uma função e a troca de posição dos eixos x e y é essencial para o estabelecimento de condições de existência da função inversa, como veremos na próxima seção.

■ Funções injetoras

O Exemplo 1 mostrou como encontrar a inversa de uma função afim na forma $f(x) = mx + b$, com $m \neq 0$. Entretanto, nem toda função possui inversa, como ocorre com $f(x) = c$, em que c é uma constante real. Além disso, há muitos casos em que a inversa só pode ser definida quando restringimos o domínio de f. Para discutirmos as condições necessárias para que uma função tenha inversa, devemos analisar sob que circunstâncias uma equação define uma função.

Segundo o roteiro apresentado acima, a obtenção da inversa inclui a transformação de uma equação do tipo

$$y = \text{expressão que depende de } x.$$

em outra equação na forma

$$x = \text{expressão que depende de } y.$$

Como vimos no Capítulo 3, para que essa última equação defina uma função, é necessário que seu gráfico no plano Cartesiano satisfaça o *teste da reta vertical*, o que significa que nenhuma reta vertical pode interceptar o gráfico da equação em mais de um ponto.

Suponha, por exemplo, que queiramos inverter a função $f(x) = x^2$. Nesse caso, o procedimento padrão consiste em fazer

$$y = x^2 \qquad \text{Equação na forma } y = f(x).$$

$$\pm\sqrt{y} = x \qquad \text{Eliminando a raiz quadrada.}$$

$$x = \pm\sqrt{y} \qquad \text{Invertendo os termos.}$$

Figura 5.3: $x = \pm\sqrt{y}$ não representa uma função.

Veja que, apesar de termos obtido uma equação na forma

$$x = \text{expressão que depende de } y,$$

ela não define uma função de y, já que, para $y = 2$, por exemplo, temos dois valores distintos de x, que são

$$x = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad x = -\sqrt{2}.$$

De fato, como mostra a Figura 5.3 – na qual os eixos x e y estão trocados – é fácil encontrar uma reta vertical que cruza o gráfico da equação $x = \pm\sqrt{y}$ em dois pontos, o que indica que a curva não corresponde ao gráfico de uma função.

Figura 5.4: Curva que não representa o gráfico de uma função inversível.

Entretanto, não é muito prático analisar se $f(x) = x^2$ possui inversa traçando o gráfico de $x = \pm\sqrt{y}$ e verificando se a curva assim obtida satisfaz o teste da reta vertical. Seria mais conveniente se pudéssemos chegar à mesma conclusão observando diretamente o gráfico de f. Felizmente, isso não é difícil, como ficará claro a seguir.

Já vimos que a curva verde da Figura 5.3, que representa a equação $x = \pm\sqrt{y}$, pode ser obtida trocando-se de lugar os eixos x e y da Figura 5.4, que mostra em vermelho o gráfico de $f(x) = x^2$. Adotando o mesmo procedimento, podemos converter a reta vertical mostrada na Figura 5.3 na reta horizontal apresentada na Figura 5.4.

Constatamos, então, que a função f não terá inversa se o seu gráfico (Figura 5.4) puder ser cortado mais de uma vez por uma reta horizontal, pois isso fará com que a curva resultante da troca de posição dos eixos (Figura 5.3) deixe de satisfazer o teste da reta vertical. Esse resultado está resumido no quadro abaixo.

Teste da reta horizontal

Uma função tem inversa em um domínio D se e somente se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico mais de uma vez.

Recorramos a um exemplo para ilustrar a utilidade desse novo teste.

Problema 2. Teste da reta horizontal

Seja dada a função f cujo gráfico é apresentado na Figura 5.5. Determine se f tem inversa.

Figura 5.5: Gráfico da função do Problema 2.

Solução.

Como vemos na Figura 5.6a, a função não tem inversa, pois encontramos uma reta horizontal que cruza seu gráfico em mais de um ponto (três, nesse caso).

De fato, trocando de lugar os eixos x e y, obtemos a curva verde da Figura 5.6b, que viola o teste da reta vertical. Dessa forma, a equação representada por essa curva não corresponde a uma função, o que implica que f não tem inversa.

(a) Pontos com o mesmo valor de f

(b) Gráfico com os eixos trocados

Figura 5.6: Exemplo em que a função não satisfaz o teste da reta horizontal.

Uma função cujo gráfico satisfaz o teste da reta horizontal é denominada *injetora*.

Função injetora

Uma função f, definida em um domínio D, é **injetora** quando, dados quaisquer valores reais x_1, $x_2 \in D$,

$$\text{se} \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{então} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

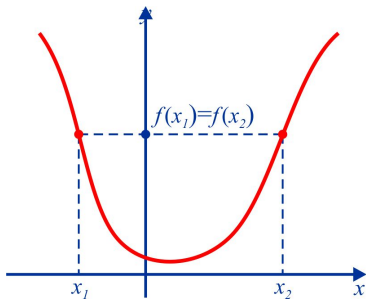



Figura 5.7: Gráfico de uma função que não é injetora.

A função mostrada na Figura 5.7 não é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2)$, embora $x_1 \neq x_2$. Note que o gráfico viola o teste da reta horizontal.

Exemplo 2. Determinando se uma função é injetora

Uma maneira prática de determinar algebricamente se uma função é injetora consiste verificar se é possível invertê-la. Essa estratégia, que foi usada acima para a função $f(x) = x^2$, é útil quando é fácil isolar x na equação $y = f(x)$.

Tomemos como exemplo a função

$$f(x) = \frac{3}{5x-2},$$

cujo domínio é $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \frac{2}{5}\}$. Seguindo o roteiro proposto para a inversão de funções, podemos escrever

$$y = \frac{3}{5x-2} \qquad \text{Equação na forma } y = f(x).$$

$$y(5x-2) = 3 \qquad \text{Multiplicando os dois lados por } (5x-2).$$

$$5x-2 = \frac{3}{y} \qquad \text{Dividindo os dois lados por } y.$$

$$5x = \frac{3}{y} + 2 \qquad \text{Somando 2 a ambos os lados.}$$

$$x = \frac{3}{5y} + \frac{2}{5} \qquad \text{Dividindo os dois lados por 5.}$$

Como, nesse caso, para cada valor de y (salvo $y = 0$) temos um único valor de x, a função possui uma inversa g, que é dada por

$$g(y) = \frac{3}{5y} + \frac{2}{5}.$$

O domínio de g é $D_g = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \neq 0\}$.

Agora, tente o exercício 1.

Exemplo 3. Determinando se uma função é injetora

A estratégia apresentada no exemplo anterior pode não ser útil quando a expressão de f inclui vários termos que envolvem a variável x, como ocorre com

$$f(x) = x^2 + x - 2,$$

cujo domínio é o conjunto de todos os números reais. Para verificar se uma função desse tipo é injetora, devemos usar uma estratégia um pouco mais complicada.

Sabemos que f não será injetora se existirem valores x_1 e x_2 pertencentes ao seu domínio, com $x_1 \neq x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, se

$$x_1^2 + x_1 - 2 = x_2^2 + x_2 - 2$$

para $x_1 \neq x_2$. Como não podemos testar todos os valores admissíveis para x_1 e x_2, usaremos um truque para descobrir em que casos a equação acima é satisfeita.

Suponhamos que

$$x_2 = x1 + c,$$

em que c é um número real diferente de zero. Nesse caso, substituindo x_2 na equação, obtemos

$$x_1^2 + x_1 - 2 = (x_1 + c)^2 + (x_1 + c) - 2.$$

Se a equação for válida para algum c diferente de zero, então a função não será injetora. Vejamos se isso acontece.

$x_1^2 + x_1 - 2 = (x_1 + c)^2 + (x_1 + c) - 2$	Equação original.
$x_1^2 + x_1 - 2 = x_1^2 + 2x_1c + c^2 + x_1 + c - 2$	Expandindo o lado direito.
$-2x_1c - c^2 - c = 0$	Passando os termos para o lado esquerdo.
$c(-2x_1 - c - 1) = 0$	Pondo c em evidência.

Deduzimos, portanto, que a equação é válida se

$$c = 0 \qquad \text{ou} \qquad -2x_1 - c - 1 = 0.$$

Naturalmente, desprezamos a solução $c = 0$, pois isso faz com que $x_1 = x_2$, o que não nos interessa. Assim, restringimos a nossa análise ao caso em que $-2x_1 - c - 1 = 0$, o que nos leva a

$$-2x_1 - c - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -2x_1 - 1.$$

Na verdade, se $c = 0$ fosse a única solução da equação, então a função seria injetora, pois só teríamos $f(x_1) = f(x_2)$ quando $x_1 = x_2$.

Observando, então, que x_1 pode ser qualquer número real (ou seja, qualquer elemento do domínio de f), concluímos que há infinitos valores diferentes de zero para c que fazem com que a equação $f(x_1) = f(x_2)$ seja válida. Assim, a função não é injetora.

De fato, lembrando que $x_2 = x_1 + c$, concluímos que $f(x_2) = f(x_1)$ para todo x_2 dado por

$$x_2 = x_1 + (-2x_1 - 1) = -x_1 - 1.$$

Conferindo a resposta

$$f(4) = 4^2 + 4 - 2 = 16 + 4 - 2 = 18,$$

$$f(-5) = (-5)^2 + (-5) - 2 = 25 - 5 - 2 = 18.$$

Escolhendo, por exemplo, $x_1 = 4$, e usando a fórmula acima para obter x_2, ou seja, tomando

$$x_2 = -x_1 - 1 = -4 - 1 = -5,$$

deduzimos que $f(4) = f(-5)$, de modo que f não é injetora.

Exemplo 4. Determinando se uma função é injetora

Tentemos aplicar a estratégia que envolve escrever $x_2 = x_1 + c$ para determinar, mais uma vez, se a função do Exemplo 2 é injetora. Como o leitor deve se lembrar, a função em questão era

$$f(x) = \frac{3}{5x - 2},$$

que estava definida em $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2}{5}\}$. Igualando, então $f(x_1)$ a $f(x_2)$, obtemos

$$\frac{3}{5x_1 - 2} = \frac{3}{5x_2 - 2}.$$

Substituindo, agora, x_2 por $x_1 + c$, escrevemos

$$\frac{3}{5x_1 - 2} = \frac{3}{5(x_1 + c) - 2} \quad \text{Equação } f(x_1) = f(x_2).$$

$$3[5(x_1 + c) - 2] = 3(5x_1 - 2) \quad \text{Efetuando o produto cruzado.}$$

$$15x_1 + 15c - 6 = 15x_1 - 6 \quad \text{Expandindo os termos.}$$

$$15c = 0 \quad \text{Movendo os termos para o lado esquerdo.}$$

Nesse exemplo, chegamos à conclusão que $c = 0$, de modo que a única forma de obter $f(x_1) = f(x_2)$ consiste em fazer

$$x_2 = x_1 + c \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1.$$

Logo, $f(x)$ é injetora.

O Exemplo 4 ilustra uma propriedade bastante importante, que pode ser deduzida facilmente da definição de função injetora. Essa propriedade será útil na resolução de equações exponenciais e logarítmicas.

Propriedade das funções injetoras

Se f é uma função injetora, então

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{se e somente se} \quad x_1 = x_2.$$

■ Definição de função inversa

Já vimos como obter a inversa de uma função f, e já percebemos que f deve ser injetora para que possua inversa. É chegada, então, a hora de reunirmos esses conceitos em uma definição mais formal.

Função inversa

Seja f uma função injetora em um domínio A, com conjunto imagem B. A inversa de f, representada por f^{-1}, é a função com domínio B e conjunto imagem A definida por

$$f^{-1}(y) = x \qquad \text{se e somente se} \qquad y = f(x).$$

Além de definir uma nova notação para a inversa, f^{-1}, e de estabelecer a relação entre $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$, essa definição permite que restrinjamos a nossa análise a um conjunto A, que não precisa ser todo o domínio da função.

Assim, escolhendo um conjunto A no qual f seja injetora, é ser possível determinar a inversa f^{-1}, como mostra o exemplo a seguir.

Problema 3. Determinação da função inversa

Verifique se a função $f(x) = x^2$ é injetora no domínio $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$. Em caso afirmativo, determine a inversa de f.

Solução.

Para resolver esse problema, vamos tentar inverter f no domínio especificado. Se tivermos sucesso, descobriremos, ao mesmo tempo, se a função é injetora e qual é a sua inversa.

$$\begin{aligned} y &= x^2 && \text{Equação na forma } y = f(x). \\ \pm\sqrt{y} &= x && \text{Eliminando a raiz quadrada.} \\ x &= \pm\sqrt{y} && \text{Invertendo os termos.} \\ x &= \sqrt{y} && \text{Desprezando os valores fora do domínio.} \end{aligned}$$

Observe que, apesar de termos obtido $x = \pm\sqrt{y}$, pudemos desprezar os valores negativos de x, uma vez que, no domínio considerado, temos $x \geq 0$. Sendo assim, só há um valor de x para cada y, e a função é injetora. Além disso,

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

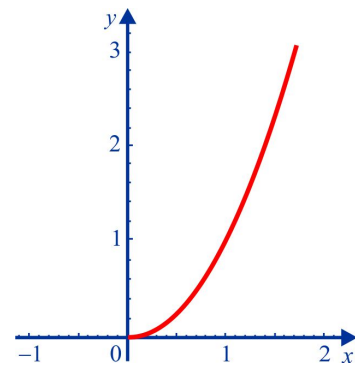
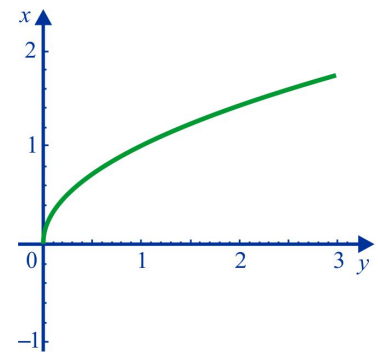
A Figura 5.8 mostra os gráficos de $f(x)$ e de sua inversa.

(a) Gráfico de $f(x)$ no domínio $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

(b) Gráfico de $f^{-1}(y)$ no domínio $D_{inv} = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\}$

Figura 5.8: Gráficos de $f(x)$ e de $f^{-1}(y)$ em seus respectivos domínios.

Problema 4. Determinação da função inversa

Determine a inversa da função abaixo. Defina o domínio de f e de f^{-1}.

$$f(x) = \frac{2-5x}{8x-3}.$$

Solução.

A função f só não está definida para os valores de x que fazem com que o denominador seja igual a zero. Assim, temos

$$3-8x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -8x \neq -3 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{-3}{-8} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{3}{8},$$

o que nos permite concluir que o domínio da função é

$$D(f) = \left\{ x \;\middle|\; x \neq \frac{3}{8} \right\}.$$

Tentemos, agora, encontrar a inversa de f seguindo o roteiro estabelecido no início dessa seção:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2-5x}{8x-3} && \text{Equação na forma } y = f(x).\\
(8x-3)y &= 2-5x && \text{Multiplicando os dois lados por } 8x-3.\\
8xy-3y &= 2-5x && \text{Aplicando a propriedade distributiva.}\\
8xy+5x &= 2+3y && \text{Isolando do lado esquerdo os termos com } x.\\
x(8y+5) &= 2+3y && \text{Pondo } x \text{ em evidência.}\\
x &= \frac{2+3y}{8y+5} && \text{Dividindo os dois lados por } 8y+5.
\end{aligned}$$

Observando essa última equação, é fácil perceber que há apenas um valor de x para cada valor de y. Desse modo, f possui inversa, que é definida por

$$f^{-1}(y) = \frac{2+3y}{8y+5}.$$

Além disso, como o denominador dessa função não pode ser igual a zero, temos

$$8y+5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 8y \neq -5 \quad \Rightarrow \quad y \neq -\frac{5}{8}.$$

Assim, o domínio de f^{-1} é

$$D(f^{-1}) = \left\{ y \;\middle|\; y \neq -\frac{5}{8} \right\}.$$

Agora, tente o exercício 2.

■ Inversa da função inversa

No exemplo 1, vimos que a inversa de $p(t) = 12000 + 240t$ era

$$t(p) = \frac{p-12000}{240}.$$

Tentemos, agora, determinar a inversa dessa última função, o que envolve isolar p na equação acima:

$$t = \frac{p - 12000}{240} \qquad \text{Equação associada à função } t(p).$$

$$240t = p - 12000 \qquad \text{Multiplicando ambos os lados por 240.}$$

$$240t + 12000 = p \qquad \text{Somando 12000 aos dois lados.}$$

$$p = 12000 + 240t \qquad \text{Invertendo os termos.}$$

Dessa última equação, concluímos que a inversa de $t(p)$ é

$$p(t) = 12000 + 240t.$$

Observe que essa era a nossa função original, da qual $t(p)$ era a inversa. Logo, a inversa da inversa da função definida por $p(t)$ é a própria função p. Esse resultado está resumido no quadro a seguir.

Propriedade da função inversa

Seja f uma função injetora em um domínio A, com conjunto imagem B. Nesse caso,

$$f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \text{para todo } y \text{ em } B;$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \text{ em } A.$$

Esse resultado, que parece complicado, indica apenas que f^{-1} é a inversa de f, e f é a inversa de f^{-1}. Embora ele não pareça útil no momento, iremos utilizá-lo bastante nesse capítulo, no qual trataremos das funções exponencial e logarítmica. Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, a propriedade acima nos diz que a função exponencial também é a inversa da função logarítmica.

Exercícios 5.1

1. Determine se as funções são injetoras.

a) $f(x) = 4 - 2x$
b) $f(x) = \sqrt{x}$
c) $f(x) = 1 - x^2$
d) $f(x) = 1/x$

2. Dadas as funções abaixo, determine a função inversa, bem como os domínios de f e de f^{-1}.

a) $f(x) = 3x - 2.$
b) $f(x) = \sqrt{9 - x}$
c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x + 4}$
e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para $x > 0$
f) $f(x) = \frac{x-5}{3}$
g) $f(x) = \frac{5}{x+1}$
h) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
i) $f(x) = 1 + x^2$, para $x \geq 0$
j) $f(x) = \sqrt{4 - 25x}$
k) $f(x) = \frac{4x+7}{5x-12}$
l) $f(x) = \frac{3x-4}{6-2x}$
m) $f(x) = \frac{400-25x}{80-2x}$

3. Uma loja de automóveis criou uma promoção, válida apenas nessa semana. Todos os carros da loja estão com 10% de desconto sobre o preço de tabela do fabricante. Além disso, depois de calculado o desconto, o cliente ainda tem uma redução de R$ 900,00 sobre o preço do carro.

a) Escreva uma função $P(x)$ que forneça o valor que o cliente pagará pelo carro, nessa semana, em relação ao preço de tabela, x.
b) Determine a função inversa de P e indique o que essa função representa.
c) Se você tem exatamente R$ 27.000,00, determine o preço de tabela do carro mais caro que você consegue comprar à vista.
d) Esboce o gráfico da função inversa de P.

4. Uma piscina com 10 m de comprimento, 5 m de largura e 2 m de profundidade contém apenas 10 m^3 de água. Uma bomba com vazão de 2,5 m^3/h é usada para encher a piscina.

a) Escreva a função $v(h)$ que fornece o volume da piscina (em m^3), em relação à altura do nível d'água (em m). Lembre-se que o volume de um prisma retangular reto com dimensões x, y e z é dado por xyz.
b) Escreva a inversa da função do item acima, ou seja, a função $h(v)$ que fornece a altura do nível d'água (em m) em relação ao volume de água da piscina, v (em m^3).

c) Escreva a função $v(t)$ que fornece o volume da piscina em relação ao tempo, em horas, contado a partir do momento em que a bomba é ligada.

d) Escreva a função $h(t)$ que fornece o nível d'água da piscina em relação ao tempo.

e) Determine o instante em que a piscina estará suficientemente cheia, o que ocorrerá quando seu nível d'água atingir 1,8 m.

5. Para converter uma temperatura dada em graus Fahrenheit (F) para graus Celsius (C), usamos a fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

a) Escreva uma função $F(C)$ que converta para Fahrenheit, uma temperatura C em graus Celsius.

b) Trace o gráfico de $C(F)$ para F entre -50 e 250. No mesmo plano coordenado, trace o gráfico de $F(C)$ para C entre -50 e 120.

c) Determine em que temperatura a medida em Celsius e Fahrenheit é a mesma. (Dica: determine o valor C tal que $F(C) = C$.) Mostre esse ponto no gráfico de $F(C)$.

6. Como empregado de uma loja de roupas, você ganha R$ 50,00 por dia, além de uma comissão de cinco centavos para cada real que consegue vender. Assim, seu rendimento diário é dado pela função $f(x) = 50 + 0{,}05x$.

a) Determine a inversa de f e descreva o que a inversa representa.

b) Determine quantos reais você deve vender em um único dia para receber R$ 80,00 de remuneração pelo trabalho desse dia.

7. A numeração dos sapatos varia de acordo com o país. Para converter o número de um sapato feminino brasileiro para a numeração americana, podemos usar a função $a(b) = 0{,}733b - 19$, em que b é a medida no Brasil.

a) Determine a função inversa de a.

b) Usando a inversa, determine o número, no sistema brasileiro, do sapato de uma senhora americana que calça 6 e $\frac{1}{2}$ em seu país de origem.

c) Esboce o gráfico da inversa de a.

8. Comprei uma árvore frutífera com 1,5 m de altura. Sabendo que a árvore cresce 60 cm por ano,

a) Escreva uma função $A(t)$ que forneça a altura da árvore em relação ao número de anos (t) decorridos desde sua compra.

b) Determine a inversa de $A(t)$ e indique o que essa inversa representa.

c) Trace o gráfico da inversa.

d) Usando a inversa, determine o tempo necessário para que a árvore alcance 12 m.

9. Dada a tabela abaixo, esboce o gráfico da inversa de f(x).

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1,5	4	6,5	9	11,5

10. Para cada função abaixo, restrinja o domínio de modo que a função seja injetora. Determine, então, a inversa da função para o domínio escolhido.

a) $f(x) = (x - 2)^2$. b) $f(x) = |x|$.

11. Use a propriedade das funções inversas para mostrar que g é a inversa de f e vice-versa.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{5}$ e $g(y) = \frac{5y+1}{3}$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(y) = y^3$.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(y) = \frac{1}{y}$.

d) $f(x) = 2 - x^5$ e $g(y) = \sqrt[5]{2-y}$.

12. Pelo aluguel de um determinado modelo de carro, uma locadora de automóveis cobra R$ 50,00 por dia, além de R$ 0,50 por quilômetro rodado.

a) Escreva a função $C(x)$ que fornece o custo diário do aluguel para quem pretende percorrer x km em um dia.

b) Determine a função inversa de C. O que essa função representa?

c) Usando a função inversa, determine quantos quilômetros é possível rodar em um mesmo dia com R$ 175,00 e com R$ 350,00.

13. Uma loja possui um programa de recompensa para clientes fiéis. A cada real gasto em compras, o cliente ganha 10 pontos do programa de fidelidade. Depois de juntar muitos pontos, é possível trocá-los por mercadorias da própria loja. Suponha que Marta já tenha 2000 pontos.

a) Escreva uma função $B(x)$ que forneça o número de pontos de Marta, em relação ao valor x, que corresponde a seu gasto na loja a partir de hoje.

b) Determine a função inversa de $B(x)$. indique o que essa função representa.

c) Determine quanto Marta ainda precisa gastar na loja para poder levar uma calça que vale 10000 pontos.

14. Quando uma fábrica produz x unidades de um carrinho metálico, o custo médio por unidade é dado pela função $c(x) = \frac{1500+12x}{x}$.

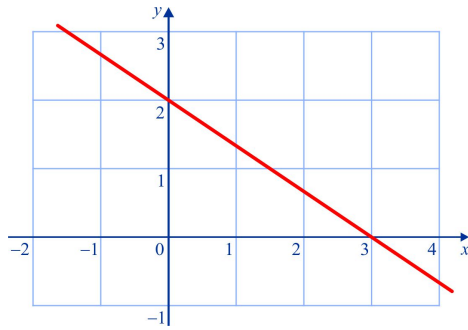
a) Determine a função inversa de c e indique seu domínio.

b) Usando a inversa, determine quantas unidades do carrinho devem ser produzidas para que o custo por unidade seja igual a R$ 15,00.

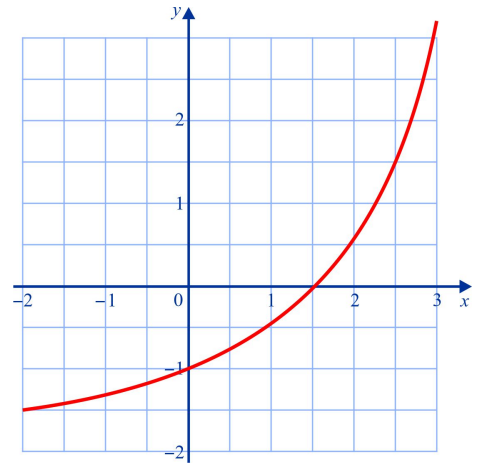
15. Quando está a uma altura h (em km) acima do solo, um vigia consegue enxergar pessoas a uma distância de $d(h) = 112{,}88\sqrt{h}$ km.

a) Determine a função inversa de d e indique seu domínio.

b) Usando a inversa, determine que altura deve ter a torre de observação de um forte, para que seu vigia enxergue pessoas a 10 km de distância.

16. A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.

a) Determine a expressão de $f(x)$.

b) Determine a inversa de f.

17. A figura abaixo mostra o gráfico de f. Sobre o mesmo sistema de eixos Cartesianos, trace o gráfico de f^{-1}.

Respostas dos Exercícios 5.1

1. a) V b) V c) F d) V

2.
a) $f^{-1}(y) = \frac{2+y}{3}$
$D(f) = \mathbb{R}$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

b) $f^{-1}(y) = 9 - y^2$
$D(f) = \{x \,|\, x \leq 9\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \geq 0\}$

c) $f^{-1}(y) = y^2 - 1$
$D(f) = \{x \,|\, x \geq -1\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \geq 0\}$

d) $f^{-1}(y) = y^3 - 4$
$D(f) = \mathbb{R}$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

e) $f^{-1}(y) = 1/\sqrt{y}$
$D(f) = \{x \,|\, x > 0\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y > 0\}$

f) $f^{-1}(y) = 5 + 3y$ $D(f) = \mathbb{R}$
$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

g) $f^{-1}(y) = \frac{5-y}{y}$
$D(f) = \{x \,|\, x \neq -1\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \neq 0\}$

h) $f^{-1}(y) = \frac{1+2y}{y-1}$
$D(f) = \{x \,|\, x \neq 2\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \neq 1\}$

i) $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$
$D(f) = \{x \,|\, x \geq 0\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \geq 1\}$

j) $f^{-1}(y) = \frac{4-y^2}{25}$
$D(f) = \{x \,|\, x \leq \frac{4}{25}\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \geq 0\}\}$

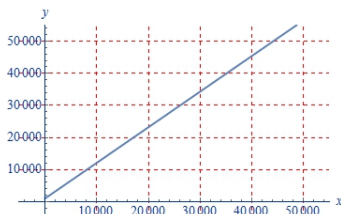
k) $f^{-1}(y) = \frac{7+12y}{5y-4}$
$D(f) = \{x \,|\, x \neq \frac{12}{5}\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \neq \frac{4}{5}\}\}$

l) $f^{-1}(y) = \frac{4+6y}{2y+3}$
$D(f) = \{x \,|\, x \neq 3\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \neq -\frac{3}{2}\}\}$

m) $f^{-1}(y) = \frac{80y-400}{2y-25}$
$D(f) = \{x \,|\, x \neq 40\}$
$D(f^{-1}) = \{y \,|\, y \neq \frac{25}{2}\}$

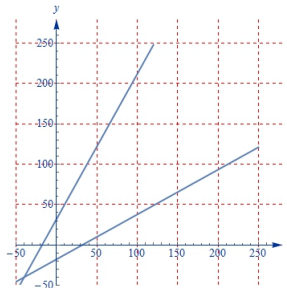
3.
a) $P(x) = 0{,}9x - 900$

b) $P^{-1}(y) = \frac{y+900}{0.9}$. A inversa fornece o custo original do carro que se pode comprar, nessa semana, com y reais.

c)

d) R$ 31.000,00.

4.
a) $v(h) = 50h$
b) $h(v) = v/50$
c) $v(t) = 10 + 2{,}5t$
d) $h(t) = \frac{10+2{,}5t}{50}$
e) 32 horas

5.
a) $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$

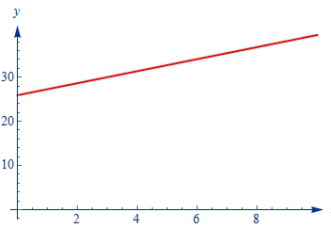
b)

c) $-40°C = -40°F$

6.
a) $f^{-1}(y) = 20y - 1000$. Essa função fornece o quanto você deve vender por dia (em reais) para que seu rendimento diário seja igual a y.

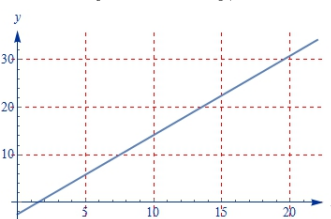
b) R$ 600,00

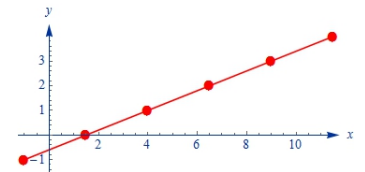
7.
a) $b(a) = (a + 19)/0{,}733$

b) 35

c)

8.
a) $A(t) = 1{,}5 + 0{,}6t$

b) $A^{-1}(y) = 1{,}667y - 2{,}5$ A inversa fornece o tempo necessário para que a árvore atinja um altura y, em metros.

c)

d) 17,5 anos

9.

10.
a) $D(f) = \{x \,|\, x \geq 2\}$; $f^{-1}(y) = \sqrt{y} + 2$

b) $D(f) = \{x \,|\, x \geq 0\}$; $f^{-1}(y) = y$

11. ...

12.
a) $C(x) = 50 + 0{,}5x$

b) $C^{-1}(y) = 2y - 100$. Essa função fornece a distância que se pode percorrer, por dia, com y reais.

c) $C^{-1}(175) = 250$; $C^{-1}(300) = 500$

13.
a) $B(x) = 2000 + 10x$

b) $B^{-1}(y) = \frac{y}{10} - 200$. A função fornece o quanto Marta deve gastar na loja para conseguir y pontos do programa de fidelidade.

c) $B^{-1}(10000) = 800$ reais

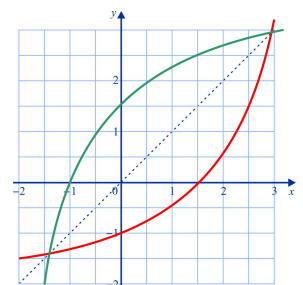
14.
a) $c^{-1}(y) = \frac{1500}{y-12}$ $D(c^{-1}) = \{y \,|\, y \neq 12\}$

b) 500 carrinhos

15.
a) $d^{-1}(y) = 0{,}0000785y^2$
$D(d^{-1}) = \{y \,|\, y \geq 0\}$

b) 0,00785 km, ou 7,85 m

16. a) $f(x) = 2 - \frac{2x}{3}$ b) $f^{-1}(y) = 3 - \frac{3y}{2}$

17. O gráfico de f^{-1} aparece em verde na figura abaixo.

5.2 Função exponencial

Seguindo o padrão adotado nesse capítulo, vamos iniciar a seção sobre funções exponenciais apresentando um exemplo aplicado.

Exemplo 1. Dívida bancária

Suponhamos que Heloísa tenha contraído um empréstimo de R$ 1.000,00 com um banco que cobra 6% de juros ao mês. Enquanto Heloísa não saldar sua dívida, ela irá crescer mês a mês, conforme indicado abaixo.

Dívida após um mês (contado a partir da data do empréstimo).

$$
\begin{aligned}
1000 + 1000 \times \tfrac{6}{100} &= 1000 + 1000 \times 0{,}06 && \text{6\% de 1000 é o mesmo que } 0{,}06 \times 1000.\\
&= 1000(1 + 0{,}06) && \text{Pondo 1000 em evidência.}\\
&= 1000 \times 1{,}06 && \text{Efetuando a soma entre parênteses.}\\
&= 1060 && \text{Simplificando o resultado.}
\end{aligned}
$$

A partir da sequência de passos acima, concluímos que aumentar a dívida em 6% é o mesmo que multiplicá-la por 1,06, de modo que, ao final de um mês, Heloísa já devia R$ 1.060,00.

Dívida após 2, 3 e 4 meses.

Como, a cada mês, a taxa de juros incide sobre todo o valor devido, e não apenas sobre os 1000 reais iniciais, temos

- Dívida após dois meses: $1060 \times 1{,}06 = 1123{,}60$.
- Dívida após três meses: $1123{,}60 \times 1{,}06 = 1191{,}016$ ($\approx$ R$ 1.191,02).
- Dívida após quatro meses: $1191{,}016 \times 1{,}06 = 1262{,}47696$ ($\approx$ R$ 1.262,48).

Observe que a dívida em um determinado mês é igual ao produto da divida do mês anterior por 1,06. Escrevendo essa dívida em relação ao valor original do empréstimo (R$ 1000,00), obtemos:

- Dívida após um mês:
$$\underbrace{1000}_{\text{Empréstimo}} \times \underbrace{1{,}06}_{\text{Juros.}}$$
- Dívida após dois meses:
$$\underbrace{1000 \times 1{,}06}_{\text{Dívida após 1 mês}} \times \underbrace{1{,}06}_{\text{Juros}} = 1000 \times 1{,}06^2.$$
- Dívida após três meses:
$$\underbrace{1000 \times 1{,}06^2}_{\text{Dívida após 2 meses}} \times \underbrace{1{,}06}_{\text{Juros}} = 1000 \times 1{,}06^3.$$
- Dívida após quatro meses:
$$\underbrace{1000 \times 1{,}06^3}_{\text{Dívida após 3 meses}} \times \underbrace{1{,}06}_{\text{Juros}} = 1000 \times 1{,}06^4.$$

Dívida após x meses.

Repare que, para calcular a dívida após 1, 2, 3 ou 4 meses, multiplicamos o valor do empréstimo (1000) por 1,06 elevado ao número de meses. Supondo, então, que Heloísa não salde nem mesmo parcialmente sua dívida, podemos estender o raciocínio acima e calcular o montante devido após x meses, em que x é um número inteiro positivo:

$$\text{Dívida após } x \text{ meses:} 1000 \times 1{,}06^x.$$

De posse dessa fórmula e de uma calculadora, somos capazes de determinar a dívida de Heloísa após 1 e 2 anos sem precisar fazer as contas mês a mês:

- Dívida após 12 meses (um ano): $1000 \times 1{,}06^{12} \approx$ R\$ 2012,20.
- Dívida após 24 meses (dois anos): $1000 \times 1{,}06^{24} \approx$ R\$ 4048,93.

Agora, tente o exercício 3.

O exemplo acima mostra que, em certas aplicações matemáticas, é preciso usar uma função na forma

$$f(x) = a^x,$$

em que a é uma constante real, e a variável x aparece no expoente.

Embora tenhamos empregado $1{,}06^x$, com x inteiro, no cálculo dos juros de Heloísa, podemos definir uma função mais geral, na qual x pode assumir qualquer valor real.

Função exponencial

A **função exponencial** com base a é definida por

$$f(x) = a^x.$$

em que $a > 0$, $a \neq 1$ e x é qualquer número real.

Observe que

- exigimos que a constante a fosse positiva, para garantir que a função estivesse definida para todo x real (lembre-se de que, por exemplo, $\sqrt{a} = a^{1/2}$ não está definida para a negativo);
- excluímos $a = 1$, pois $1^x = 1$ para todo x real, de modo que $f(x) = 1^x$ é uma função constante.

Uma ressalva que precisa ser feita sobre a função exponencial diz respeito às potências com expoentes irracionais. Embora tenhamos considerado apenas expoentes racionais ao definirmos potências no Capítulo 1, é possível estender esse conceito para o caso em que o expoente é qualquer número real, bastando para isso que aproximemos um expoente irracional por um número racional.

Como exemplo, vamos calcular valores aproximados da potência $2^{\sqrt{3}}$ usando aproximações decimais diferentes para $\sqrt{3} \approx 1{,}7320508075688772935$:

$$2^{1,7321} \approx 3{,}32211035953 \qquad 2^{1,7320508} \approx 3{,}32199706806$$
$$2^{1,73205} \approx 3{,}32199522595 \qquad 2^{1,73205081} \approx 3{,}32199709108$$
$$2^{1,732051} \approx 3{,}32199752858 \qquad 2^{1,732050808} \approx 3{,}32199708648$$

Na lista acima, os algarismos corretos são mostrados em vermelho. Note que, quanto mais algarismos empregamos na aproximação de $\sqrt{3}$, mais próximo chegamos do valor real de $2^{\sqrt{3}}$.

Problema 1. Cálculo da função exponencial

Para cada uma das funções abaixo, obtenha $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{3}{4})$ e $f(\sqrt{3})$.

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ c) $f(x) = 0{,}3^x$

Solução.

Usando uma calculadora científica, é fácil obter os valores pedidos no enunciado. As teclas usadas para calcular a função $f(x) = 3^x$ em cada ponto são dadas abaixo.

Valor	Teclas da calculadora	Resultado
$f(-1) = 3^{-1}$	[3] [y^x] [(−)] [1] [=]	0,33333
$f(0) = 3^0$	[3] [y^x] [0] [=]	1,00000
$f(3/4) = 3^{3/4}$	[3] [y^x] [(] [3] [÷] [4] [)] [=]	2,27951
$f(\sqrt{3}) = 3^{\sqrt{3}}$	[3] [y^x] [$\sqrt{\ }$] [3] [=]	6,70499

Os comandos acima não são válidos para todas as calculadoras, já que, em algumas delas, a tecla de potência é [∧], em lugar de [y^x]. Além disso, para escrever -1 pode ser necessário digitar [1] [+/−], e para calcular $\sqrt{3}$ pode ser necessário digitar [3] [$\sqrt{\ }$].

Verifique como usar as teclas de sua calculadora e confira se os valores que você obteve para as funções dos itens (b) e (c) são os mesmos dados nas Tabelas 5.1a e 5.1b, respectivamente.

x	$f(x)$	Resultado
-1	$(\frac{1}{3})^{-1}$	3,00000
0	$(\frac{1}{3})^{-1}$	1,00000
$\frac{3}{4}$	$(\frac{1}{3})^{3/4}$	0,43869
$\sqrt{3}$	$(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$	0,14914

(a) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

x	$f(x)$	Resultado
-1	$0{,}3^{-1}$	3,33333
0	$0{,}3^{-1}$	1,00000
$\frac{3}{4}$	$0{,}3^{3/4}$	0,40536
$\sqrt{3}$	$0{,}3^{\sqrt{3}}$	0,12426

(b) $f(x) = 0{,}3^x$

Tabela 5.1: Alguns valores de $(\frac{1}{3})^x$ e $0{,}3^x$.

Agora, tente o exercício 1.

■ Gráfico da função exponencial

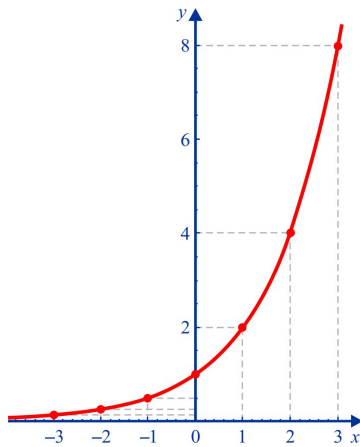
Os gráficos das funções exponenciais possuem várias características importantes, que variam de acordo com a base a. Funções em que $a > 1$ têm gráficos similares, o mesmo acontecendo com aquelas nas quais $0 < a < 1$, como mostram os exemplos abaixo.

Exemplo 2. Gráfico de $f(x) = a^x$ com $a > 1$

Figura 5.9: $f(x) = 2^x$.

Para ilustrar o comportamento da função $f(x) = a^x$ quando $a > 1$, vamos traçar o gráfico de

$$f(x) = 2^x.$$

Como é de praxe, nosso primeiro passo será montar uma lista de pares na forma $(x, f(x))$, que nos auxiliarão no traçado do gráfico. Essa lista é mostrada na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Dados do problema 2.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

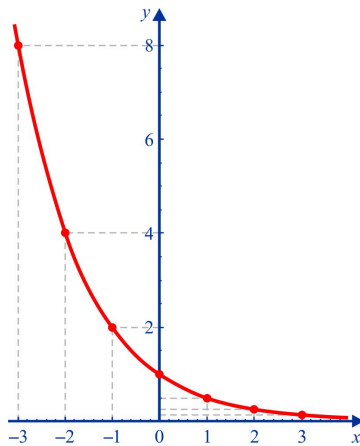
Com base nos pontos da tabela, traçamos o gráfico de $y = 2^x$ no plano Cartesiano, conforme mostrado na Figura 5.9.

Exemplo 3. Gráfico de $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$

Figura 5.10: $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Vejamos agora como é a aparência do gráfico de $g(x) = a^x$ quando $0 < a < 1$, usando como exemplo a função

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Os pares $(x, g(x))$ usados para traçar a curva $y = (\frac{1}{2})^x$ são dados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Dados do problema 3.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x) = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

O gráfico da função é apresentado na Figura 5.10.

Agora, tente o exercício 5.

Observando as Figuras 5.9 e 5.10, notamos que os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ têm uma aparência semelhante, embora pareçam espelhados. De fato, usando nossos conhecimentos de potências, podemos escrever

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}.$$

Logo,

$$g(x) = 2^{-x} = f(-x).$$

Lembrando, então, aquilo que foi visto na Seção 3.8, que trata de transformações de funções, concluímos que o gráfico de $g(x) = f(-x)$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ com relação ao eixo-y.

O quadro abaixo resume as principais características do gráfico de $f(x) = a^x$, destacando as semelhanças e diferenças associadas ao valor da base a.

Gráfico de funções exponenciais

As características comuns aos gráficos de funções exponenciais na forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, são:

- O gráfico é contínuo.
- O domínio é $(-\infty, \infty)$ e o conjunto imagem é $(0, \infty)$.
- O intercepto-y é 1 e não há intercepto-x.

Além disso,

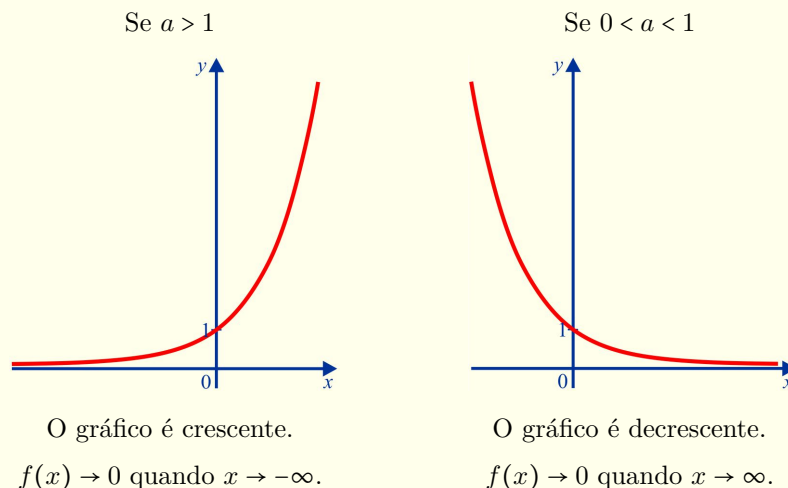
Se $a > 1$

O gráfico é crescente.

$f(x) \to 0$ quando $x \to -\infty$.

Se $0 < a < 1$

O gráfico é decrescente.

$f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$.

Uma das características mais importantes da função exponencial é o fato de seu gráfico se aproximar do eixo-x sem nunca tocá-lo. Para $a > 1$, a função tende a zero quando x decresce, (ou $x \to -\infty$). Já para $0 < a < 1$, a aproximação com o eixo-x se dá à medida que x cresce (isto é, $x \to \infty$). Nesse caso, dizemos que o eixo-x – ou seja, a reta $y = 0$ – é uma *assíntota horizontal* do gráfico da função exponencial.

Assíntota horizontal

A reta $y = b$ é uma **assintota horizontal** do gráfico da função f se

$$f(x) \to b \qquad \text{quando} \qquad x \to -\infty \quad \text{ou} \quad x \to \infty.$$

Exemplo 4. Comparação entre x^2 e 2^x

É comum entre estudantes de matemática confundir a função exponencial $f(x) = 2^x$ – na qual a variável x aparece como o expoente – com a função potência $g(x) = x^2$ – em que x está na base. Para realçar a diferença que há entre essas funções, a Tabela 5.4 apresenta $f(x)$ e $g(x)$ para diversos valores de x.

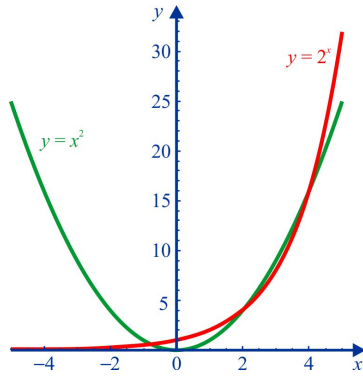



Figura 5.11: Gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

Tabela 5.4: Dados do problema 3.

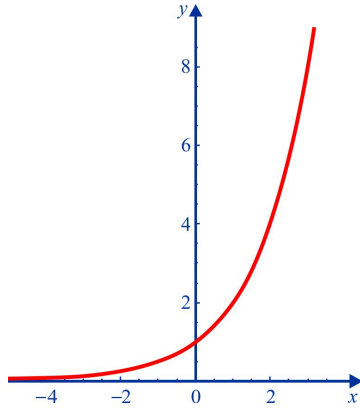
x	−10	−5	−2	−1	0	1	2	5	10
$f(x) = 2^x$	0,0009765	0,03125	0,25	0,5	1	2	4	32	1024
$g(x) = x^2$	100	25	4	1	0	1	4	25	100

A tabela mostra que, além da grande diferença observada entre os valores de $f(x)$ e $g(x)$ quando x é negativo, a função exponencial cresce mais rapidamente quando $x \to \infty$. Os gráficos das duas funções no intervalo $[-5{,}5]$ são apresentados na Figura 5.11.

■ Transformações da função exponencial

Figura 5.12: $f(x) = 2^x$.

As transformações da função exponencial seguem as linhas apresentadas na Seção 3.8. Ainda assim, é interessante rever algumas dessas transformações, particularmente aquelas podem ser apresentadas de formas alternativas.

Tomando como referência a função $f(x) = 2^x$, cujo gráfico é dado na Figura 5.12, vejamos qual é o comportamento da função g definida em cada caso abaixo, analisando a utilidade de cada transformação.

1. $g(x) = f(x) + a$.

   A soma de uma constante ao valor de $f(x)$ provoca um deslocamento vertical do gráfico da função. Essa transformação é particularmente importante quando se deseja mudar a posição da assíntota horizontal. Se quisermos, por exemplo, que a assíntota passe a ser definida pela reta $y = 1$, basta tomarmos $g(x) = 2^x + 1$, como mostra a Figura 5.13a.

2. $g(x) = c \cdot f(x)$.

   Multiplicar a função por uma constante c é equivalente a definir $g(x) = f(x + d)$, em que d também é uma constante. Como exemplo, vamos usar nossos conhecimentos sobre potências para reescrever $g(x) = 4 \cdot 2^x$.

   $$g(x) = 4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2}.$$

   Nesse caso particular,

   $$g(x) = 4f(x) = f(x + 2).$$

   Como se sabe, ao somarmos uma constante positiva a x, deslocamos o gráfico de $f(x)$ na horizontal. Em particular, o gráfico de $g(x) = 4 \cdot 2^x$ pode ser obtido deslocando-se o gráfico de $f(x)$ duas unidades para a esquerda.

   Essa transformação é útil para mudar o intercepto-y da função, sem alterar a posição da assíntota. Como exemplo, a função $g(x) = 4 \cdot 2^x$ cruza o eixo-y no ponto $(0{,}4)$, em lugar de fazê-lo no ponto $(0{,}1)$, como se vê na Figura 5.13b.

3. $g(x) = -f(x)$.

   A troca de sinal de $f(x)$ provoca uma reflexão de seu gráfico em torno do eixo-x. Assim, o gráfico de $g(x) = -2^x$, mostrado na Figura 5.13c, é uma reflexão do gráfico de $f(x) = 2^x$, mantendo o eixo-x como assíntota.

4. $g(x) = f(-x)$.

   Ao definirmos $f(-x)$, refletimos o gráfico de $f(x)$ em torno do eixo-y. Se quisermos, então, traçar o gráfico de $g(x) = 2^{-x}$, podemos simplesmente refletir a curva $y = 2^x$ em torno do eixo-y, como ilustra a Figura 5.13c.

(a) Gráfico de $y = 2^x + 1$

(b) Gráfico de $y = 4 \cdot 2^x$

(c) Gráfico de $y = -2^x$

(d) Gráfico de $y = 2^{-x}$

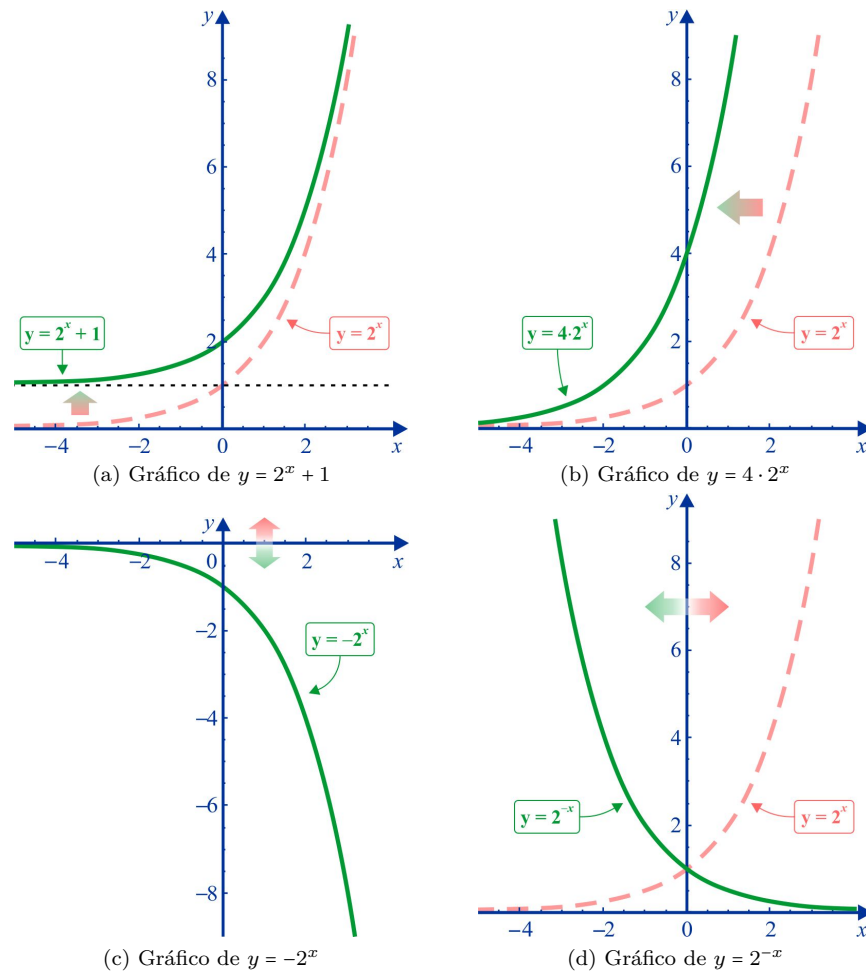



Figura 5.13: Algumas transformações da função exponencial $f(x) = 2^x$.

Observe que

$$2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Assim, a função $g(x) = 2^{-x}$ pode ser reescrita como $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Funções exponenciais na forma $h(x) = a^{-x}$ são usadas para definir modelos matemáticos nos quais a função é decrescente e tende a zero quando $x \to \infty$, como ocorre com o decaimento de isótopos radioativos. Exploraremos melhor esse tipo de função no Problema 2 abaixo.

5. $g(x) = f(cx)$

Multiplicar a variável x por uma constante é equivalente a promover uma mudança da base da função exponencial, como mostrado abaixo.

$$g(x) = a^{cx} = (a^c)^x.$$

Logo, $g(x) = d^x$, em que $d = a^c$ é uma constante real que satisfaz $d > 0$ e $d \neq 1$. Como exemplo, a função $g(x) = 2^{3x}$ pode ser reescrita como

$$g(x) = 2^{3x} = (2^3)^x = 8^x.$$

Se $c < 0$, além da mudança de base, há também uma reflexão do gráfico em torno do eixo-y. A Figura 5.14 mostra os gráficos de funções exponenciais com bases diferentes. Note que a base está relacionada à curvatura do gráfico.

(a) Gráficos de $y = 2^x$, $y = 3^x$ e $y = 10^x$ (b) Gráficos de $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$ e $y = (\frac{1}{10})^x$

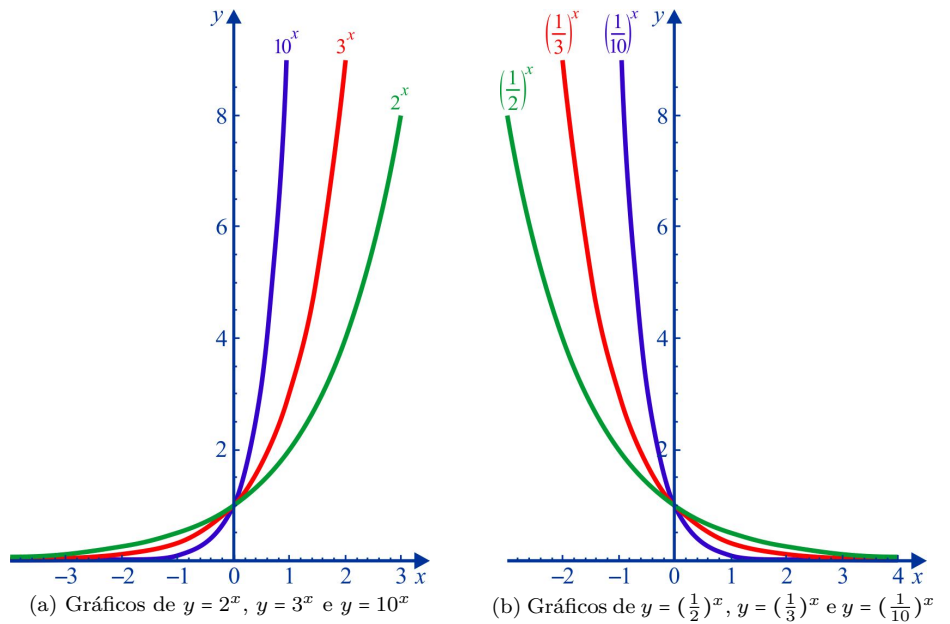



Figura 5.14: Gráficos de funções exponenciais em várias bases.

Uma função exponencial muito comum em aplicações práticas é $f(x) = e^x$, que usa como base o número irracional

$$e \approx 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369996...$$

A função exponencial de base e tem algumas propriedades interessantes, que são exploradas em cursos de cálculo. Além disso, ela é usada para definir as funções hiperbólicas.

Verifique se sua calculadora possui a tecla e^x. Caso isso ocorra, você pode obter um valor aproximado para a constante e pressionando

Exemplo 5. Composição da função exponencial

Pesquisadores de Pederneiras fizeram um estudo estatístico para investigar a distribuição dos tamanhos dos pés dos homens da cidade. Segundo os estudiosos, a função que fornece o percentual aproximado da população masculina adulta cujo pé direito mede x centímetros é

$$f(x) = 28{,}5e^{-(x-24{,}4)^2/3{,}92}.$$

Assim, para saber quantos homens de Pederneiras têm o pé direito com aproximadamente 25 cm, basta calcular

$$f(25) = 28{,}5e^{-(25-24{,}4)^2/3{,}92} \approx 26\%.$$

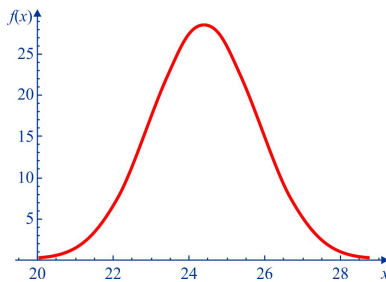



Figura 5.15: Gráfico de $f(x) = 28{,}5e^{-(x-24{,}4)^2/3{,}92}$.

Naturalmente, $f(x)$ pode ser vista como a composição $g(h(x))$, em que $g(z) = 0{,}285e^z$ e $h(x) = -\frac{(x-24{,}4)^2}{3{,}92}$. Essa composição faz com que o gráfico de f se pareça com um sino, como mostra a Figura 5.15. Note que, em lugar de ser estritamente crescente ou decrescente, a curva vermelha atinge seu máximo em $x = 24{,}4$, e tem como assíntota horizontal a reta $y = 0$.

■ Aplicação da função exponencial

Terminando essa seção, vamos apresentar duas novas aplicações da função exponencial, além daquela fornecida no Exemplo 1. Para resolver nosso próximo problema,

devemos levar em conta o fato de a função exponencial ser injetora, como destacado abaixo.

> A função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é sempre crescente ou sempre decrescente. Dessa forma, ela satisfaz o teste da reta horizontal, sendo, portanto, injetora. Em consequência,
>
> $$a^{x_1} = a^{x_2} \qquad \text{se e somente se} \qquad x_1 = x_2.$$

Problema 2. Decaimento radioativo

O decaimento radioativo do ^{131}I, um isótopo instável do Iodo, é a sua conversão em ^{131}Xe (Xenônio 131), com a consequente produção de energia pelo seu núcleo.

O decaimento radioativo do Iodo 131 (^{131}I) é descrito pela função

$$P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt},$$

em que P_0 é a concentração inicial do elemento, t é o tempo transcorrido (em dias) desde que foi medida a concentração, e b é uma constante real positiva. Responda às perguntas abaixo, sabendo que a meia-vida do Iodo 131 é de 8 dias, ou seja, que a concentração desse isótopo em uma amostra cai pela metade em 8 dias.

Picocurie por litro, ou pCi/l, é uma unidade de medida de concentração radioativa.

a) Em uma medição feita hoje, uma amostra de água contaminada apresentou 50 pCi/l de Iodo 131. Escreva a função que fornece a concentração de ^{131}I em função de t, o tempo (em dias) contado a partir da data em que a concentração foi medida.

b) Trace o gráfico da concentração de Iodo 131 nessa amostra de água para um período de 40 dias, contados a partir de hoje.

c) Com base em seu gráfico, determine aproximadamente daqui a quantos dias a água conterá uma concentração de ^{131}I menor ou igual a 3 pCi/l, que é o limite recomendado para o consumo humano.

Solução.

a) Segundo o enunciado do problema, a concentração inicial de ^{131}I é $P_0 = 50$ pCi/l. Substituindo esse valor em nossa função, obtemos

$$P(t) = 50 \cdot 2^{-bt}.$$

Para determinar o valor de b, devemos lembrar que a meia-vida do ^{131}I equivale a 8 dias, de modo que, daqui a 8 dias, a concentração de Iodo 131 será reduzida a 25 pCi/l, que é a metade da concentração inicial. Assim,

$$P(8) = 50 \cdot 2^{-b \cdot 8} = 25.$$

A resolução dessa equação envolve não apenas a manipulação de potências, mas também a propriedade das funções injetoras apresentada acima.

$50 \cdot 2^{-8b} = 25$	Equação original.
$2^{-8b} = \frac{25}{50}$	Dividindo os dois lados por 50.
$2^{-8b} = \frac{1}{2}$	Simplificando o lado direito.
$2^{-8b} = 2^{-1}$	Escrevendo os dois lados como potências de base 2.
$-8b = -1$	Aplicando a propriedade das funções injetoras.
$b = \frac{-1}{-8}$	Dividindo ambos os lados por -8.
$b = \frac{1}{8}$	Simplificando o resultado.

Portanto,

$$P(t) = 50 \cdot 2^{-t/8}.$$

b) Para traçar o gráfico de P, é preciso montar uma tabela de pares $(t, P(t))$. Aproveitando o fato de que $P(t)$ cai pela metade a cada 8 dias, adotamos esse espaçamento para os valores de t, como mostrado na Tabela 5.5. Em seguida, usando os pontos da tabela, desenhamos a curva da Figura 5.16.

Tabela 5.5: Dados do Problema 2.

t	**P(t)**
0	50
8	25
16	12,5
24	6,25
32	3,125
40	1,5625

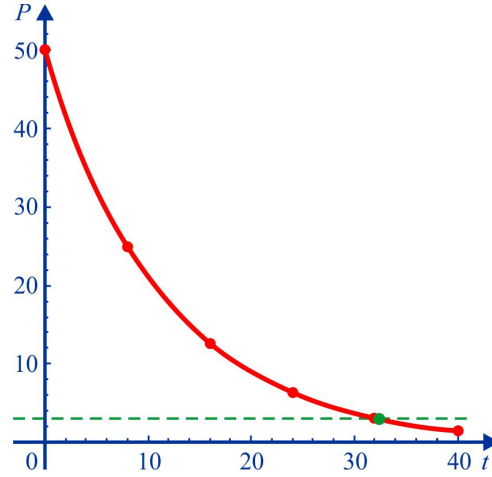



Figura 5.16: Gráfico de $P(t) = 50 \cdot 2^{-t/8}$.

Resolvendo exatamente a equação usando técnicas que serão vistas adiante nesse capítulo, obtemos $t \approx 32{,}5$

c) Observe que a concentração de ^{131}I decresce e se aproxima o eixo-x, sem nunca tocá-lo (a concentração nunca será zero). Segundo a Figura 5.16, a água estará própria para o consumo humano no instante correspondente ao ponto de interseção da curva com a reta $P = 3$, ou seja, daqui a cerca de 32 dias (ponto verde no gráfico).

Agora, tente os exercícios 7 e 8.

Problema 3. Curva de aprendizado

Em uma indústria, um funcionário recém-contratado produz menos que um operário experiente. A função que descreve o número de peças produzidas diariamente por um trabalhador da metalúrgica MetalCamp é

$$p(t) = 180 - 110 \cdot 2^{-0,5t},$$

em que t é o tempo de experiência no serviço, em semanas.

1. Determine quantas peças um operário recém-contratado produz diariamente.
2. Trace o gráfico de $p(t)$, supondo que t varia de 0 a 30 semanas.
3. Determine a assíntota horizontal do gráfico e explique o que ela representa.

Solução.

1. O número de peças produzidas diariamente por um novato na indústria é

$$P(0) = 180 - 110 \cdot 2^{-0,5 \cdot 0} = 180 - 110 \cdot 2^{0} = 180 - 110 = 70.$$

2. O gráfico de p é dado na Figura 5.17. Note que, nesse caso, a função é crescente.

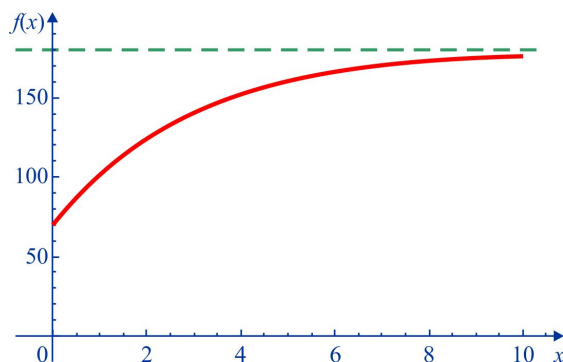



Figura 5.17: Gráfico de $P(t) = 180 - 110\ 2^{-0.5t}$.

3. Como mostra a Figura 5.17, o gráfico de p tem uma assíntota horizontal em $y = 180$. Esse valor é um limite superior para o número de peças que um trabalhador consegue produzir diariamente.

Agora, tente o exercício 9.

Exercícios 5.2

1. Sem usar calculadora, determine o valor das funções abaixo nos pontos indicados.

a) $f(x) = 4^x$; $f(0), f(-1), f(1), f(0{,}5), f(2)$.
b) $f(x) = 3^{-x}$; $f(0), f(-1), f(1), f(0{,}5), f(2)$.
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $f(0), f(-1), f(1), f(0{,}5), f(2)$.
d) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$; $f(0), f(0{,}5), f(1), f(2), f(3)$.
e) $f(x) = 2^{x-1}$; $f(0), f(0{,}5), f(1), f(2), f(3)$.
f) $f(x) = 2^{x-3} + \frac{1}{2}$; $f(0), f(-1), f(6)$.
g) $f(x) = 5^{-x}$; $f(-2), f(-0{,}5), f(3)$.
h) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$; $f(0), f(-2), f(0{,}5), f(2)$.

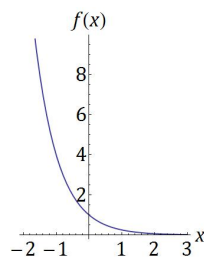
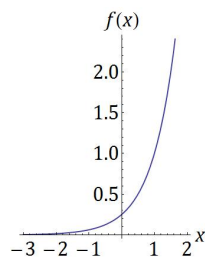
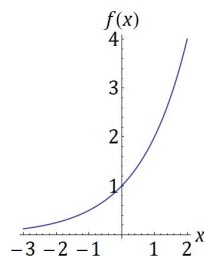
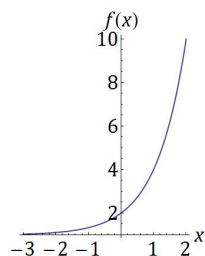
2. Você notou alguma semelhança nos valores encontrados nos itens (b) e (c) da questão 1? Explique o que ocorre. Faça o mesmo com os itens (d) e (e) da questão.

3. Lício pegou um empréstimo bancário de R$ 2500,00, a uma taxa de 5% ao mês.

a) Escreva a função que fornece o quanto Lício deve em um determinado mês t, contado a partir da data do empréstimo, supondo que ele não tenha condições de saldar nem mesmo parte da dívida.
b) Determine a dívida acumulada após 12 meses da data do empréstimo.

4. Em uma placa de Petri, uma cientista criou uma cultura de bactérias que contava inicialmente com 600 bactérias. Observando a cultura, a cientista notou que o número de bactérias crescia 50% a cada hora.

a) Escreva a função que fornece o número de bactérias em função do tempo t, em horas, decorrido desde a criação da cultura.
b) Determine a população de bactérias após 3, 6 e 12 horas.

5. Relacione o gráfico à função.

(I) $f_1(x) = 3^x + 1$.
(II) $f_2(x) = 4^{x-1}$.
(III) $f_3(x) = 4^{-x}$.
(IV) $f_4(x) = 2^x$.

6. O crescimento populacional de algumas espécies depende das limitações impostas pelo meio ambiente. Enquanto há espaço e comida em abundância, a população cresce rapidamente. Quando a concorrência por espaço e comida aumenta, a população tende a crescer mais

devagar, até se aproximar de um patamar. Nesse caso, o número de indivíduos da espécie é descrito pela curva logística, ou curva "S", definida por

$$P(t) = \frac{A}{b + ce^{-dt}},$$

em que A, b, c e d são constantes reais. Para uma espécie de anfíbio introduzida nas cercanias de uma lagoa, observou-se que o tamanho da população era dado pela função abaixo, na qual t é o tempo, em meses, decorrido desde a introdução dos animais.

$$P(t) = \frac{1600}{1 + 15e^{-t/4}}.$$

a) Determine a população inicial de anfíbios.

b) Trace um gráfico da população para $t \in [0{,}30]$.

c) Determine de que valor a população se aproxima à medida em que o tempo avança. Escreva a assíntota horizontal associada a esse limite superior.

7. O decaimento radioativo do estrôncio 90 (Sr-90) é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, em que t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de Sr-90, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.

a) Determine o valor da constante b sabendo que a meia-vida do Sr-90 é de 29 anos (ou seja, a concentração de Sr-90 cai pela metade em 29 anos).

b) Foram detectados 570 becquerels de Sr-90 por kg de solo na região da usina de Fukushima, no Japão, em abril de 2011 (valor que corresponde a cerca de 130 vezes a concentração normal do solo daquela região). Determine qual será a concentração de Sr-90 daqui a 100 anos.

8. A concentração de CO_2 na atmosfera vem sendo medida desde 1958 pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual de crescimento da concentração de CO_2 irá se manter constante nos próximos anos.

a) Escreva uma função $C(t)$ que forneça a concentração de CO_2 na atmosfera em relação ao tempo t, dado em anos. Considere como instante inicial – ou seja, aquele em que $t = 0$ – o ano de 2004, no qual foi observada uma concentração de 377,4 ppm de CO_2 na atmosfera.

b) Determine a concentração de CO_2 em 2010.

c) Determine em que ano a concentração será o triplo daquela verificada em 2010.

9. O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t, o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é $T(t) = (T_0 - T_{ext}) \cdot 10^{-t/4} + T_{ext}$, em que T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que $T_0 = 21°C$ e $T_{ext} = 30°C$,

a) escreva a expressão de $T(t)$ para esse problema;

b) calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado;

c) esboçe o gráfico de $T(t)$.

10. Em um mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico das funções dos itens (a), (b) e (d) da questão 1.

Respostas dos Exercícios 5.2

1. a) $f(0) = 1,\ f(-1) = 1/4,\ f(1) = 4,\ f(0{,}5) = 2,\ f(2) = 16$

b) $f(0) = 1,\ f(-1) = 3,\ f(1) = 1/3,\ f(0{,}5) = 1/\sqrt{3},\ f(2) = 1/9$

c) $f(0) = 1,\ f(-1) = 3,\ f(1) = 1/3,\ f(0{,}5) = 1/\sqrt{3},\ f(2) = 1/9$

d) $f(0) = 1/2,\ f(0{,}5) = \sqrt{2}/2,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 4$

e) $f(0) = 1/2,\ f(0{,}5) = \sqrt{2}/2,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 4$

f) $f(0) = 5/8,\ f(-1) = 9/16,\ f(6) = 17/2$

g) $f(-2) = 25,\ f(-0{,}5) = \sqrt{5},\ f(3) = 1/125$

h) $f(0) = 1,\ f(-2) = 1/16,\ f(0{,}5) = 2,\ f(2) = 16$

2. As respostas dos itens (b) e (c) são iguais, assim como as respostas dos itens (d) e (e), uma vez que $3^{-x} = 1/3^x = (1/3)^x$, e que $(1/2)\cdot 2^x = 2^{(}-1)\cdot 2^x = 2^{x-1}$.

3. a) $D(t) = 2500 \cdot 1{,}05^t$

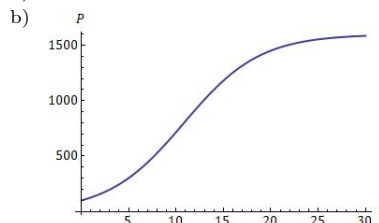
b) R$ 4489,64

4. a) $P(t) = 600 \cdot 1{,}5^t$

b) Cerca de 2025, 6834 e 77848 bactérias.

5. a) III b) IV c) II d) I

6. a) 100 anfíbios

b)

c) 1600 anfíbios. $y = 1600$

7. a) $b = 1/29$

b) 52,22 becquerels

8. a) $C(t) = 377{,}4 \cdot 1{,}005^t$

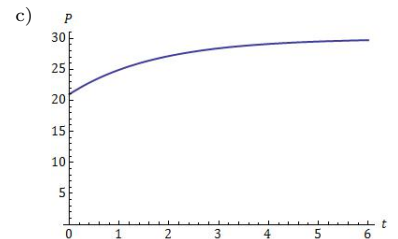
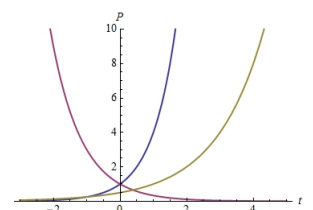
b) $C(6) \approx 388{,}9$ ppm

c) Em 2230, pois $t = 226{,}3$.

9. a) $T(t) = 30 - 9 \cdot 10^{-t/4}$

b) $29{,}1°C$

c)

10.

5.3 Função logarítmica

A função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetora em todo o seu domínio. Logo, ela possui uma inversa $f^{-1}(y)$, à qual damos o nome de **função logarítmica** na base a. Uma das aplicações importantes da função logarítmica é a solução de equações exponenciais, como mostra o exemplo abaixo.

Problema 1. Dívida bancária

Heloísa contraiu um empréstimo de R$ 1.000,00 e terá que pagar juros de 6% ao mês. Se Heloísa não saldar sequer uma parte de sua dívida, em que momento ela deverá o dobro do valor que pegou emprestado?

Solução.

Como vimos no Exemplo 1 da Seção 5.2, após x meses da data do empréstimo, a dívida acumulada de Heloísa será dada por

$$f(x) = 1000 \cdot 1{,}06^x.$$

Para descobrir em que momento a dívida alcançará o dobro do valor do empréstimo – isto é, R$ 2.000,00 – devemos resolver a equação

$$1000 \cdot 1{,}06^x = 2000$$
$$1{,}06^x = 2.$$

Encontrar x que resolve $1{,}06^x = 2$ é equivalente a encontrar x tal que $f(x) = y$. Nesse caso, o valor que procuramos é dado pela inversa de f, ou seja,

$$x = f^{-1}(y).$$

Função logarítmica

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Se $x > 0$, então dizemos que

$$y = \log_a(x) \qquad \text{se e somente se} \qquad a^y = x.$$

A função definida por $f(x) = \log_a(x)$ é denominada **função logarítmica** na base a.

A função logarítmica $f(x) = \log_a(x)$ é a inversa de $g(y) = a^y$, a função exponencial na mesma base a. Da mesma forma, $g(y) = a^y$ é a inversa de $f(x) = \log_a(x)$. Logo, as equações

$$y = \log_a(x) \qquad \text{e} \qquad x = a^y$$

são equivalentes, embora a primeira equação esteja na forma logarítmica, enquanto a segunda está na forma exponencial.

Note que é importante manter a base. Assim, por exemplo, $\log_3(x)$ é a inversa de 3^y, mas não de 5^y.

> Damos o nome de **logaritmo** ao número real obtido pela aplicação da função logarítmica a algum valor particular de x. O termo $\log_a(b)$ é denominado **logaritmo de b na base a**.

Como exemplo, sabendo que $\log_3(81) = 4$, dizemos que o *logaritmo de 81 na base 3* é 4.

Problema 2. Cálculo de logaritmos

Calcule os logaritmos abaixo.

a) $\log_2(64)$ b) $\log_{10}(1000)$ c) $\log_2(\frac{1}{8})$ d) $\log_9(3)$

Solução.

a) $\log_2(64) = 6$ (o logaritmo de 64 na base 2 é 6), pois $64 = 2^6$.

b) $\log_{10}(1000) = 3$ (o logaritmo de 1000 na base 10 é 3), pois $1000 = 10^3$.

c) $\log_2(\frac{1}{8}) = -3$, pois $\frac{1}{8} = 2^{-3}$.

d) $\log_9(3) = \frac{1}{2}$, pois $3 = 9^{1/2} = \sqrt{9}$.

Como se percebe, $\log_a(x)$ é o expoente ao qual é preciso elevar a para se obter x. Tendo isso em mente, é fácil estabelecer algumas propriedades para os logaritmos.

Propriedades derivadas da definição de logaritmo

	Propriedade	Motivo	Exemplo
1.	$\log_a(1) = 0$	Sabemos que $a^0 = 1$	$\log_e(1) = 0$
2.	$\log_a(a) = 1$	Sabemos que $a^1 = a$	$\log_3(3) = 1$
3.	$\log_a(a^x) = x$	$\log_a(x)$ é a inversa de a^x	$\log_7(7^4) = 4$
4.	$a^{\log_a(x)} = x$	a^x é a inversa de $\log_a(x)$	$10^{\log_{10}(13)} = 13$

Para explicar melhor as duas últimas propriedades do quadro, vamos recorrer à relação

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x,$$

apresentada na definição da função logarítmica. Usando essa relação, podemos substituir x por a^y na equação $y = \log_a(x)$, obtendo

$$y = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad y = \log_a(a^y),$$

que é equivalente à Propriedade 3. Por sua vez, a Propriedade 4 pode ser obtida se substituirmos y por $\log_a(x)$ na equação $x = a^y$:

$$x = a^y \quad \Rightarrow \quad x = a^{\log_a(x)}.$$

Outra propriedade importante da função logarítmica, decorrente do fato de ela ser injetora, é apresentada abaixo.

$$\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \quad \text{se e somente se} \quad x_1 = x_2.$$

Essa propriedade nos permite concluir que

Naturalmente, estamos supondo aqui que $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$.

- se $\log_a(x_1) = \log_a(x_2)$, então $x_1 = x_2$;
- se $x_1 = x_2$, então $\log_a(x_1) = \log_a(x_2)$.

As duas implicações acima são úteis para a resolução de equações logarítmicas e exponenciais, como mostra o exemplo a seguir.

Problema 3. Solução de equações simples

Resolva as equações

a) $\log_8(x+3) = \log_8(3x-7)$ b) $10^x = 15$

Solução.

a) Usando a propriedade das funções injetoras, temos

$$\log_8(3x-7) = \log_8(x+3) \quad \Rightarrow \quad 3x-7 = x+3 \quad \Rightarrow \quad 2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

b) Como a função logarítmica é injetora, podemos aplicar o logaritmo na base 10 aos dois lados da equação $10^x = 15$, obtendo

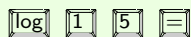
$$\log_{10}(10^x) = \log_{10}(15).$$

Recorrendo, então, à Propriedade 3, concluímos que $\log_{10}(10^x) = x$, de modo que

$$x = \log_{10}(15).$$

Finalmente, usando uma calculadora científica, chegamos a $x \approx 1{,}17609$.

Na calculadora

Para obter $\log_{10}(15)$ em sua calculadora, pressione

Operações com logaritmos

Durante a resolução de equações exponenciais e logarítmicas, é comum nos depararmos com expressões como

$$\log_{10}(3x), \qquad \log_3(x/5), \qquad \log_e(\sqrt{x}) \qquad \text{ou} \qquad \log_5(x^2).$$

Para lidar com esse tipo de expressão, precisamos recorre a algumas propriedades dos logaritmos, além daquelas apresentadas acima, que decorrem diretamente da definição. As três principais propriedades relacionadas à operação com logaritmos são apresentadas no quadro a seguir.

Propriedades dos logaritmos

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, e seja c uma constante real qualquer. Se $x > 0$ e $y > 0$, então,

Propriedade	Exemplo
5. Logaritmo do produto	
$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_{10}(3x) = \log_{10}(3) + \log_{10}(x)$
6. Logaritmo do quociente	
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\log_3\left(\frac{x}{5}\right) = \log_3(x) - \log_3(5)$
7. Logaritmo da potência	
$\log_a(x^c) = c\,\log_a(x)$	$\log_5(x^2) = 2\log_5(x)$

Vamos demonstrar as propriedades acima, já que essa é uma boa oportunidade de aplicarmos nossos conhecimentos sobre potências e sobre funções exponenciais e logarítmicas. Como um primeiro passo, vamos supor que

$$\log_a(x) = r \qquad \text{e} \qquad \log_a(y) = s.$$

Nesse caso, usando a propriedade 4 (ou mesmo a definição de logaritmo), temos

$$a^{\log_a(x)} = a^r \qquad \Rightarrow \qquad x = a^r$$

e

$$a^{\log_a(y)} = a^s \qquad \Rightarrow \qquad y = a^s.$$

De posse dessas relações, podemos passar à demonstração de cada propriedade em separado.

Propriedade 5. Usando a Propriedade 3 apresentada acima, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a(a^r \cdot a^s) && \text{Substituindo } x = a^r \text{ e } y = a^s.\\
&= \log_a(a^{r+s}) && \text{Propriedade das potências.}\\
&= r + s && \text{Propriedade 3.}\\
&= \log_a(x) + \log_a(y) && \text{Definição de } r \text{ e } s.
\end{aligned}$$

Propriedade 6. Usando o mesmo raciocínio adotado para a Propriedade 5, temos

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^r}{a^s}\right) = \log_a(a^{r-s}) = r - s = \log_a(x) - \log_a(y).$$

Propriedade 7. Recorrendo, mais uma vez, à Propriedade 3, escrevemos

$$\begin{aligned}
\log_a(x^c) &= \log_a((a^r)^c) && \text{Substituindo } x = a^r.\\
&= \log_a(a^{rc}) && \text{Propriedade das potências.}\\
&= cr && \text{Propriedade 3.}\\
&= c\ \log_a(x) && \text{Definição de } r.
\end{aligned}$$

Problema 4. Propriedades dos logaritmos

Sabendo que

$$\log_{10}(2) \approx 0{,}301, \quad \log_{10}(3) \approx 0{,}477 \quad \text{e} \quad \log_{10}(7) \approx 0{,}845,$$

calcule

a) $\log_{10}(14)$
b) $\log_{10}(1/3)$
c) $\log_{10}(3/2)$
d) $\log_{10}(63)$
e) $\log_{10}(\sqrt{27})$

Solução.

a)

$$\begin{aligned}
\log_{10}(14) &= \log_{10}(2 \cdot 7) && \text{Fatoração de 14.}\\
&= \log_{10}(2) + \log_{10}(7) && \text{Propriedade 5.}\\
&= 0{,}301 + 0{,}845 && \text{Cálculo dos logaritmos.}\\
&= 1{,}146 && \text{Simplificação do resultado.}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \log_{10}(1/3) &= \log_{10}(3^{-1}) && \text{Propriedade das potências.} \\ &= -\log_{10}(3) && \text{Propriedade 7.} \\ &= -0{,}477 && \text{Cálculo do logaritmo.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \log_{10}(3/2) &= \log_{10}(3) - \log_{10}(2) && \text{Propriedade 6.} \\ &= 0{,}477 - 0{,}301 && \text{Cálculo do logaritmo.} \\ &= 0{,}176 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \log_{10}(63) &= \log_{10}(3^2 \cdot 7) && \text{Fatoração de 63.} \\ &= \log_{10}(3^2) + \log_{10}(7) && \text{Propriedade 5.} \\ &= 2\log_{10}(3) + \log_{10}(7) && \text{Propriedade 7.} \\ &= 2 \cdot 0{,}477 + 0{,}845 && \text{Cálculo dos logaritmos.} \\ &= 1{,}799 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \log_{10}(\sqrt{27}) &= \log_{10}(\sqrt{3^3}) && \text{Fatoração de 27.} \\ &= \log_{10}(3^{3/2}) && \text{Propriedade das raízes.} \\ &= \frac{3}{2}\log_{10}(3) && \text{Propriedade 7.} \\ &= \frac{3}{2} \cdot 0{,}477 && \text{Cálculo do logaritmo.} \\ &= 0{,}716 && \text{Simplificação do resultado;} \end{aligned}$$

As propriedades acima também podem ser usadas no sentido contrário àquele adotado no Problema 4, como mostram os exemplos a seguir.

Problema 5. Propriedades dos logaritmos

Sem usar calculadora, determine

a) $\log_8(2) + \log_8(4)$ b) $3\log_5(\sqrt[3]{125})$ c) $2\log_2(12) - \log_2(9)$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} \log_8(2) + \log_8(4) &= \log_8(2 \cdot 4) && \text{Propriedade 5.} \\ &= \log_8(8) && \text{Cálculo do produto.} \\ &= 1 && \text{Propriedade 2.} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
3\log_5(\sqrt[3]{125}) &= \log_5((\sqrt[3]{125})^3) && \text{Propriedade 7.}\\
&= \log_5(125) && \text{Propriedade das raízes.}\\
&= \log_5(5^3) && \text{Fatoração de 125.}\\
&= 3 && \text{Propriedade 3.}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
2\log_2(12) - \log_2(9) &= \log_2(12^2) - \log_2(9) && \text{Propriedade 7.}\\
&= \log_2(144/9) && \text{Propriedade 6.}\\
&= \log_2(16) && \text{Simplificação da fração.}\\
&= \log_2(2^4) && \text{Fatoração de 16.}\\
&= 4 && \text{Propriedade 3.}
\end{aligned}
$$

■ Logaritmos usuais e mudança de base

Apesar de ser possível definir o logaritmo em qualquer base, as calculadoras costumam apresentar apenas dois tipos de logaritmo, o *decimal* e o *natural*.

Logaritmos usuais

Os logaritmos mais comumente empregados possuem uma notação particular, para facilitar seu uso. São eles:

- O logaritmo na base 10, também chamado **logaritmo comum** ou **decimal**, que é apresentado sem a indicação da base.

  $$\log(x) = \log_{10}(x).$$

  A função logarítmica $f(x) = log(x)$ tem como inversa a função exponencial $g(y) = 10^y$. Desse modo,

  $$y = \log(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 10^y = x.$$

- O logaritmo na base e, também chamado **logaritmo natural** ou **Neperiano**, que é representado por ln.

  $$\ln(x) = \log_e(x).$$

  A inversa de $f(x) = \ln(x)$ é a função exponencial $g(y) = e^y$. Assim,

  $$y = \ln(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad e^y = x.$$

Exemplo 1. Logaritmos usuais

Dadas as definições acima, e as propriedades dos logaritmos, podemos escrever

a) $\ln(1) = 0$

b) $\log(10) = 1$

c) $\ln(e^5) = 5$

d) $\log(10000) = \log(10^4) = 4$

e) $\log(0{,}01) = \log(10^{-2}) = -2$

f) $e^{\ln(\pi)} = \pi$

g) $\log(10e) = \log(10) + \log(e) = 1 + \log(e)$

h) $\ln(e^2/10) = \ln(e^2) - \ln(10) = 2 - \ln(10)$

Como as calculadoras só incluem logaritmos nas bases 10 e e, precisamos definir alguma estratégia para calcular logaritmos fornecidos em outra base.

Suponha que queiramos determinar $y = \log_a(x)$, em que a é uma base qualquer, mas que só saibamos calcular $\log_b(x)$, com $b \neq a$. Nesse caso, recorrendo à definição de logaritmo, escrevemos

$$y = \log_a(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a^y.$$

Aplicando o logaritmo na base b a ambos os lados dessa última equação, obtemos

$$\begin{aligned}
x &= a^y && \text{Equação original.}\\
\log_b(x) &= \log_b(a^y) && \text{Aplicando } \log_b \text{ aos dois lados.}\\
\log_b(x) &= y\log_b(a) && \text{Propriedade 7.}\\
\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} &= y && \text{Isolando } y \text{ no lado direito.}\\
y &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} && \text{Invertendo a equação.}\\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} && \text{Substituindo } y = \log_a(x).
\end{aligned}$$

Assim, podemos calcular $\log_a(x)$ aplicando duas vezes o logaritmo na base b.

Mudança de base

Sejam a, b e x números reais maiores que zero, e suponha que $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Nesse caso,

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

Problema 6. Mudança de base do logaritmo

Calcule

a) $\log_2(12)$

b) $\log_4(8)$

c) $\log_3(e)$

d) $\dfrac{\log_5(1000)}{\log_5(10)}$

Na calculadora

Para obter $\log_2(12)$ em sua calculadora, pressione

Solução.

a) Usando o logaritmo na base 10 e uma calculadora, obtemos

$$\log_2(12) = \frac{\log(12)}{\log(2)} \approx \frac{1{,}07918}{0{,}30103} \approx 3{,}58496.$$

b) Nesse caso, como os números 8 e 4 são potências de 2, podemos converter os logaritmos à base 2, em lugar de usar a base 10 ou e. Assim, nem precisamos de uma calculadora para obter o resultado (embora possamos usá-la, caso desejemos):

$$\log_4(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2(2^3)}{\log_2(2^2)} = \frac{3}{2}.$$

c) Agora, vamos usar o logaritmo natural:

$$\log_3(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)} \approx \frac{1}{1{,}09861} \approx 0{,}91024.$$

Note que

$$\log_3(e) = \frac{1}{\ln(3)}.$$

Esse resultado é um caso particular de uma regra geral, segundo a qual

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}.$$

d) Em nosso último exemplo, usamos a fórmula de mudança de base no sentido inverso:

$$\frac{\log_5(1000)}{\log_5(10)} = \log_{10}(1000) = 3.$$

Mais uma vez, a conversão nos fez evitar o uso da calculadora.

Exemplo 2. Mudança de base da função exponencial

Também podemos usar logaritmos para mudar a base da função exponencial. Suponha, por exemplo, que queiramos converter $f(x) = 3^x$ para a base 10. Nesse caso, usando a Propriedade 4, fazemos

$$\begin{aligned} 3^x &= 10^{\log_{10}(3^x)} && \text{Propriedade 4.} \\ &= 10^{x\cdot\log_{10}(3)} && \text{Propriedade 7.} \\ &= 10^{0{,}4771x} && \log_{10}(3) \approx 0{,}4771. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) \approx 10^{0{,}4771x}$.

■ Gráfico da função logarítmica

Assim como foi feito com as funções exponenciais, é comum dividir os gráficos das funções logarítmicas em dois grupos. O primeiro compreende as funções em que a base a é maior que 1. Já o segundo contém os casos em que $0 < a < 1$.

Exemplo 3. Gráfico de $f(x) = \log_a(x)$ com $a > 1$

Podemos traçar o gráfico de $f(x) = \log_2(x)$ a partir dos pares $(x, f(x))$ apresentados na Tabela 5.6. O resultado é mostrado na Figura 5.18a.

O gráfico de $f(x) = \log_2(x)$ também poderia ser obtido a partir do gráfico de $g(x) = 2^x$. Para tanto, bastaria lembrar que o gráfico da inversa de uma função g é a reflexão do gráfico de g com relação à reta $y = x$.

A Figura 5.18b mostra os gráficos de g e de $f = g^{-1}$. Observe que $g(x) = 2^x$ tem domínio $A = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $B = (0,\infty)$, enquanto $f(x) = \log_2(x)$ tem domínio $B = (0,\infty)$ e conjunto imagem $A = \mathbb{R}$.

Tabela 5.6

x	$\log_2(x)$
1/8	−3
1/4	−2
1/2	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

(a) Gráfico de $f(x) = \log_2(x)$ (b) Gráficos de $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = 2^x$

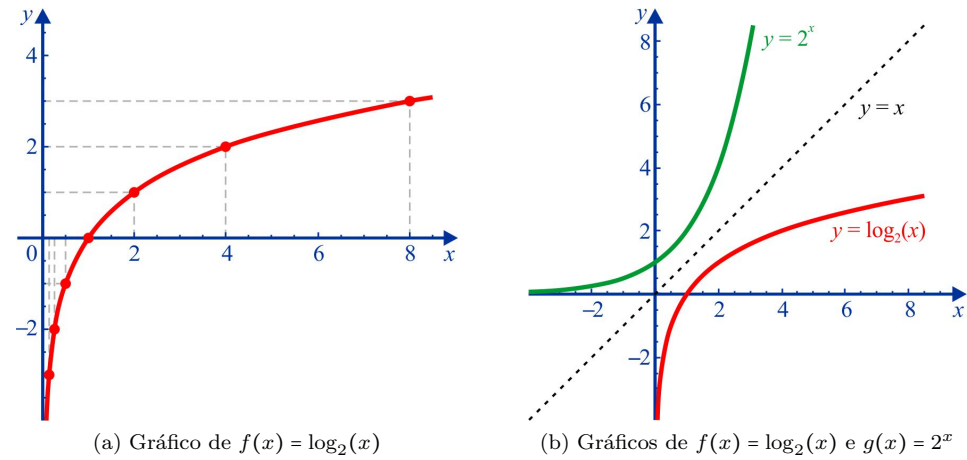



Figura 5.18: Gráficos do Exemplo 3.

Exemplo 4. Gráfico de $f(x) = \log_a(x)$ com $0 < a < 1$

Analisemos, agora, o comportamento da função $f(x) = \log_{1/2}(x)$. Os pares $(x, f(x))$ usados para obter o gráfico de f são mostrados na Tabela 5.7. A curva resultante é dada na Figura 5.19a.

A relação entre os gráficos de $f(x) = \log_{1/2}(x)$ e sua inversa, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$, é mostrada na Figura 5.19b. Note a simetria das curvas com relação à reta $y = x$.

Tabela 5.7

x	$\log_{\frac{1}{2}}(x)$
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3

(a) Gráfico de $f(x) = \log_{1/2}(x)$ (b) Gráficos de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

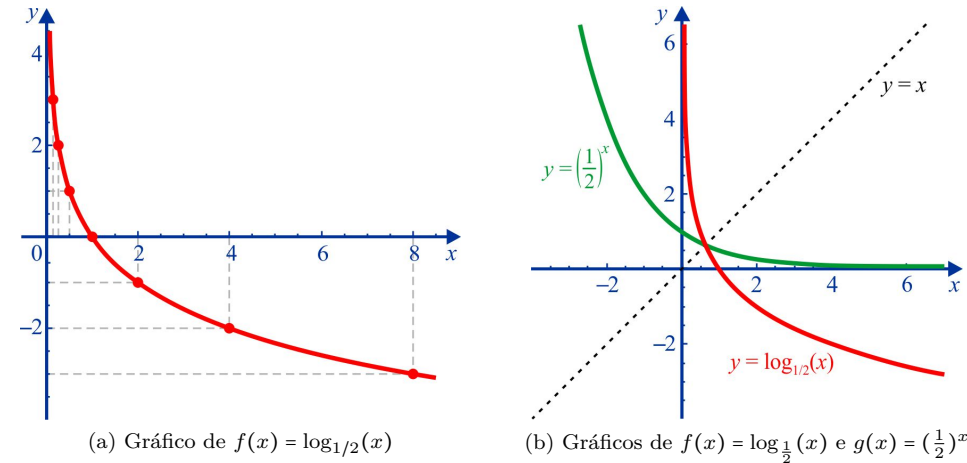



Figura 5.19: Gráficos do Exemplo 4.

Como vimos, só é possível calcular $\log_a(x)$ se $x > 0$, não importando se $a > 1$ ou se $0 < a < 1$. Essas e outras características do gráfico de $f(x) = \log_a(x)$ estão resumidas no quadro abaixo.

Gráfico de funções logarítmicas

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. O gráfico de $f(x) = \log_a(x)$,

- é contínuo;
- tem domínio $(0, \infty)$ e conjunto imagem é $\mathbb{R}$;
- tem intercepto-x em $(1,0)$ e não tem intercepto-y.

Além disso,

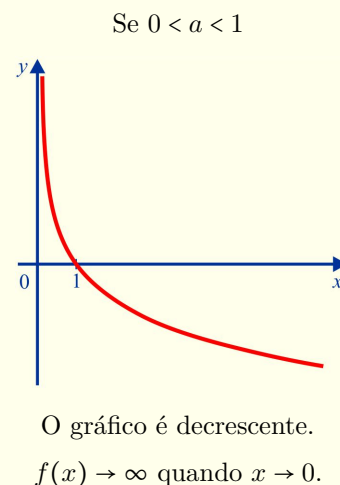
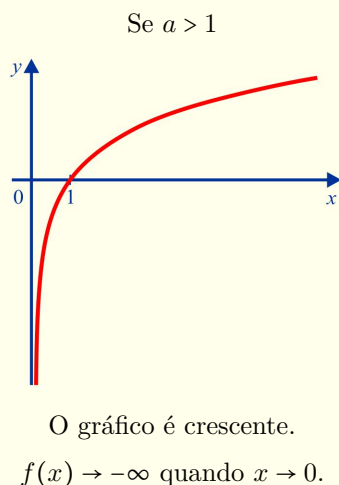
Se $a > 1$

O gráfico é crescente.

$f(x) \to -\infty$ quando $x \to 0$.

Se $0 < a < 1$

O gráfico é decrescente.

$f(x) \to \infty$ quando $x \to 0$.

Como se observa, quando x tende a zero, a função decresce ilimitadamente se $a > 1$, e cresce ilimitadamente se $0 < a < 1$. Dito de outra forma, a função logarítmica se aproxima do eixo-y sem nunca tocá-lo. Nesse caso, o eixo-y – ou seja, a reta $x = 0$ – é uma *assíntota vertical* do gráfico.

Assíntota vertical

A reta $x = b$ é uma **assintota vertical** do gráfico da função f se

$f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$ quando $x \to b$ pela esquerda ou pela direita.

■ Transformações e composições da função logarítmica

Vamos analisar as transformações da função logarítmica tomando por base a função $f(x) = \log_2(x)$, cujo gráfico já vimos na Figura 5.18a.

1. $g(x) = f(x) + b$ e $g(x) = f(cx)$.

   Somando uma constante b ao valor de $f(x)$, deslocamos o gráfico dessa função em exatas b unidades na vertical. Além disso, se escrevermos $b = \log_a(c)$, então

   $$\log_a(x) + b = \log_a(x) + \log_a(c) = \log_a(cx),$$

   de modo que $g(x)$ também pode ser definida na forma $g(x) = \log_a(cx)$, em que $c = a^b$. Ou seja, é equivalente escrever

   $$g(x) = \log_2(x) + 1 \qquad \text{ou} \qquad g(x) = \log_2(2x).$$

   O gráfico dessa função é apresentado na Figura 5.20a.

2. $g(x) = f(x + b)$.

   A soma de b unidades a x provoca o deslocamento do gráfico de f na horizontal. Se $b > 0$, a curva é deslocada para a esquerda. Já se $b < 0$, o gráfico é movido para a direita. Como consequência dessa translação, a assíntota vertical também é deslocada, o que implica em uma alteração do domínio da função.

   A Figura 5.20b mostra o gráfico de $g(x) = \log_2(x - 2)$ (curva verde), bem como o gráfico de $f(x) = \log_2(x)$ (curva tracejada). Note que o domínio de $g(x)$ é $(2,\infty)$.

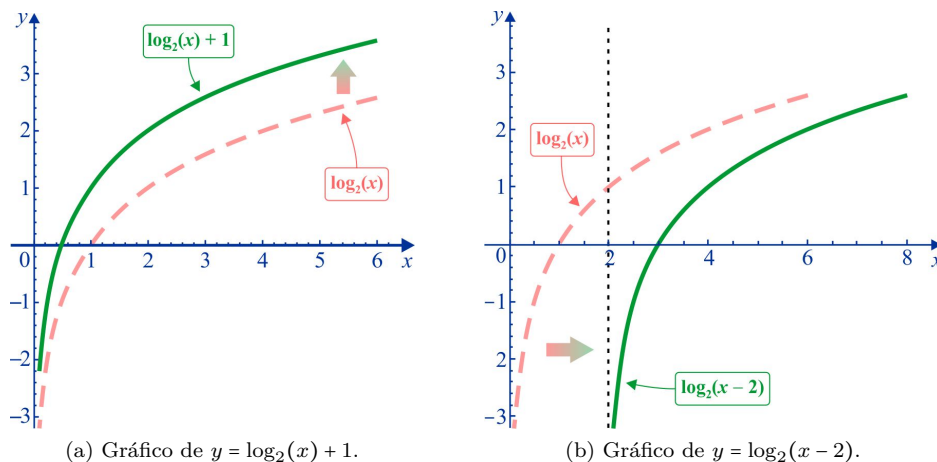
(a) Gráfico de $y = \log_2(x) + 1$.

(b) Gráfico de $y = \log_2(x - 2)$.

Figura 5.20: Translações de $y = log_2(x)$.

3. $g(x) = cf(x)$

   Ao multiplicarmos $f(x) = \log_a(x)$ por uma constante c, causamos um esticamento ou encolhimento do gráfico de f. Além disso, se a constante c é negativa, o gráfico é refletido em relação ao eixo-y. A Figura 5.21 mostra em verde o gráfico de $g(x) = 3\log_2(x)$, enquanto a curva de $f(x) = \log_2(x)$ aparece tracejada.

Figura 5.21: Gráfico de $y = 3\log_2(x)$.

   É importante notar que a multiplicação de $\log_a(x)$ por uma constante é equivalente a uma mudança de base da função logarítmica. Para mostrar essa relação vamos supor que queiramos converter a função logarítmica na base b para uma outra base a. Nesse caso, escrevemos simplesmente

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = c\log_a(x),$$

   em que $c = 1/\log_a(b)$ é constante. Assim, para converter $f(x) = \log_3(x)$ à base 2, fazemos

$$\log_3(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(3)} \approx 0{,}63093\log_2(x).$$

   Logo, $f(x) \approx 0{,}63093\log_2(x)$.

   A Figura 5.22 mostra os gráficos de $\log_a(x)$ para vários valores da base a.

(a) Gráficos de $y = \log_2(x)$, $y = \log_3(x)$ e $y = \log_{10}(x)$.

(b) Gráficos de $y = \log_{1/2}(x)$, $y = \log_{1/3}(x)$ e $y = \log_{1/10}(x)$.

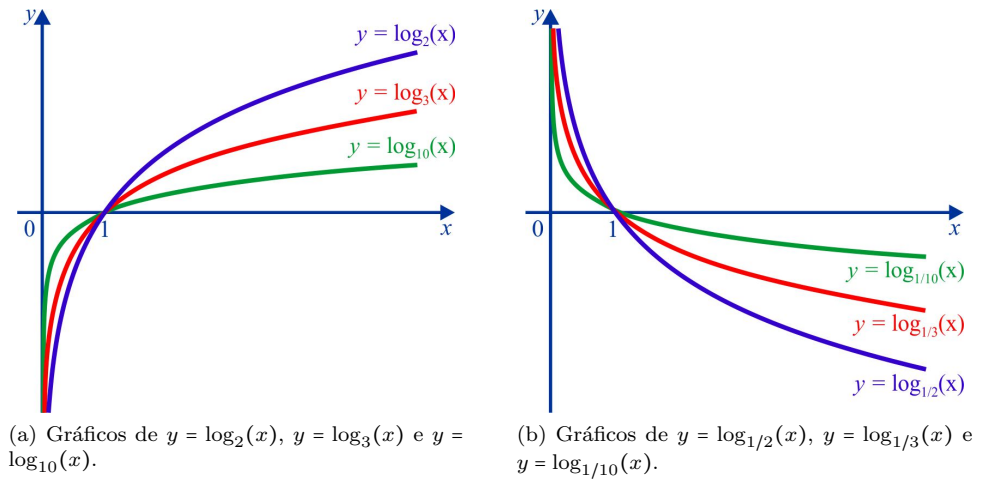



Figura 5.22: Gráficos de funções logarítmicas em várias bases.

Problema 7. Transformação e composição da função logarítmica

Determine o domínio e trace o gráfico das funções abaixo.

a) $f(x) = \ln(x+1)$

b) $f(x) = \log_3(9 - x^2)$

Solução.

a) Para que possamos calcular $\ln(w)$, é preciso que $w > 0$. Assim, $f(x) = \ln(x+1)$ só está definida para

$$x + 1 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x > -1.$$

Portanto, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -1\}$. O gráfico de f pode ser obtido deslocando-se a curva $y = \ln(x)$ uma unidade para a esquerda. O resultado é apresentado na Figura 5.23a.

b) Para calcularmos a função composta $\log_3(9 - x^2)$, devemos exigir que $9 - x^2 > 0$. Para descobrir os valores de x que satisfazem essa condição, escrevemos

Se você não se lembra como resolver esse tipo de desigualdade, visite as Seções 2.11 e 4.1.

$$9 - x^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 < 9 \qquad \Rightarrow \qquad -3 < x < 3.$$

Logo, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x < 3\}$. O gráfico de f é mostrado na Figura 5.23b.

(a) Gráfico de $y = \ln(x+1)$

(b) Gráficos de $y = \log_3(9 - x^2)$

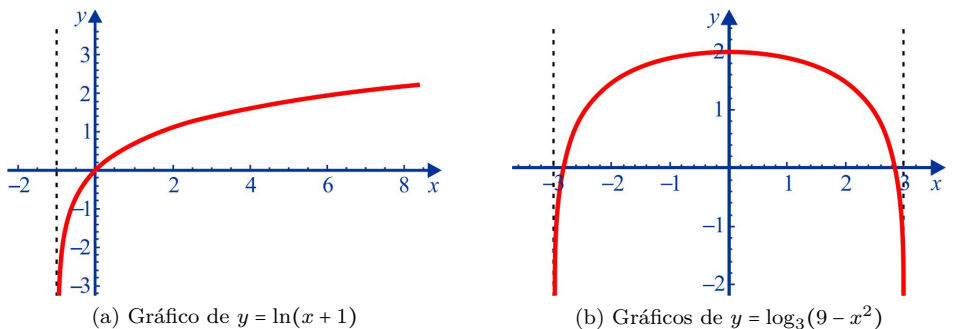



Figura 5.23: Gráficos das funções do Problema 7.

Agora, tente o exercício 5.

Problema 8. Inversa da função logarítmica

Dada a função

$$f(x) = 2\log_2(4x-1),$$

a) Determine a inversa de f.

b) Em um mesmo plano Cartesiano, trace os gráficos de f e de sua inversa.

Solução.

a) Para determinar a inversa, isolamos a variável x na equação $y = f(x)$, como descrito abaixo.

$y = 2\log_2(4x-1)$	Equação original.
$\frac{y}{2} = \log_2(4x-1)$	Dividindo ambos so lados por 2.
$2^{y/2} = 4x-1$	Usando a definição: $c = log_a(b) \Leftrightarrow a^c = b$.
$2^{y/2}+1 = 4x$	Somando 1 aos dois lados.
$\frac{2^{y/2}+1}{4} = x$	Dividindo os dois lados por 4.
$x = \frac{2^{y/2}+1}{4}$	Invertendo o lado dos termos.

Logo, a inversa é dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{2^{y/2}+1}{4}.$$

b) O gráfico de $y = f(x)$ é mostrado em vermelho na Figura 5.24, enquanto o gráfico de $f^{-1}(y)$ é apresentado em verde.

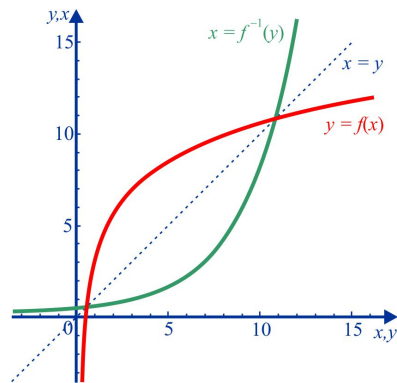



Figura 5.24: Gráficos de $f(x) = 2\log_2(4x-1)$ e $x = f^{-1}(y) = \frac{2^{y/2}+1}{4}$.

Agora, tente o exercício 8.

Exercícios 5.3

1. Sem usar uma calculadora, determine

a) $\log_2(1)$
b) $\log_{1/5}(1)$
c) $\log_5(5)$
d) $\log_{1/2}(1/2)$
e) $\log_5(5^3)$
f) $\log_4(4^{-1/3})$
g) $\log_2(32)$
h) $\log_3(81)$
i) $\log_2(1/8)$
j) $\log_2(0{,}25)$
k) $\log_3(\sqrt{3})$
l) $\log_3(\sqrt[4]{3})$
m) $\log_3(\sqrt[5]{3^3})$
n) $\log_4(2)$
o) $\log_8(2)$
p) $\log_{\sqrt{3}}(3)$
q) $2^{\log_2(5)}$
r) $10^{\log(7)}$
s) $e^{\ln_e(8)}$
t) $e^{\ln(1/3)}$

2. Use uma calculadora científica e a regra de mudança de base para obter valores aproximados de

a) $\log_2(3)$
b) $\log_5(2)$
c) $\log_8(24)$
d) $\log_6(1/12)$

3. Sem usar calculadora, determine

a) $\log(5)+\log(20)$
b) $\log_2(96)+\log_2(1/3)$
c) $\log_3(45)-\log_3(5)$
d) $\log_5(15)-\log_5(75)$
e) $\log_{1/6}(1/3)+\log_{1/6}(1/12)$
f) $\log_{\sqrt{3}}(18)-\log_{\sqrt{3}}(2)$
g) $\ln(e^5)+\ln(e^2)$
h) $\ln(e^5)\cdot\ln(e^2)$

4. Mostre, com um exemplo, que

a) $\log(a+b) \neq \log(a)+\log(b)$
b) $\log(a-b) \neq \log(a)-\log(b)$

5. Determine o domínio das funções abaixo.

a) $f(x) = \log_2(2x-5)$
b) $f(x) = \log(15-4x^2)$
c) $f(x) = \ln(-x^2+2x+3)$

6. Trace, em um mesmo plano, os gráficos de $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3(x)$.

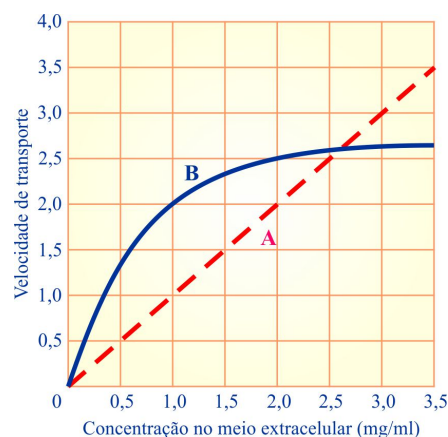
7. Em um mesmo plano, esboce os gráficos de $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \ln(x-2)$ e $h(x) = \ln(1/x)$.

8. Um aparelho que mede ruídos indica a intensidade do som em decibéis (dB). Para relacionar uma medida β, em decibéis, à intensidade I, dada em W/m^2, usamos a função

$$\beta(I) = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

a) Determine a função inversa de β.

b) Usando a inversa, calcule a intensidade de um som de 20 dB.

9. Hemácias de um animal foram colocadas em meio de cultura em vários frascos contendo diferentes concentrações das substâncias A e B, marcadas com isótopo de hidrogênio. Dessa forma os pesquisadores puderam acompanhar a entrada dessas substâncias nas hemácias, como mostrado no gráfico abaixo.

Seja x a concentração de substância B no meio extracelular e y a velocidade de transporte. Observando-se o formato da curva B e os valores de x e y em determinados pontos, podemos concluir que a função que melhor relaciona essas duas grandezas é

a) $y = \frac{4+\log_2(x)}{2}$

b) $y = 1 - \log_2(x+1)$

c) $y = \frac{8}{3}(1 - 2^{-2x})$

d) $y = 3^x - 1$

Respostas dos Exercícios 5.3

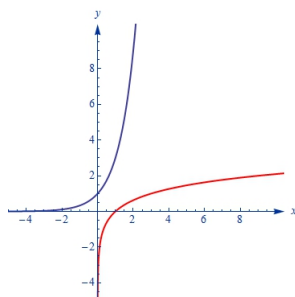
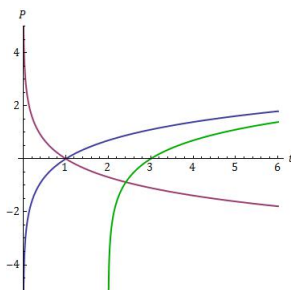
1. a) 0 b) 0 c) 1 d) 1 e) 3 f) $-\frac{1}{3}$ g) 5 h) 4 i) -3 j) -2 k) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{1}{4}$ m) $\frac{3}{5}$ n) $\frac{1}{2}$ o) $\frac{1}{3}$ p) 2 q) 5 r) 7 s) 8 t) $\frac{1}{3}$

2. a) 1,584963 b) 0,4306766 c) 1,528321 d) $-1{,}386853$

3. a) 2 b) 5 c) 2 d) -1 e) 2 f) 4 g) 7 h) 10

4. a) Basta usar $a = 1$ e $b = 1$.
b) Basta usar $a = 2$ e $b = 1$.

5. a) $x > \frac{5}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{15}}{2} < x < \frac{\sqrt{15}}{2}$
c) $-1 < x < 3$

6.

7.

8. a) $I(\beta) = 10^{\beta/10-12}$
b) 10^{-10} W/m^2

9. c

5.4 Equações exponenciais e logarítmicas

Nessa seção, vamos resolver equações que envolvem funções logarítmicas e exponenciais. Entretanto, antes de começarmos, veremos como usar as propriedades dos logaritmos para manipular expressões.

■ Expansão e contração de expressões logarítmicas

Para resolver uma equação logarítmica ou exponencial, devemos isolar a variável x, o que, frequentemente, exige a aplicação das propriedades dos logaritmos. Vejamos, então, alguns exemplos práticos de manipulação de expressões algébricas.

Problema 1. Expansão de expressões logarítmicas

Expanda as expressões abaixo usando as propriedades dos logaritmos.

a) $\log_2(8x)$
b) $\log(7x^5y^2)$
c) $\log_2(\sqrt{2x})$
d) $\log\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}\right)$
e) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^6}{y^4}\right)$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} \log_2(8x) &= \log_2(8) + \log_2(x) && \text{Propriedade 5.} \\ &= \log_2(2^3) + \log_2(x) && \text{Fatoração de 8.} \\ &= 3 + \log_2(x) && \text{Propriedade 3.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \log(7x^5y^2) &= \log(7) + \log(x^5) + \log(y^2) && \text{Propriedade 5.} \\ &= \log(7) + 5\log(x) + 2\log(y) && \text{Propriedade 7.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \log_2(\sqrt{2x}) &= \log_2((2x)^{1/2}) && \text{Propriedade das raízes.} \\ &= \frac{1}{2}\log_2(2x) && \text{Propriedade 7.} \\ &= \frac{1}{2}[\log_2(2) + \log_2(x)] && \text{Propriedade 5.} \\ &= \frac{\log_2(2)}{2} + \frac{\log_2(x)}{2} && \text{Propriedade distributiva.} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\log_2(x)}{2} && \text{Propriedade 2.} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}\right) &= \log\left(\frac{x^{2/3}}{4}\right) && \text{Propriedade das raízes.} \\ &= \log(x^{2/3}) - \log(4) && \text{Propriedade 6.} \\ &= \frac{2}{3}\log(x) - \log(4) && \text{Propriedade 7.} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^6}{y^4}\right) &= \frac{1}{2}[\ln(x^6) - \ln(y^4)] && \text{Propriedade 6.} \\ &= \frac{6\ln(x)}{2} - \frac{4\ln(y)}{2} && \text{Propriedade 7.} \\ &= 3\ln(x) - 2\ln(y) && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Agora, tente o exercício 1.

Problema 2. Contração de expressões logarítmicas

Escreva cada expressão abaixo como o logaritmo de um único termo.

a) $3\log(x+5) - 2\log(x)$

b) $\log_3(x) - \log_3(4x) + \log_3(2)$

c) $\frac{1}{2}[\ln(x-2) + \ln(x+2)]$

d) $2\log(x-1) - \log(x^2-1)$

e) $\log_2(6) + \log_8(x)$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} 3\log(x+5) - 2\log(x) &= \log((x+5)^3) - \log(x^2) && \text{Propriedade 7.} \\ &= \log\left(\frac{(x+5)^3}{x^2}\right) && \text{Propriedade 6.} \end{aligned}$$

b)

Observe que, como a expressão original inclui $\log_3(x)$, já supomos que $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \log_3(x) - \log_3(4x) + \log_3(2) &= \log_3\left(\frac{x \cdot 2}{4x}\right) && \text{Propriedades 5 e 6.} \\ &= \log_3\left(\frac{1}{2}\right) && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\ln(x-2) + \ln(x+2)] &= \frac{1}{2}[\ln((x-2)(x+2)]) && \text{Propriedade 5.} \\ &= \frac{1}{2}[\ln(x^2-4)] && \text{Produto notável.} \\ &= \ln[(x^2-4)^{1/2}] && \text{Propriedade 7.} \\ &= \ln(\sqrt{x^2-4}) && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2\log(x-1) - \log(x^2-1) &= \log((x-1)^2) - \log(x^2-1) && \text{Propriedade 7.} \\ &= \log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2-1}\right) && \text{Propriedade 6.} \\ &= \log\left(\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right) && \text{Produto notável.} \\ &= \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Observe que, como a expressão original inclui $\log(x-1)$, já supomos que $(x-1) \neq 0$.

e)

$$\begin{aligned} \log_2(6) + \log_8(x) &= \log_2(6) + \frac{\log_2(x)}{\log_2(8)} && \text{Mudança de base.} \\ &= \log_2(6) + \frac{\log_2(x)}{3} && \text{Cálculo do logaritmo.} \\ &= \log_2(6) + \log_2(x^{1/3}) && \text{Propriedade 7.} \\ &= \log_2(6\sqrt[3]{x}) && \text{Propriedade 5.} \end{aligned}$$

Agora, tente o exercício 2.

Usando corretamente as propriedades apresentadas nesse capítulo, não é difícil determinar a solução de equações que envolvem funções exponenciais e logarítmicas, como veremos a seguir.

Equações exponenciais

A solução de equações exponenciais e logarítmicas envolve a combinação

Dica
A Propriedade 3 é o caso particular da Propriedade 7 no qual $b = a$.

1. do fato de $\log_a(x)$ ser a inversa de a^x, e vice versa, de modo que valem as Propriedades 3, 4 e 7 dos logaritmos, ou seja,
   a) $\log_a(a^x) = x$;
   b) $a^{\log_a(x)} = x$;
   c) $\log_a(b^x) = x\log_a(b)$;
2. do fato de $\log_a(x)$ e a^x serem injetoras, de modo que
   a) $a^x = a^y$ se e somente se $x = y$;
   b) $\log_a(x) = \log_a(y)$ se e somente se $x = y$;
3. das demais propriedades dos logaritmos e das potências.

Uma estratégia que permite a resolução de um grande número de equações exponenciais é dada no quadro abaixo.

Roteiro para a solução de equações exponenciais

Para resolver uma equação exponencial em relação à variável x,

1. Reescreva a equação de modo a obter

$$a^{\text{expressão com } x} = \text{expressão sem } x$$

ou

$$a^{\text{expressão com } x} = c \cdot b^{\text{outra expressão com } x}$$

Aqui, a, b e c são constantes reais maiores que zero.

2. Aplique o logaritmo aos dois lados da equação.

3. Simplifique a equação usando as Propriedades 3 e 7 do logaritmo.

4. Resolva a equação resultante.

Os problemas abaixo ilustram o emprego dessa estratégia.

Problema 3. Solução de equações exponenciais

Resolva

a) $4^x = 5$
b) $6^{x-1} + 3 = 7$
c) $6e^{5x} = 12$
d) $2^{x^2+5} + 2^4 = 144$
e) $3^{5x+1} = 5^2 \cdot 3^x$
f) $2^{3x-2} - 4^{x+6} = 0$
g) $4^{5-2x} = 3^x$

Solução.

Lembrete
Há várias maneiras de se resolver uma mesma equação exponencial. A sequência de passos mostrada aqui é apenas uma das muitas alternativas. O leitor deve sentir-se livre para investigar outros caminhos para a obtenção da solução.

a)

$4^x = 5$	Equação original.
$\log_4(4^x) = \log_4(5)$	Aplicando $\log_4$ aos dois lados.
$x = \log_4(5)$	Propriedade 3 do logaritmo.
$x = \dfrac{\log(5)}{\log(4)}$	Mudando para a base 10.
$x = 1{,}16096$	Calculando o lado direito.

b)

$$
\begin{aligned}
6^{x-1}+3 &= 7 && \text{Equação original.}\\
6^{x-1} &= 4 && \text{Isolando a função exponencial.}\\
\log(6^{x-1}) &= \log(4) && \text{Aplicando } \log_{10} \text{ aos dois lados.}\\
(x-1)\log(6) &= \log(4) && \text{Propriedade 7 do logaritmo.}\\
x-1 &= \frac{\log(4)}{\log(6)} && \text{Dividindo os dois lados por } \log(6).\\
x &= 1+\frac{\log(4)}{\log(6)} && \text{Isolando } x.\\
x &= 1{,}77371 && \text{Calculando o lado direito.}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
6e^{5x} &= 12 && \text{Equação original.}\\
e^{5x} &= 2 && \text{Dividindo os dois lados por 6.}\\
\ln(e^{5x}) &= \ln(2) && \text{Aplicando ln aos dois lados.}\\
5x &= \ln(2) && \text{Propriedade 3 do logaritmo.}\\
x &= \frac{\ln(2)}{5} && \text{Dividindo os dois lados por 5.}\\
x &= 0{,}13863 && \text{Calculando o lado direito.}
\end{aligned}
$$

d)

Note que 2^4 é um número real constante.

$$
\begin{aligned}
2^{x^2+5}+2^4 &= 144 && \text{Equação original.}\\
2^{x^2+5} &= 144-2^4 && \text{Isolando a função exponencial.}\\
2^{x^2+5} &= 128 && \text{Simplificando } 144-2^4.\\
\log_2(2^{x^2+5}) &= \log_2(128) && \text{Aplicando } \log_2 \text{ aos dois lados.}\\
x^2+5 &= \log_2(128) && \text{Propriedade 3 do logaritmo.}\\
x^2+5 &= 7 && \text{Cálculo de } \log_2(128).\\
x^2 &= 2 && \text{Subtraindo 2 dos dois lados.}\\
x &= \pm\sqrt{2} && \text{Extraindo a raiz quadrada.}
\end{aligned}
$$

A equação tem duas soluções:

$$\sqrt{2} \quad \text{e} \quad -\sqrt{2}.$$

e)

$$
\begin{aligned}
3^{5x+1} &= 5^2\cdot 3^x && \text{Equação original.}\\
\log_3(3^{5x+1}) &= \log_3(5^2\cdot 3^x) && \text{Aplicando } \log_3 \text{ aos dois lados.}\\
\log_3(3^{5x+1}) &= \log_3(5^2)+\log_3(3^x) && \text{Propriedade 5 do logaritmo.}\\
5x+1 &= \log_3(25)+x && \text{Propriedade 3 do logaritmo.}\\
4x &= \log_3(25)-1 && \text{Isolando o termo que envolve } x.\\
x &= \frac{\log_3(25)}{4}-\frac{1}{4} && \text{Dividindo os dois lados por 4.}\\
x &= \frac{\log(25)}{4\log(3)}-\frac{1}{4} && \text{Mudando para a base 10.}\\
x &= 0{,}48249 && \text{Calculando o lado direito.}
\end{aligned}
$$

f)

$2^{3x-2} - 4^{x+6} = 0$	Equação original.
$2^{3x-2} = 4^{x+6}$	Reescrevendo a equação.
$\log_2(2^{3x-2}) = \log_2(4^{x+6})$	Aplicando $\log_2$ aos dois lados.
$3x - 2 = (x+6)\log_2(4)$	Propriedades 3 e 7 do logaritmo.
$3x - 2 = 2(x+6)$	Calculando $\log_2(4)$.
$3x - 2 = 2x + 12$	Propriedade distributiva.
$x = 14$	Isolando x.

g)

$4^{5-2x} = 3^x$	Equação original.
$\log(4^{5-2x}) = \log(3^x)$	Aplicando $\log_{10}$ aos dois lados.
$(5-2x)\log(4) = x\log(3)$	Propriedade 7 do logaritmo.
$5\log(4) - 2x\log(4) = x\log(3)$	Propriedade distributiva.
$5\log(4) = 2x\log(4) + x\log(3)$	Isolando os termos que envolvem x.
$5\log(4) = x[2\log(4) + \log(3)]$	Pondo x em evidência.
$x[2\log(4) + \log(3)] = 5\log(4)$	Invertendo os termos.
$x = \dfrac{5\log(4)}{2\log(4) + \log(3)}$	Isolando x
$x = 1{,}79052$	Calculando o lado direito.

Agora, tente o exercício 3.

Problema 4. Solução de uma equação exponencial

Resolva a equação $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$.

Solução.

Para resolver essa equação, vamos substituir e^x por uma variável temporária y. Nesse caso,

$$e^{2x} = (e^x)^2 = y^2,$$

de modo que nossa equação pode ser rescrita como

$$y^2 + 2y - 8 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bháskara, com $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$, obtemos

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2}.$$

Logo, as raízes da equação em y são

$$y_1 = \frac{-2+6}{2} = 2 \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{-2-6}{2} = -4.$$

Lembrando, então, que $y = e^x$, temos duas possibilidades.

1. Para $y_1 = 2$:
$$e^x = 2 \quad \Rightarrow \quad \ln(e^x) = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad x = \ln(2).$$

2. Para $y_2 = -4$:
$$e^x = -4, \qquad \text{(Impossível, pois } e^x > 0\text{)}.$$

Portanto, a única solução da equação é $x = \ln(2) \approx 0{,}69315$.

Equações logarítmicas

Para resolvermos equações logarítmicas, usamos uma estratégia semelhante àquela empregada para as equações exponenciais.

Roteiro para a solução de equações logarítmicas

Para resolver uma equação logarítmica na variável x,

1. **Reescreva a equação de modo a obter**
$$\log_a(\text{expressão com } x) \;=\; \text{expressão sem } x$$
ou
$$\log_a(\text{expressão com } x) \;=\; \log_a(\text{outra expressão com } x)$$
2. **Eleve a a cada um dos dois lados.**
3. **Simplifique a equação usando a Propriedade 4 do logaritmo.**
4. **Resolva a equação resultante.**

Vejamos como aplicar esse roteiro a problemas práticos.

Problema 5. Solução de equações logarítmicas

Resolva

a) $\log_2(x) = \frac{3}{2}$

b) $\log_2(5x) + 3 = 8$

c) $\log(2x + 100) = 3$

d) $\log_2(4x) - \log_2(12) = 5$

e) $\ln(5x - 8) = \ln(x + 4)$

f) $\dfrac{\log(4 - 8x)}{\log(2)} = 6$

g) $\log_3(3x + 1) - 3 = \log_3(x - 4) + 1$

h) $\log_2(8x) = 6\log_8(2x) + 2$

Solução.

Lembrete
Também há várias estratégias para se encontrar a solução de uma equação logarítmica. Veja se você é capaz de resolver de outras maneiras as equações do Problema 5.

a)

$\log_2(x) = 3/2$	Equação original.
$2^{\log_2(x)} = 2^{3/2}$	Elevando 2 a cada um dos lados.
$x = 2^{3/2}$	Propriedade 4 do logaritmo.
$x = 2{,}82843$	Calculando a potência.

b)

$\log_2(5x) + 3 = 8$	Equação original.
$\log_2(5x) = 5$	Isolando o logaritmo.
$2^{\log_2(5x)} = 2^5$	Elevando 2 a cada um dos lados.
$5x = 32$	Propriedade 4 do logaritmo.
$x = 32/5$	Dividindo ambos os lados por 5.

c)

$\log(2x + 100) = 3$	Equação original.
$10^{\log(2x+100)} = 10^3$	Elevando 10 a cada um dos lados.
$2x + 100 = 1000$	Propriedade 4 do logaritmo.
$2x = 900$	Subtraindo 100 dos dois lados.
$x = 450$	Dividindo ambos os lados por 2.

d)

$\log_2(4x) - \log_2(12) = 5$	Equação original.
$\log_2(4x) = 5 + \log_2(12)$	Isolando o logaritmo que envolve x.
$2^{\log_2(4x)} = 2^{5+\log_2(12)}$	Elevando 2 a cada um dos lados.
$2^{\log_2(4x)} = 2^5 \cdot 2^{\log_2(12)}$	Propriedade das potências.
$4x = 2^5 \cdot 12$	Propriedade 4 do logaritmo.
$x = 32 \cdot 12/4$	Dividindo ambos os lados por 4.
$x = 96$	Simplificando o resultado.

e)

$\ln(5x - 8) = \ln(x + 4)$	Equação original.
$e^{\ln(5x-8)} = e^{\ln(x+4)}$	Elevando e a cada um dos lados.
$5x - 8 = x + 4$	Propriedade 4 do logaritmo.
$4x = 12$	Reescrevendo a equação.
$x = 3$	Dividindo ambos os lados por 4.

Conferindo a resposta

$$\ln(5 \cdot 3 - 8) = \ln(3 + 4)$$
$$\ln(7) = \ln(7) \quad \text{Ok!}$$

f)

$\dfrac{\log(4 - 8x)}{\log(2)} = 6$	Equação original.
$\log(4 - 8x) = 6\log(2)$	Multiplicando os dois lados por $\log(2)$.
$\log(4 - 8x) = \log(2^6)$	Propriedade 7 do logaritmo.
$10^{\log(4-8x)} = 10^{\log(2^6)}$	Elevando 10 a cada um dos lados.
$4 - 8x = 2^6$	Propriedade 4 do logaritmo.
$-8x = 60$	Subtraindo 4 de ambos os lados.
$x = -15/2$	Dividindo ambos os lados por -8.

Conferindo a resposta

$$\frac{\log(4 - 8 \cdot (-15/2))}{\log(2)} = 6$$
$$\frac{\log(64)}{\log(2)} = 6$$
$$\log_2(64) = 6 \quad \text{Ok!}$$

g)

$$\begin{aligned}
\log_3(3x+1)-3 &= \log_3(x-4)+1 && \text{Equação original.}\\
\log_3(3x+1)-\log_3(x-4) &= 4 && \text{Isolando os termos que envolvem } x.\\
\log_3\left(\frac{3x+1}{x-4}\right) &= 4 && \text{Propriedade 6 do logaritmo.}\\
3^{\log_3\left(\frac{3x+1}{x-4}\right)} &= 3^4 && \text{Elevando 3 a cada um dos lados.}\\
\frac{3x+1}{x-4} &= 81 && \text{Propriedade 4 do logaritmo.}\\
3x+1 &= 81(x-4) && \text{Multiplicando os dois lados por } x-4.\\
3x+1 &= 81x-324 && \text{Propriedade distributiva.}\\
-78x &= -325 && \text{Isolando o termo que envolve } x.\\
x &= 25/6 && \text{Dividindo ambos os lados por } -78.
\end{aligned}$$

Conferindo a resposta

$$\begin{aligned}
\log_3(3\cdot\tfrac{25}{6}+1)-3 &= \log_3(\tfrac{25}{6}-4)+1\\
\log_3(\tfrac{81}{6})-3 &= \log_3(\tfrac{1}{6})+1\\
4-\log_3(6)-3 &= 0-\log_3(6)+1\\
1-\log_3(6) &= 1-\log_3(6) \quad \text{Ok!}
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\log_2(8x) &= 6\log_8(2x)+2 && \text{Equação original.}\\
\log_2(8x) &= 6\frac{\log_2(2x)}{\log_2(8)}+2 && \text{Mudando para a base 2.}\\
\log_2(8x) &= 6\frac{\log_2(2x)}{3}+2 && \text{Calculando } \log_2(8).\\
\log_2(8x) &= 2\log_2(2x)+2 && \text{Simplificando o lado direito.}\\
\log_2(8x) &= \log_2((2x)^2)+2 && \text{Propriedade 7 do logaritmo.}\\
\log_2(8x)-\log_2(4x^2) &= 2 && \text{Isolando os termos que envolvem } x.\\
\log_2\left(\frac{8x}{4x^2}\right) &= 2 && \text{Propriedade 6 do logaritmo.}\\
\log_2\left(\frac{2}{x}\right) &= 2 && \text{Simplificando o lado esquerdo.}\\
2^{\log_2\left(\frac{2}{x}\right)} &= 2^2 && \text{Elevando 2 a cada um dos lados.}\\
\frac{2}{x} &= 4 && \text{Propriedade 4 do logaritmo.}\\
2 &= 4x && \text{Multiplicando os dois lados por } x.\\
4x &= 2 && \text{Invertendo os lados.}\\
x &= 1/2 && \text{Dividindo ambos os lados por 4.}
\end{aligned}$$

Conferindo a resposta

$$\begin{aligned}
\log_2(8\cdot 1/2) &= 6\log_8(2\cdot 1/2)+2\\
\log_2(4) &= 6\log_8(1)+2\\
2 &= 6\cdot 0+2 \quad \text{Ok!}
\end{aligned}$$

Agora, tente o exercício 4.

Problema 6. Solução de uma equação logarítmica

Resolva $\log(2x-1)+\log(x)=0$.

Solução.

Seguindo o roteiro apresentado acima, escrevemos

$$\begin{aligned}
\log(2x-1)+\log(x) &= 0 && \text{Equação original.}\\
\log((2x-1)x) &= 0 && \text{Propriedade 5 do logaritmo.}\\
10^{\log((2x-1)x)} &= 10^0 && \text{Elevando 10 a cada um dos lados.}\\
(2x-1)x &= 1 && \text{Propriedade 4 do logaritmo.}\\
2x^2-x &= 1 && \text{Propriedade distributiva.}\\
2x^2-x-1 &= 0 && \text{Reescrevendo a equação.}
\end{aligned}$$

Para resolver a equação quadrática $2x^2-x-1=0$, aplicamos a fórmula de Bháskara, usando $\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9$. Obtemos, assim,

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}.$$

Logo, as raízes da equação são

$$x_1=\frac{1+3}{4}=1 \qquad \text{e} \qquad x_2=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Como a equação original envolve o termo $\log(x)$, que não está definido para $x=-\frac{1}{2}$, concluímos que a única solução da equação é $x=1$.

Conferindo a resposta

$$\log(2\cdot 1-1)+\log(1)=0$$
$$\log(1)+\log(1)=0 \quad \text{Ok!}$$

Problema 7. Solução de uma equação logarítmica

Resolva $2\log(x)=\log(3x)+\log(x-4)$.

Solução.

Usando novamente o roteiro, temos

$$\begin{aligned}
2\log(x) &= \log(3x)+\log(x-4) && \text{Equação original.}\\
2\log(x) &= \log(3x(x-4)) && \text{Propriedade 5 do logaritmo.}\\
\log(x^2) &= \log(3x(x-4)) && \text{Propriedade 7 do logaritmo.}\\
10^{\log(x^2)} &= 10^{\log(3x(x-4))} && \text{Elevando 10 a cada um dos lados.}\\
x^2 &= 3x(x-4) && \text{Propriedade 4 do logaritmo.}\\
x^2 &= 3x^2-12x && \text{Propriedade distributiva.}\\
2x^2-12x &= 0 && \text{Reescrevendo a equação.}\\
x(2x-12) &= 0 && \text{Fatoração do lado esquerdo.}
\end{aligned}$$

Como o produto de dois fatores só é zero se um deles for zero, concluímos que

$$x=0 \qquad \text{ou} \qquad 2x-12=0.$$

Nesse último caso, temos

$$2x-12=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=12 \quad\Rightarrow\quad x=6.$$

Logo, as raízes da equação quadrática são

$$x_1=0 \qquad \text{e} \qquad x_2=6.$$

Como a equação original envolve o termo $\log(x-4)$, que só está definido para $x>4$, a única solução é $x=6$.

Conferindo a resposta

$$2\log(6)=\log(3\cdot 6)+\log(6-4)$$
$$\log(6^2)=\log(18)+\log(2)$$
$$\log(36)=\log(18\cdot 2) \quad \text{Ok!}$$

■ Erros a evitar na manipulação de logaritmos

As propriedades dos logaritmos são frequentemente usadas de forma indevida. A Tabela 5.8 mostra os casos mais comuns de engano na manipulação dessas propriedades, apresentando o motivo de cada erro.

Tabela 5.8: Aplicações incorretas das propriedades do logaritmo.

Exemplo com erro	Motivo do erro	Expressões corretas semelhantes
$\log(x+5) = \log(x) + \log(5)$	Não há propriedade para $\log_c(a+b)$	$\log(x) + \log(5) = \log(5x)$
$\log(x-8) = \dfrac{\log(x)}{\log(8)}$	Não há propriedade para $\log_c(a-b)$	$\dfrac{\log(x)}{\log(8)} = \log_8(x)$
$\log(3) \cdot \log(x) = \log(3x)$	$\log_c(a) \cdot \log_c(b) = \log_c(b^{\log_c(a)})$	$\log(3) \cdot \log(x) = \log(x^{\log(3)})$ $\log(3x) = \log(3) + \log(x)$
$\dfrac{\log(6x)}{\log(3)} = \log\left(\dfrac{6x}{3}\right) = \log(2x)$	$\dfrac{\log_c(a)}{\log_c(b)} = \log_b(a)$	$\dfrac{\log(6x)}{\log(3)} = \log_3(6x)$ $\log\left(\dfrac{6x}{3}\right) = \log(6x) - \log(3)$
$\log(6-2x) = \log((6-2)x) = \log(4x)$	$a - b \cdot d \neq (a-b) \cdot d$	$\log((6-2)x) = \log(6x - 2x)$
$\log(2x + x^2) = \log((3x)^2) = 2\log(3x)$	$a + b^k \neq (a+b)^k$	$2\ \log(3x) = \log((3x)^2) = \log(9x^2)$
$[\log(x)]^2 = 2\ \log(x)$	Não há propriedade para $[\log_c(a)]^k$	$2\ \log(x) = \log(x^2)$
$2^{\log_2(x)+3} = 2^{\log_2(x+3)} = x+3$	$\log_c(a) + b \neq \log_c(a+b)$	$2^{\log_2(x)+3} = 2^{\log_2(x)} \cdot 2^3 = 8x$

Esses mesmos erros podem aparecer de forma mais sutil, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 1. Erros na manipulação de logaritmos

Para resolver equações exponenciais e logarítmicas, levamos em conta o fato de essas duas funções serem injetoras. Assim,

- se $a^x = a^y$, então $x = y$;
- se $\log_a(x) = \log_a(y)$, então $x = y$.

Entretanto, é preciso tomar cuidado quando combinamos as propriedades da função logarítmica com o fato de ela ser injetiva. O exemplo abaixo mostra um erro cometido corriqueiramente. Será que você consegue detectar o que não está correto?

$$\log(x) + \log(3) = \log(y) \qquad \Rightarrow \qquad x + 3 = y. \qquad \text{Errado!}$$

Veja se você acertou, comparando a resposta acima com a conclusão correta, que é:

$$\log(x) + \log(3) = \log(y) \qquad \Rightarrow \qquad \log(x \cdot 3) = \log(y) \qquad \Rightarrow \qquad 3x = y.$$

Também é comum encontrar a seguinte dedução errada:

$$\log_2(5) \cdot \log_2(x) = \log_2(y) \qquad \Rightarrow \qquad 5x = y. \qquad \text{Errado!}$$

Nesse caso, o correto é fazer

$$\log_2(5) \cdot \log_2(x) = \log_2(y) \quad \Rightarrow \quad \log_2(x^{\log_2(5)}) = \log_2(y) \quad \Rightarrow \quad x^{2,321928} = y.$$

Exercícios 5.4

1. Usando as propriedades dos logaritmos, expanda as expressões abaixo.

a) $\log(4x)$
b) $\log_2(16x^3)$
c) $\log_3(yx^3)$
d) $\log_2(\sqrt{xy})$
e) $\log_2(\frac{8}{x^2})$
f) $\log_2(\frac{x}{w^5z^2})$
g) $\log_5(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}})$
h) $\log_3(x\sqrt{x})$
i) $\log_3(\sqrt[3]{x^2w})$
j) $\ln(\sqrt[3]{y/w^4})$
k) $\log(6/\sqrt[3]{x^2})$
l) $\log_2(\sqrt{x(x+1)})$

2. Usando as propriedades dos logaritmos, escreva cada expressão abaixo como o logaritmo de um único termo.

a) $\log_2(x) - \log_2(y)$
b) $3\log_2(x) + 2\log_2(5)$
c) $2\log(3x) + \log(x+1)$
d) $\frac{\log_2(x) - 3\log_2(z)}{2}$
e) $-2\log_4(x)$
f) $\frac{1}{3}\log_2(x)$
g) $\log_2(6-x) - \frac{1}{2}\log_2(x)$
h) $\frac{1}{2}\log_2(x) + 2\log_2(y) - \frac{1}{3}\log_2(z)$
i) $\frac{4}{3}\log_2(x-1) - \frac{1}{3}\log_2(x+1)$
j) $3\log_4(2x+3) - \log_2(x+2)$
k) $3[\ln(3) + \ln(x/2)]$
l) $2[\log(x+3) - \log(\frac{x}{2})] - \frac{3}{2}\log(x)$

3. Resolva as equações.

a) $3^{-x} = \frac{1}{81}$
b) $e^{3x-1} = 100$
c) $4^{3x+2} = 5^{x-1}$
d) $3^{2x-1} = 4^{x+2}$
e) $\frac{100}{1+2^{3-x/2}} = 20$
f) $3^{3x+4} = 27^{2x-2}$
g) $\frac{50}{1+3\cdot 2^x} = 2$
h) $4^{2x-1} = 8^{3x+2}$
i) $5^{2x+3} = 50$
j) $3^x = 2^x + 2^{x+1}$
k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 64$
l) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$
m) $5^{2x-7} = 125$
n) $3^{x+1} = 2^{2x-3}$
o) $\frac{20}{10+2^x} = 5$
p) $3^{2x-1} = 5^x$
q) $\frac{162}{3^{3x-7}} = 2$
r) $4^{2x-1} = 5^{x+1}$
s) $2^{4x-5} = 8^{1-2x}$
t) $3^{5x-2} = 9^4$

4. Resolva as equações.

a) $\ln(3x-1) = 2$
b) $\log_2(2x+3) + 1 = \log_2(x-2) + 5$
c) $\log_3(x+19) - 1 = 3 + \log_3(x-1)$
d) $\log_2(4x) = \log_4(x) + 7$
e) $\log_{16}(x-2) + \log_{16}(x+1) = 1/2$
f) $\log_{1/3}(2x^2 - 9x + 4) = -2$
g) $\log_3(x+2) - \log_{1/3}(x-6) = \log_3(2x-5)$
h) $2\log(x) = \log(2) + \log(x+4)$
i) $\log(10x) - \log(4-x) = 2$
j) $\log_{25}(2x-1) = 1/2$
k) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = 1$
l) $\log_4(x) + \log_3(x) = 5$
m) $\log_5(x-2) - 3 = \log_5(4x+3) - 1$
n) $\log(4x+1) - 2\log(3) = 3\log(2) + \log(x/12)$
o) $\log_2(3x) = \log_4(8x^2+9)$
p) $2\log_2(x) = \log_2(4x+8) - \log_2(4)$
q) $2\log_4(6-x) = \log_2(3x) - \log_2(6)$

5. As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes por $A(t) = \log_8(1+t)^6$ e $B(t) = \log_2(t+1) + 2$, em que a variável t representa o tempo em anos contado a partir do último censo. Determine o instante em que a população de uma cidade é igual à população da outra.

Respostas dos Exercícios 5.4

1.
a) $\log(4) + \log(x)$
b) $4 + 3\log_2(x)$
c) $\log_3(y) + 3\log_3(x)$
d) $\frac{\log_2(x)+\log_2(y)}{2}$
e) $3 - 2\log_2(x)$
f) $\log_2(x) - 5\log_2(w) - 3\log_2(z)$
g) $\log_5(x+2) - \frac{\log_5(x^2+1)}{2}$
h) $\frac{3}{2}\log_3(x)$
i) $\frac{2}{3}\log_3(x) + \frac{1}{3}\log_3(w)$
j) $\frac{1}{3}\ln(y) - \frac{4}{3}\ln(w)$
k) $\log(6) - \frac{2}{3}\log(x)$
l) $\frac{1}{2}\log_2(x) + \frac{1}{2}\log_2(x+1)$

2.
a) $\log_2(x/y)$
b) $\log_2(25x^3)$
c) $\log(9x^2(x+1))$
d) $\log_2(\sqrt{x/z^3})$
e) $\log_4(1/x^2)$
f) $\log_2(\sqrt[3]{x})$
g) $\log_2(\frac{6-x}{\sqrt{x}})$
h) $\log_2\left(\frac{y^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{z}}\right)$
i) $\log_2\left(\sqrt[3]{\frac{(x-1)^4}{x+1}}\right)$
j) $\log_2\left(\frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{x+2}\right)$
k) $\ln(\frac{27}{8}x^3)$
l) $\log\left[\frac{4(x+3)^2}{\sqrt{x^7}}\right]$

3. a) $x = 4$
b) $x = \frac{1+\ln(100)}{3} \approx 1{,}8684$
c) $x \approx -1{,}71882$
d) $x \approx 4{,}77378$
e) $x = 2$
f) $x = 10/3$
g) $x = 3$
h) $x = -8/5$
i) $x = -1 + \frac{1}{2}\log_5(10)$
j) $x = -\frac{\log_2(3)}{1-\log_2(3)}$
k) $x = -7$
l) $x = -3$
m) $x = 5$
n) $x = \frac{-1-3\log_3(2)}{1-2\log_3(2)}$
o) Não há solução.
p) $x = \frac{\log(3)}{2\log(3)-\log(5)}$
q) $x = \frac{11}{3}$
r) $x = \frac{2\log(2)+\log(5)}{4\log(2)-\log(5)}$
s) $x = \frac{4}{5}$
t) $x = 2$

4. a) $x = (1+e^2)/3 \approx 2{,}79635$
b) $x = 5/2$
c) $x = 5/4$
d) $x = 1024$
e) $x = 3$
f) $x = 5$ ou $x = -1/2$
g) $x = 7$
h) $x = 4$
i) $x = 40/11$
j) $x = 3$
k) $x = \frac{1+\sqrt{9+4e}}{2}$
l) $x = 10^{\frac{5\log(3)\log(4)}{\log(3)+\log(4)}}$
m) $x = -\frac{7}{9}$
n) $x = \frac{1}{2}$
o) $x = 3$
p) $x = 2$
q) $x = 4$

5. 3 anos

5.5 Problemas com funções exponenciais e logarítmicas

O número de aplicações práticas que envolvem as funções exponenciais e logarítmicas é grande. Modelos matemáticos populacionais, por exemplo, costumam representar o tamanho da população ao longo do tempo por uma função exponencial. Por outro lado, se queremos representar quantidades que podem assumir valores tão pequenos quanto 10^{-5} e valores tão grandes como 10^{10}, como a intensidade de terremotos ou a "altura" do som, é melhor utilizar uma escala logarítmica. Nessa seção, vamos analisar algumas aplicações interessantes envolvendo tópicos que vão da biologia à física.

Problema 1. População de microrganismos

Uma colônia de microrganismos cresce de forma proporcional ao tamanho da população. Isso significa que a taxa de crescimento da colônia em um instante t é dada por $k \cdot P(t)$, em que $P(t)$ é o número de microrganismos presentes no instante t, e k é uma constante. A função que possui essa propriedade é a exponencial. Assim sendo, $P(t)$ pode ser escrita como

$$P(t) = P_0 a^{bt}.$$

em que P_0 e b são constantes reais.

Suponha que uma colônia tenha, inicialmente, 20 microrganismos. Se a população da colônia dobra a cada 1h15, determine

a) uma função na forma $P(t) = P_0 2^{bt}$ que expresse o número de microrganismos da colônia no instante t, em horas;

b) o número aproximado de microrganismos após 7 h;

c) o instante em que a colônia terá 2000 microrganismos.

Solução.

a) Como sabemos que $P(0) = 20$, podemos escrever

$$20 = P_0 2^{b \cdot 0} \qquad \Rightarrow \qquad 20 = P_0 \cdot 1 \qquad \Rightarrow \qquad P_0 = 20.$$

Logo, $P(t) = 20 \cdot 2^{bt}$. Usando, agora, o fato de que $P(1{,}25) = 2P_0$, podemos encontrar a constante b fazendo:

$$\begin{aligned}
40 &= 20 \cdot 2^{b \cdot 1{,}25} && \text{Equação } P(1{,}25) = 40.\\
2 &= 2^{1{,}25b} && \text{Dividindo os dois lados por 20.}\\
\log_2(2) &= \log_2(2^{1{,}25b}) && \text{Aplicando } \log_2 \text{ aos dois lados.}\\
1 &= 1{,}25b && \text{Propriedades 2 e 3 do logaritmo.}\\
\frac{1}{1{,}25} &= b && \text{Dividindo ambos os lados por 1,25.}
\end{aligned}$$

Assim, $b = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$, de modo que

$$P(t) = 20 \cdot 2^{0{,}8t}.$$

b) $P(7) = 20 \cdot 2^{0{,}8 \cdot 7} \approx 970$ microrganismos.

c) A população atingirá 2000 microrganismos quando $P(t) = 2000$, ou seja,

$$\begin{aligned}
20 \cdot 2^{0{,}8t} &= 2000 && \text{Equação } P(t) = 2000.\\
2^{0{,}8t} &= 100 && \text{Dividindo os dois lados por 20.}\\
\log(2^{0{,}8t}) &= \log(100) && \text{Aplicando } \log_{10} \text{ aos dois lados.}\\
0{,}8t\log(2) &= \log(100) && \text{Propriedade 7 do logaritmo.}\\
t &= \frac{\log(100)}{0{,}8\log(2)} && \text{Dividindo ambos os lados por } 0{,}8\log(2).\\
t &= 8{,}3 && \text{Calculando a expressão do lado direito.}
\end{aligned}$$

Logo, a colônia terá 2000 microrganismos 8,3h (ou 8h18) após o instante de início da observação.

Agora, tente o exercício 14.

Problema 2. Idade de uma múmia

Os vegetais e a maioria dos animais vivos contêm uma concentração de carbono 14 (^{14}C) semelhante àquela encontrada na atmosfera. Os vegetais os absorvem quando consomem dióxido de carbono durante a fotossíntese. Já a distribuição entre os animais é feita através da cadeia alimentar. Quando um ser vivo morre, ele para de repor o carbono 14, de modo que as quantidades desse elemento começam a decair.

Em um determinado instante, a taxa de desintegração do ^{14}C é proporcional à quantidade do elemento que ainda não se desintegrou. Neste caso, o decrescimento – ou *decaimento* – da quantidade do isótopo é fornecido por uma função exponencial (com expoente negativo) que tem a forma

$$C(t) = C_0 a^{bt}.$$

Nessa expressão, $C(t)$ representa a quantidade da substância no instante t, P_0 é a quantidade inicial (ou seja, no instante $t = 0$) e b é uma constante que depende do isótopo.

A meia-vida de um elemento radioativo é o intervalo de tempo necessário para que a concentração do elemento decaia para a metade do valor encontrado em um dado instante inicial. Sabendo que a meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos,

a) encontre uma função na forma $C(t) = C_0 2^{bt}$ que forneça a concentração de ^{14}C em um ser morto, com relação ao tempo t, em anos, contado desde a sua morte;

b) determine a idade de uma múmia egípcia que tem 70% da concentração de carbono 14 encontrada nos seres vivos atualmente.

Solução.

a) Se a meia-vida do ^{14}C é de 5730 anos, então a concentração após 5730 anos da data da morte de um ser é igual à metade da concentração observada no instante do falecimento, ou seja, $C(5730) = \frac{C_0}{2}$. Dessa forma,

$$C_0 \cdot 2^{b \cdot 5730} = \frac{C_0}{2} \qquad \text{Equação } C(5730) = \frac{C_0}{2}.$$

$$2^{b \cdot 5730} = \frac{1}{2} \qquad \text{Dividindo os dois lados por } C_0.$$

$$2^{b \cdot 5730} = 2^{-1} \qquad \text{Reescrevendo o lado direito.}$$

$$5730b = -1 \qquad \text{Igualando os expoentes } (2^x \text{ é injetora}).$$

$$b = -\frac{1}{5730} \qquad \text{Dividindo ambos os lados por 5730.}$$

Logo,

$$C(t) = C_0 \cdot 2^{-t/5730}.$$

b) Para encontrar a idade da múmia, vamos descobrir em que instante t a quantidade de ^{14}C corresponde a 70% do que continha o nobre egípcio quando estava vivo. Para tanto, fazemos

$$C_0 \cdot 2^{-t/5730} = 0{,}7C_0 \qquad \text{Equação } C(t) = 0{,}7C_0.$$

$$2^{-t/5730} = 0{,}7 \qquad \text{Dividindo os dois lados por } C_0.$$

$$\log(2^{-t/5730}) = \log(0{,}7) \qquad \text{Aplicando log aos dois lados.}$$

$$-\frac{t}{5730}\log(2) = \log(0{,}7) \qquad \text{Propriedade 7 do logaritmo.}$$

$$t = -5730\frac{\log(0{,}7)}{\log(2)} \qquad \text{Multiplicando ambos os lados por } -\frac{5730}{\log(2)}.$$

$$t = 2948{,}5 \qquad \text{Calculando a expressão do lado direito.}$$

Portanto, a múmia tem cerca de 2948 anos.

Agora, tente o exercício 13.

Problema 3. Resfriamento de uma lata

Uma lata foi retirada de um ambiente no qual a temperatura era igual a $T_a = 25°$C e posta em uma geladeira cuja temperatura interna era $T_r = 5°$C. A partir daquele momento, a temperatura dentro da lata passou a ser dada pela função

$$T(t) = T_r + (T_a - T_r)2^{-bt}.$$

em que t é o tempo (em horas). Sabendo que, depois de manter a lata por 2 horas na geladeira, a temperatura do líquido em seu interior atingiu 15°C,

a) Determine a constante b e escreva a fórmula de $T(t)$.

b) Trace o gráfico de $T(t)$ para $t \in [0,10]$.

Solução.

a) Substituindo os valores de T_a e T_r na expressão de $T(t)$, obtemos

$$T(t) = 5 + (25 - 5)2^{-bt} \quad \Rightarrow \quad T(t) = 5 + 20 \cdot 2^{-bt}.$$

Como $T(2) = 15°C$, temos

$$\begin{aligned}
5 + 20 \cdot 2^{-b \cdot 2} &= 15 && T(2) = 15. \\
20 \cdot 2^{-2b} &= 10 && \text{Subtraindo 5 dos dois lados.} \\
2^{-2b} &= 1/2 && \text{Dividindo os dois lados por 20.} \\
2^{-2b} &= 2^{-1} && \text{Escrevendo } \tfrac{1}{2} \text{ como } 2^{-1}. \\
-2b &= -1 && \text{Igualando os expoentes } (2^x \text{ é injetora}). \\
b &= 1/2 && \text{Dividindo os dois lados por } -2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$T(t) = 5 + 20 \cdot 2^{-t/2}.$$

b) De posse da expressão de T, montamos a Tabela 5.9, composta pelos pares $(t, T(t))$. Com base nos pontos da tabela, traçamos o gráfico mostrado na Figura 5.25. Note a presença de uma assíntota horizontal em $T = 5°C$, indicando que a temperatura da lata não pode ser menor que a temperatura da geladeira.

Tabela 5.9: Dados do Problema 3.

t	T(t)
0	25
2	15
4	10
6	7,5
8	6,25
10	5,625

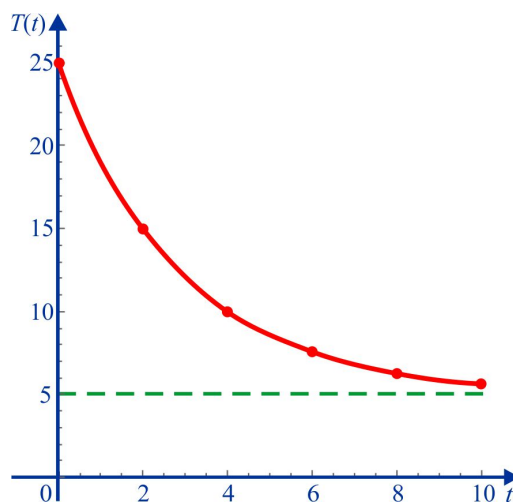



Figura 5.25: Gráfico de $T(t) = 5 + 20 \cdot 2^{-t/2}$.

Agora, tente o exercício 16.

Problema 4. *Altura* do som

A intensidade de um som, denotada por I, está relacionada à energia transmitida pela onda sonora. No sistema internacional de unidades, I é fornecida em watts por metro quadrado (W/m^2).

Um som é dito audível se sua intensidade é superior a $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Por outro lado, há ocasiões em que somos submetidos a sons que chegam a 10^{12} W/m^2. Dada

essa grande magnitude dos sons que ouvimos, quando nos referimos à "altura" de um som, costumamos utilizar como unidade o decibel (dB), em lugar de W/m^2.

Para converter a intensidade I ao nível correspondente em decibéis, dado por β, usamos a fórmula

$$\beta(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

a) Se um som de 90 dB já é suficiente para causar danos ao ouvido médio, um amplificador de som de uma banda de rock, ligado a 5×10^{-1} W/m^2, será capaz de prejudicar a audição de um incauto fã?

b) A que intensidade I, em W/m^2, corresponde o som usual de uma conversa, que costuma atingir 40 dB?

Solução.

a) O amplificador emite um som a

$$\begin{aligned}\beta(5\cdot 10^{-1}) &= 10\log\left(\frac{5\cdot 10^{-1}}{10^{-12}}\right)\\ &= 10\log(5\cdot 10^{11})\\ &= 10[\log(5)+\log(10^{11})]\\ &= 10[\log(5)+11]\\ &\approx 117 \text{ dB}\end{aligned}$$

Logo, o som da banda ultrapassa 90 dB, sendo prejudicial à audição.

b) Se a conversa atinge 40 dB, então

$$\begin{aligned}10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) &= 40 && \text{Equação } \beta(I)=40.\\ \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) &= 4 && \text{Dividindo ambos os lados por 10.}\\ 10^{\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)} &= 10^4 && \text{Elevando 10 a cada um dos lados.}\\ \frac{I}{10^{-12}} &= 10^4 && \text{Propriedade 4 do logaritmo.}\\ I &= 10^4\cdot 10^{-12} && \text{Multiplicando os dois lados por } 10^{-12}.\\ I &= 10^{-8} && \text{Simplificando o resultado.}\end{aligned}$$

Assim, a intensidade da conversa é igual a 10^{-8} W/m^2.

Agora, tente o exercício 3.

Problema 5. Magnitude de terremotos

A magnitude de um terremoto, M, medida na escala Richter, é função da energia liberada, E, em Joules, e é dada pela seguinte fórmula:

$$M(E) = \frac{2}{3}\log(E) - 2{,}93.$$

a) Qual a energia liberada por um terremoto que atingiu magnitude 7,5 na escala Richter?

b) Se as magnitudes de dois terremotos diferem por um ponto na escala Richter, qual a razão entre os valores da energia liberada?

Solução.

a) Se o terremoto atingiu 7,5 pontos na escala Richter, então

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\log(E) - 2{,}93 &= 7{,}5 && \text{Equação } M(E) = 7{,}5.\\
\frac{2}{3}\log(E) &= 10{,}43 && \text{Somando 2,93 aos dois lados.}\\
\log(E) &= 15{,}645 && \text{Multiplicando os dois lados por } \tfrac{3}{2}.\\
10^{\log(E)} &= 10^{15{,}645} && \text{Elevando 10 a cada um dos lados.}\\
E &= 10^{15{,}645} && \text{Propriedade 4 do logaritmo.}
\end{aligned}$$

Portanto, $E = 10^{15{,}645} \approx 4{,}416 \times 10^{15}$ J.

b) Suponhamos que a intensidade do terremoto mais forte seja E_1 e a intensidade do terremoto menos potente seja E_2. Nesse caso, temos

$$M(E_1) = M(E_2) + 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\log(E_1) - 2{,}93 &= \frac{2}{3}\log(E_2) - 2{,}93 + 1 && \text{Equação } M(E_1) = M(E_2) + 1.\\
\frac{2}{3}\log(E_1) &= \frac{2}{3}\log(E_2) + 1 && \text{Somando 2,93 aos dois lados.}\\
\frac{2}{3}\log(E_1) - \frac{2}{3}\log(E_2) &= 1 && \text{Subtraindo } \tfrac{2}{3}\log(E_2) \text{ dos dois lados.}\\
\frac{2}{3}[\log(E_1) - \log(E_2)] &= 1 && \text{Pondo } \tfrac{2}{3} \text{ em evidência.}\\
\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) &= 1 && \text{Propriedade 6 do logaritmo.}\\
\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) &= \frac{3}{2} && \text{Multiplicando ambos os lados por } \tfrac{3}{2}.\\
10^{\log(E_1/E_2)} &= 10^{3/2} && \text{Elevando 10 a cada um dos lados.}\\
\frac{E_1}{E_2} &= 10^{3/2} && \text{Propriedade 4 do logaritmo.}\\
\frac{E_1}{E_2} &= 31{,}6 && \text{Cálculo da potência de 10.}
\end{aligned}$$

A razão entre as intensidades é 31,6. Assim, a intensidade do primeiro terremoto é igual a 31,6 vezes a intensidade do segundo, ou seja,

$$E_1 = 31{,}6E_2.$$

Agora, tente o exercício 7.

Exercícios 5.5

1. Você acaba de contrair uma dívida no cheque especial, pagando uma taxa de 8% ao mês. Supondo que você não terá como saldar nem mesmo parcialmente essa dívida nos próximos meses, determine em quanto tempo ela dobrará de valor.

2. Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos processadores que apresentam falhas após t anos de uso é dado pela função $P(t) = 100(1 - 2^{-0,1t})$. Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas?

3. A escala de um aparelho de medir ruídos é definida como $R(I) = 120 + 10\log(I)$, em que R é a medida do ruído, em decibéis (dB), e I é a intensidade sonora, em W/m^2. O ruído dos motores de um avião a jato equivale a 160 dB, enquanto o tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade atinge 80 dB, que é o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano.

a) Determine as intensidades sonoras do motor de um avião a jato e do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.

b) Calcule a razão entre essas intensidades, ou seja, calcule quantas vezes o ruído do avião é maior que o do tráfego.

4. Dada a função $f(x) = \log\left(\frac{2x+4}{3x}\right)$, determine para que valores de x tem-se $f(x) < 1$.

5. A população brasileira era de cerca de 170 milhões de habitantes em 2000 e atingiu os 190 milhões de habitantes em 2010.

a) Considerando que $t = 0$ no ano 2000, determine a função exponencial $P(t) = ae^{bt}$ que fornece o número aproximado de habitantes do país, em relação ao ano.

b) Usando seu modelo matemático, estime a população brasileira em 2020.

6. O nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada é fornecido por uma função na forma $L(x) = ae^{bx}$.

a) Calcule os valores numéricos das constantes a e b, sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.

b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

7. O pH de uma substância indica se ela é ácida (pH $<$ 7), neutra (pH = 7), ou básica (pH $>$ 7). O pH está associado à concentração de íons de hidrogênio ([H$^+$]), dada em mol/l, através da fórmula

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+].$$

a) Determine a concentração de íons de hidrogênio do leite de magnésia, cujo pH é 10,5.

b) Determinou-se que o suco de um determinado limão tinha pH 2,2 e o suco de uma certa laranja tinha pH 3,5. Qual dos dois tinha a maior concentração de íons de hidrogênio?

c) Calcule o pH do vinagre ($[\text{H}^+] = 3 \cdot 10^{-4}$) e do sangue arterial ($[\text{H}^+] = 3{,}9 \cdot 10^{-8}$), e indique se essas substâncias são ácidas ou básicas.

8. Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e $p(t)$ o preço do automóvel após t anos,

a) determine a expressão de $p(t)$;

b) determine o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial.

9. Suponha que tenham sido introduzidos, em um lago, 100 peixes de uma mesma espécie. Um estudo ecológico-matemático determinou que a população dessa espécie de peixes nesse lago é dada pela fórmula

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-kt}}$$

em que t é o tempo decorrido, em meses, desde que os primeiros peixes foram postos no lago.

a) Determine a função $P(t)$, sabendo que, passados 3 meses da introdução dos peixes, a população atingiu 250 cabeças.

b) Suponha que a pesca no lago será liberada assim que a população atingir 900 peixes. Determine em quantos meses isso ocorrerá.

10. O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por $T(t) = T_A + a3^{bt}$, em que $T(t)$ é a temperatura do corpo (em graus Celsius) no instante t (dado em minutos), T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e a e b são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de $-18°C$. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu $0°C$ após 90 minutos e chegou a $-16°C$ após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes a e b.

b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $(\frac{2}{3})°C$ superior à temperatura ambiente.

11. Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual

de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento, T (em °C), tem a forma $P(T) = a \cdot 10^{bT}$, em que a e b são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

Temperatura (°C)	Perda anual de capacidade (%)
0	1,6
55	20,0

Com base na expressão de $P(T)$ e nos dados da tabela,

a) esboce a curva que representa a função P(T), exibindo o percentual exato para $T = 0$ e $T = 55$;

b) determine as constantes a e b para a bateria em questão.

12. Um bule com café fervendo (a $100°C$) foi retirado do fogo e posto em um ambiente cuja temperatura é $T_A = 25°C$. Sabe-se que a função que fornece a temperatura do café em relação ao tempo transcorrido desde a retirada do bule do fogo (ou seja, desde o instante $t = 0$) é $T(t) = T_A + a \cdot e^{bt}$.

a) Sabendo que, passados 15 minutos da retirada do bule do fogo, a temperatura do café foi reduzida a $55°C$, determine o valor das constantes a e b.

b) Determine a temperatura depois de passados 30 min da retirada do bule do fogo.

13. O decaimento radioativo do Iodo 131 (um isótopo tóxico) é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, em que t é o tempo transcorrido (em dias), b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de Iodo 131.

a) Determine o valor da constante b sabendo que a meia-vida do Iodo 131 é de 8 dias (ou seja, que a concentração desse isótopo cai pela metade em 8 dias).

b) Uma amostra do capim de uma fazenda contaminada tem, hoje, 16 vezes mais iodo 131 que o máximo permitido, ou seja, $P_0 = 16P_{lim}$. Trace um gráfico mostrando o decaimento do Iodo 131 nos próximos 20 dias.

c) Determine em quantos dias, a partir de hoje, o capim poderá ser ingerido por animais da fazenda, ou seja, determine t tal que $P(t) = P_{lim}$.

14. Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $P(t) = a \cdot 2^{-bt}$, em que a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial ($t = 0$) seja composta por 1024 indivíduos e que a população após 10 anos seja um quarto da população inicial.

b) Determine o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial.

c) Esboce o gráfico da função $P(t)$ para $t \in [0,20]$.

15. Um vírus de computador se espalha segundo a função

$$c(t) = \frac{6500}{1 + a \cdot 2^{bt}},$$

em que $c(t)$ é o número de computadores infectados no instante t (em horas), contado a partir do momento em que a infecção foi detectada. A tabela abaixo fornece o número de computadores infectados em dois instantes diferentes.

Tempo (h)	Computadores
0	100
3	500

Com base nos dados da tabela,

a) Determine as constantes a e b.

b) Determine o número de computadores infectados para $t = 6$ h.

16. Uma barra cilíndrica é aquecida a 1100°F (T_0). Em seguida, ela é exposta a uma corrente de ar a 100°F. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia com o tempo (em minutos) de acordo com a função

$$T(t) = (T_0 - T_{AR})10^{-t/12} + T_{AR}.$$

a) Determine o tempo gasto para que a temperatura nesse ponto atinja 700°F.

b) Determine a temperatura exata para $t = 0$ e $t = 12$ minutos.

c) Usando os pontos dos itens (a) e (b), esboce o gráfico de $T(t)$ para $t \in [0,20]$.

17. O decaimento radioativo do Césio 137 (Cs-137) é descrito pela função $P(t) = P_0 2^{-bt}$, em que t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de Cs-137, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.

a) Determine o valor da constante b, sabendo que a meia-vida do Cs-137 é de 30 anos (ou seja, a concentração de Cs-137 cai pela metade em 30 anos).

b) Determine o valor de P_0 sabendo que $P(60) = 250$ becquerels.

c) Trace o gráfico de $P(t)$ para t entre 0 e 120 anos.

18. O consumo anual de água da cidade de Morubixaba ao longo do tempo pode ser representado pela função $c(t) = a2^{bt}$, em que t é o tempo, em anos, decorrido desde o ano 2000. Sabendo que o consumo foi de 80 mil metros cúbicos em 2000 e que esse consumo chegou a 120 mil metros cúbicos em 2012, determine as constantes a e b, e estime o consumo em 2020.

19. A altura média de meninas entre 0 e 2 anos de idade pode ser aproximada pela função

$$h(t) = 22{,}15 \ln(t + 6) + 10{,}44,$$

em que t é o tempo (em meses) transcorrido desde o nascimento, e h é a altura (em cm).

a) Determine a altura média de meninas de 9 meses.

b) Estime em que idade as meninas atingem 80 cm de altura.

20. De 2010 a 2013, o número aproximado de telefones celulares *per capita* da cidade de Poturandaba foi dado por

$$c(t) = 0{,}6\log(t - 2009) + 0{,}8,$$

em que t representa o ano. Supondo que essa função continue válida nos próximos anos,

a) Determine o número aproximado de telefones celulares *per capita* em 2014.

b) Sem calcular o número de aparelhos ano a ano, estime quando haverá 1,5 celulares *per capita* em Poturandaba.

21. A taxa de transporte de certa substância através de uma membrana está relacionada à concentração da substância no meio exterior pela função

$$V(x) = a + b\log_2(x),$$

em que V é a taxa de transporte (em mg/s) e x é a concentração (em mg/ml). Sabendo que $V(1) = 2$ mg/s e que $V(3) = 2{,}8$ mg/s, determine as constantes a e b.

Respostas dos Exercícios 5.5

1. Em cerca de 9 meses.

2. Em 20 anos.

3. a) Avião: $I = 10^4 \text{W/m}^2$, tráfego: $I = 10^{-4}\text{W/m}^2$.
b) O ruído do avião tem intensidade igual a 10^8 vezes a intensidade do ruído do tráfego.

4. $x < -2$ ou $x > 1/7$

5. a) $P(t) = 170.000.000e^{0{,}0111t}$
b) Aproximadamente 207.640.000 habitantes.

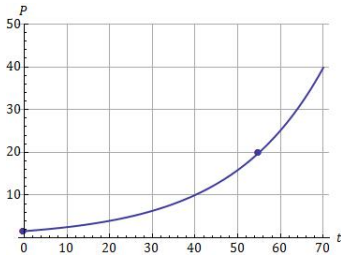
6. a) $a = 120$, $b = -\ln(2)$
b) 3 m

7. a) $[\text{H}^+] = 3{,}162 \times 10^{-11}$ mol/l
b) O suco de limão.
c) Vinagre: pH = 3,52 (ácido)
Sangue: pH = 7,41 (básico)

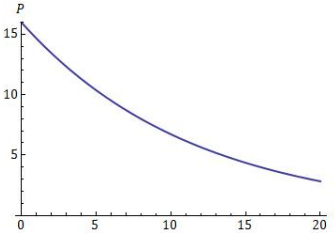
8. a) $p(t) = F \cdot (0{,}81)^t$
b) 15 anos

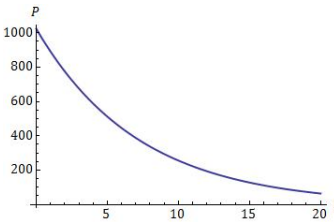
9. a) $P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-t\cdot\ln(3)/3}}$
b) 12 meses

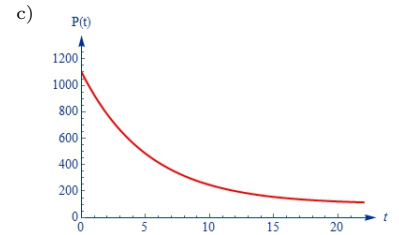
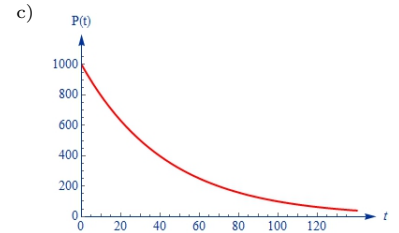
10. a) $a = 54$ e $b = -1/90$
b) 360 minutos.

11. a)

b) $a = 1{,}6$ e $b \approx 0{,}01994$

12. a) $a = 75$ e $b = -0{,}061$
b) Cerca de 37°C.

13. a) $b = 1/8$
b)

c) Em 32 dias.

14. a) $a = 1024$ e $b = 1/5$
b) 15 anos
c)

15. a) $a = 64$, $b = -0.805012$
b) 2000 computadores

16. a) 2,64 minutos
b) $T(0) = 1100$°C, $T(12) = 200$°C
c)

17. a) $b = 1/30$
b) $P_0 = 1000$
c)

18. $a = 80$, $b \approx 0{,}04875$
$c(20) = 157{,}2$ mil m^2

19. a) 70,4 cm
b) 17 meses

20. a) 1,22 telefones *per capita*
b) Em 2023

21. $a = 2$, $b = 0.504744$

6 Sequências e progressões

Antes de ler o capítulo

Os tópicos apresentados nesse capítulo envolvem funções (Seção 3.5), com destaque para a função linear (Seção 3.7) e a exponencial (Seção 5.2). Além disso, manipularemos equações, particularmente as exploradas nas Seções 2.4, 2.10 e 5.4.

O que a disposição das cadeiras em uma sala de concertos circular e os empréstimos bancários têm em comum? Ambos formam sequências, ou listas de números com uma certa ordem.

Nesse capítulo, apresentaremos as sequências, dando ênfase aos dois tipos principais: as progressões aritméticas e geométricas. Além disso, introduziremos a notação de somatório, que facilitará a soma dos termos das sequências, bem como a definição de série.

As sequências têm muitas aplicações, tanto em nosso cotidiano como dentro da própria matemática. Para concluir esse capítulo, analisaremos as aplicações financeiras, um assunto de grande impacto em um país como o Brasil, no qual as taxas de juros costumam ser elevadas.

6.1 Sequências

No Capítulo 5, o exemplo que usamos para introduzir a função exponencial envolvia o cálculo de uma dívida bancária. Voltaremos, agora, ao problema para dizer que, de fato, a função exponencial não é a melhor alternativa para representar o aumento da dívida.

Exemplo 1. Dívida bancária

Como vimos no Exemplo 1 do Capítulo 5, se uma pessoa contrai uma empréstimo de R$ 1.000,00 com um banco que cobra uma taxa de juros de 6% ao mês, então a dívida após x meses pode ser calculada usando-se a função

$$d(x) = 1000 \cdot 1{,}06^x.$$

Entretanto, essa função só fornece o valor correto da dívida quando o valor de x é um número inteiro não negativo. Ou seja, não podemos dizer que, passados quatro meses e meio da data do empréstimo, a dívida seja igual a

$$d(4{,}5) = 1000 \cdot 1{,}06^{4{,}5} = \text{R\$ } 1299{,}80. \qquad \text{☠ Errado!}$$

Na verdade, como o banco só atualiza a dívida uma vez por mês, o valor devido após quatro meses e meio é igual àquele obtido após quatro meses, isto é

$$d(4) = 1000 \cdot 1{,}06^4 = \text{R\$ } 1262{,}48.$$

Já que o argumento x da função só pode assumir valores inteiros, podemos apresentá-lo como um subíndice, em lugar de mostrá-lo entre parênteses. Assim, atribuindo a x os números naturais $1, 2, 3, \ldots$, nessa ordem, o valor da dívida a partir do primeiro mês pode ser descrito pela lista

$$d_1 = 1000 \cdot 1{,}06^1 = 1060{,}00;$$
$$d_2 = 1000 \cdot 1{,}06^2 = 1123{,}60;$$
$$d_3 = 1000 \cdot 1{,}06^3 = 1191{,}02;$$
$$d_4 = 1000 \cdot 1{,}06^4 = 1262{,}48;$$
$$d_5 = 1000 \cdot 1{,}06^5 = 1338{,}23;$$
$$\vdots$$

Essa lista ordenada forma o que chamamos de *sequência* dos valores mensais da dívida.

Como vimos no exemplo acima, uma lista de números que possuem uma ordem pode ser representada por meio de uma sequência, que nada mais é que uma função que só admite números naturais como argumento.

Sequência

Uma **sequência** é uma função a cujo domínio é o conjunto de números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Se n é um número natural, o valor da função em n é expresso por a_n (em lugar de $a(n)$).

Como os números naturais são ordenados, podemos representar os valores da função por meio da lista de **termos**

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Assim, a_1 (o valor da função em 1) é o primeiro termo, a_2 (o valor em 2) é o segundo termo, e a_n é o **enésimo termo** da sequência.

Em alguns casos, é conveniente começar a sequência pelo termo a_0, de modo que precisamos incluir o zero no domínio.

Se o domínio da sequência é composto apenas pelos primeiros n números naturais, ou seja, $D = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dizemos tratar-se de uma **sequência finita**. Caso contrário, a sequência é dita **infinita**.

Nesse livro, estamos interessados apenas nas sequências que possuem um padrão, ou **lei de formação**. Um exemplo simples desse tipo de lista é dado no exemplo a seguir.

Exemplo 2. Múltiplos de 3

A lista

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots$$

é a sequência dos múltiplos de 3. As reticências ao final indicam que a lista é infinita. Observando os quatro primeiros termos da sequência, notamos que

$$a_1 = 3 \cdot 1 = 3 \qquad a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \qquad a_3 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad a_4 = 3 \cdot 4 = 12 \qquad a_5 = 3 \cdot 5 = 15$$

Com base nesses termos, podemos intuir facilmente que o enésimo termo é dado por

$$a_n = 3n.$$

Esse enésimo termo, chamado **termo geral**, é o que define a lei de formação da sequência. Com ele conseguimos calcular, por exemplo, o milésimo e o milionésimo termo, como mostrado abaixo.

$$a_{1000} = 3 \cdot 1000 = 3000 \qquad \text{e} \qquad a_{1000000} = 3 \cdot 1000000 = 3000000.$$

Problema 3. Escrevendo termos da sequência a partir do termo geral

Ache os cinco primeiros termos e o vigésimo termo das sequências dadas por

a) $a_i = 5i - 100$

b) $a_i = \dfrac{1}{i}$

c) $a_i = 2^i$

d) $a_i = \dfrac{(-1)^i}{4i}$

Solução.

a) Para $a_i = 5i - 100$, temos

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 100 = -95 \qquad a_4 = 5 \cdot 4 - 100 = -80$$
$$a_2 = 5 \cdot 2 - 100 = -90 \qquad a_5 = 5 \cdot 5 - 100 = -75$$
$$a_3 = 5 \cdot 3 - 100 = -85 \qquad a_{20} = 5 \cdot 20 - 100 = 0$$

b) Para $a_i = \dfrac{1}{i}$, temos

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1 \qquad a_4 = \frac{1}{4}$$
$$a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_5 = \frac{1}{5}$$
$$a_3 = \frac{1}{3} \qquad a_{20} = \frac{1}{20}$$

c) Para $a_i = 2^i$, temos

$$a_1 = 2^1 = 2 \qquad a_4 = 2^4 = 16$$
$$a_2 = 2^2 = 4 \qquad a_5 = 2^5 = 32$$
$$a_3 = 2^3 = 8 \qquad a_{20} = 2^{20} = 1.048.576$$

d) Para $a_i = \dfrac{(-1)^i}{4i}$, temos

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{4} \qquad a_4 = \frac{(-1)^4}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$$
$$a_2 = \frac{(-1)^2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \qquad a_5 = \frac{(-1)^5}{4 \cdot 5} = -\frac{1}{20}$$
$$a_3 = \frac{(-1)^3}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{12} \qquad a_{20} = \frac{(-1)^{20}}{4 \cdot 20} = \frac{1}{80}$$

Note que, nesse problema, os termos da sequência têm sinais alternados, já que,

$$(-1)^i = \begin{cases} -1, & \text{se } i \text{ é ímpar;} \\ 1, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

O termo $(-1)^i$ aparece, explícita ou implicitamente, em todas a sequências com sinais alternados.

Agora, tente o Exercício 1.

Os pares ordenados associados à sequência do Problema 3(d) são

$$\left(1,-\frac{1}{4}\right),\left(2,\frac{1}{8}\right),\left(3,-\frac{1}{12}\right),\ldots$$

Por serem funções, as sequências podem ser facilmente representadas no plano Cartesiano, bastando para isso que associemos ao i-ésimo termo o par ordenado (i, a_i). A Figura 6.1a mostra o gráfico da sequência com sinais alternados do Problema 3(d). Note que, como o domínio da função só inclui números naturais, os valores da sequência são representados por pontos isolados no plano, não sendo adequado ligá-los.

Outra opção para a representação gráfica de sequências – particularmente aquelas nas quais todos os termos são positivos – é o emprego de gráficos de barras, como mostrado na Figura 6.1b, que retrata a sequência do Problema 3(b).

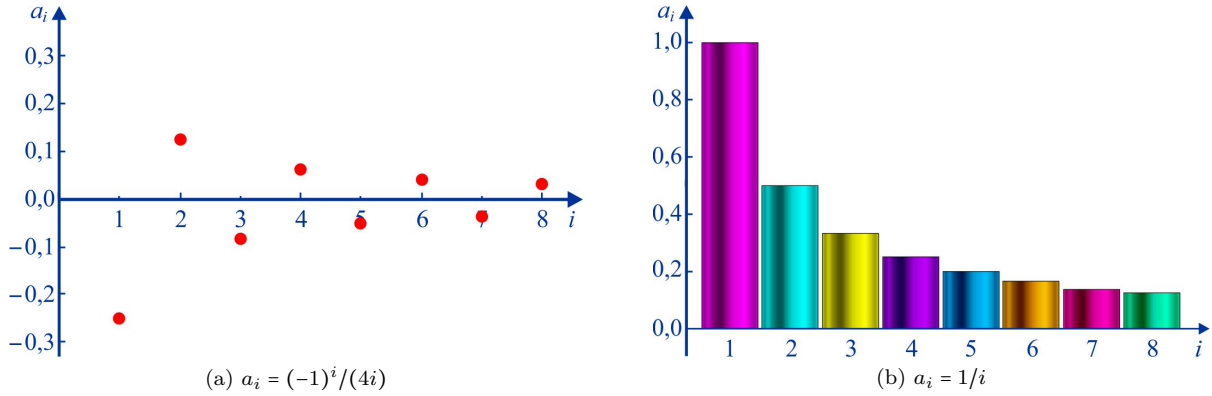



Figura 6.1: Gráficos de sequências.

Sequências definidas recursivamente

Já vimos como definir uma sequência apresentando o termo geral a_n como uma função de n. Como alternativa, também é possível definir uma sequência fornecendo o termo geral com relação a um ou mais termos anteriores.

Como exemplo, a sequência apresentada no Problema 3(a) também pode ser definida por

$$a_i = a_{i-1} + 5,$$

em que a_{i-1} é o termo da sequencia imediatamente anterior a a_i. Nesse caso, dizemos que a sequência é definida **recursivamente**.

Atenção
Cuidado para não confundir a_{i-1} com $a_i - 1$. Você consegue explicar a diferença que há entre essas duas expressões?

Observe, entretanto, que as sequências recursivas não podem ser definidas apenas pelo termo geral, já que a lei de formação acima gera tanto

$$-95, -90, -85, -80, -75, \ldots$$

como

$$5, 10, 15, 20, 25, \ldots$$

Para que a definição de uma sequência recursiva seja única, também é preciso definir um ou mais termos iniciais. Assim, a primeira sequência acima tem $a_1 = -95$, enquanto a segunda tem $a_1 = 5$.

Problema 4. Sequência definida recursivamente

Calcule o décimo segundo termo da sequência definida por

$$a_i = 2a_{i-1} \quad \text{e} \quad a_1 = 2.$$

Solução.

Se $a_i = 2a_{i-1}$ e $a_1 = 2$, então temos

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2 & a_5 = 32 & a_9 = 512 \\ a_2 = 4 & a_6 = 64 & a_{10} = 1024 \\ a_3 = 8 & a_7 = 128 & a_{11} = 2048 \\ a_4 = 16 & a_8 = 256 & a_{12} = 4096 \end{array}$$

Agora, tente o Exercício 3.

Como vimos no exemplo acima, as sequências recursivas têm a grande desvantagem de não permitirem que calculemos um termo sem conhecer os anteriores. Ainda assim, há sequências importantes que só são definidas recursivamente, como mostram os exemplos abaixo.

Exemplo 5. Fatorial

Considere a sequência definida por

$$a_n = n \cdot a_{n-1}$$

com $a_1 = 1$. Os primeiros termos dessa sequência, que cresce muito rapidamente, são

$$\begin{array}{ll} a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2 & a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120 \\ a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6 & a_6 = 6 \cdot a_5 = 6 \cdot 120 = 720 \\ a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24 & a_7 = 7 \cdot a_6 = 7 \cdot 720 = 5040 \end{array}$$

Como essa sequência é muito usada em matemática, ela recebe o nome particular de **fatorial** e seu enésimo termo ter uma notação especial: **n**!. Assim,

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040, \ \ldots$$

Agora, tente o Exercício 6.

Fatorial

O **fatorial** de um número inteiro não negativo n é dado por

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad \text{ou} \qquad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Além disso, convenciona-se que $0! = 1$.

Exemplo 6. Sequência de Fibonacci

Leonardo Bonacci era filho de Guglielmo dei Bonacci, um rico mercador Pisano. Da corruptela de *filius Bonacci* surgiu o cognome pelo qual esse matemático do século XIII acabou conhecido: *Fibonacci*. Seu livro mais importante, denominado *Liber Abaci*, escrito em 1202, introduziu na Europa o sistema de numeração hindu-arábico ou de base 10, que usa os algarismos 0–9 e a notação posicional.

Nos dias de hoje, Fibonacci é mais conhecido pela sequência que usou para descrever o crescimento de uma população de coelhos. A sequência de Fibonacci é formada

Embora tivesse sido descrita séculos antes pelos indianos, a sequência de Fibonacci acabou recebendo o nome de seu ilustre divulgador no ocidente.

partindo-se de $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ e definindo-se o n-ésimo termo como a soma dos dois termos imediatamente anteriores, ou seja,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 & a_7 &= a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 & a_8 &= a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 & a_9 &= a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34 \\ a_6 &= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 & a_{10} &= a_9 + a_8 = 32 + 21 = 55 \end{aligned}$$

Apesar de essa sequência ter vários usos em matemática, nos deteremos apenas em sua aplicação mais divertida, que é a geração de uma espiral encontrada com frequência na natureza, denominada *espiral de Fibonacci*.

Para construir essa espiral, dispomos lado a lado dois quadrados de lado 1. Em seguida, desenhamos um quadrado de lado 2 que tem uma aresta comum com os dois quadrados anteriores. Continuando esse processo com quadrados cujos lados têm as mesmas medidas dos números de Fibonacci, obtemos a pilha de blocos mostrada na Figura 6.2. Finalmente, usando arcos de circunferência para unir vértices opostos de cada quadrado, traçamos a espiral preta que aparece na mesma figura.

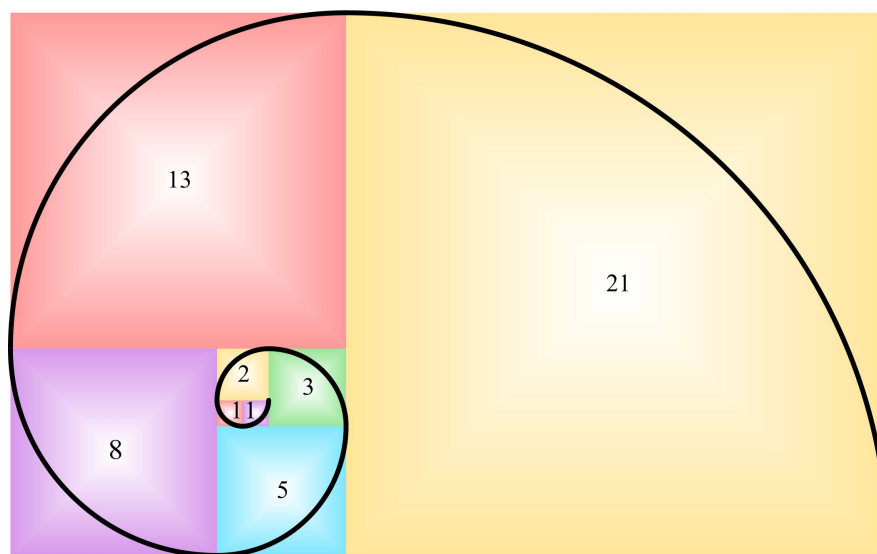



Figura 6.2: Espiral de Fibonacci. Cada termo da sequência de Fibonacci é igual à medida do lado do quadrado correspondente.

■ Determinação do termo geral

Há situações em que não conhecemos a lei de formação da sequência, mas apenas alguns de seus termos. Considere, por exemplo, a lista ordenada abaixo, da qual são conhecidos os quatro primeiros termos:

$$3, 9, 27, 81, \ldots$$

Observando essa lista, somos tentados a supor que se trata da sequência das potências de 3, já que

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81.$$

Assim, uma possível expressão para o termo geral seria $a_n = 3^n$.

Entretanto, se definíssemos

$$a_n = -15 + 32i - 18i^2 + 4i^3$$

Dado qualquer número finito de números reais, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, sempre é possível encontrar um polinômio que passe pelos pontos

$$(1, a_1),\ (2, a_2),\ (3, a_3),\ \ldots,\ (n, a_n).$$

obteríamos a mesma sequência. Dessa forma, não há uma fórmula única para o termo geral de uma sequência cujos primeiros quatro termos são 3, 9, 27 e 81. De fato, é possível afirmar que

> Não se pode definir de forma única o termo geral de uma sequência da qual se conhece uns poucos termos iniciais.

Ainda assim, há casos em que a determinação de uma possível expressão para o termo geral é útil. O problema abaixo mostra como esse termo geral pode ser obtido para sequencias simples. Voltaremos a esse assunto nas Seções 6.3 e 6.4, nas quais trataremos das progressões aritméticas e geométricas.

Problema 7. Determinação do termo geral

Encontre um possível termo geral para as sequências cujos primeiros termos são dados abaixo.

a) 2, 8, 14, 20, 26, ...

b) $-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{25},\ \ldots$

Solução.

a) Observando a sequência, notamos que cada termo pode ser obtido somando seis unidades ao termo anterior, ou seja, $a_n = a_{n-1} + 6$. De fato,

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + 6 = 2 + 6$$
$$a_3 = a_2 + 6 = \underbrace{2 + 6}_{a_2} + 6 = 2 + 2 \cdot 6$$
$$a_4 = a_3 + 6 = \underbrace{2 + 2 \cdot 6}_{a_3} + 6 = 2 + 3 \cdot 6$$
$$a_5 = a_4 + 6 = \underbrace{2 + 3 \cdot 6}_{a_4} + 6 = 2 + 4 \cdot 6$$

Note que, neste problema, fornecemos duas fórmulas para o termo geral a_n, uma recursiva (ou seja, envolvendo a_{n-1}) e outra direta (ou seja, envolvendo apenas n).

Reparando, então, que o valor que multiplica 6 em cada termo (número destacado em vermelho) é igual ao índice do termo (em verde) menos 1, também podemos escrever o termo geral como

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 6.$$

b) Nesse exemplo, vamos examinar em separado o valor absoluto e o sinal de cada termo. No que diz respeito ao valor absoluto, observamos que

$$|a_1| = \frac{1}{1}, \quad |a_2| = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}, \quad |a_3| = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}, \quad |a_4| = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}, \quad |a_5| = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}.$$

Portanto, temos $|a_n| = 1/n^2$. Além disso, notamos que o sinal dos termos alterna, sendo negativo nos termos ímpares e positivo nos termos pares. Assim, a exemplo do que vimos no Problema 3, podemos multiplicar o valor absoluto do termo geral por $(-1)^n$, obtendo

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

Agora, tente o Exercício 4.

Exercícios 6.1

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência (supondo que n comece em 1).

a) $a_n = 50 - 5n$
b) $a_n = 3n$
c) $a_n = n^3$
d) $a_n = 3^n$
e) $a_n = 3^{-n}$
f) $a_n = n^2 - 1$
g) $a_n = 2^n - 1$
h) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
i) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
j) $a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$
k) $a_n = (-3)^{n-1}$
l) $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-1)$
m) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
n) $a_n = \sqrt{2^n}$
o) $a_n = 2 \cdot (-1)^n + 2$
p) $a_n = 4 \cdot 2^{-bn}$

2. Usando os valores que você obteve no Exercício 1, esboce os gráficos das sequências dadas por

a) $a_n = 50 - 5i$
b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
c) $a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$
d) $a_n = \frac{n^2+n}{2}$

3. Escreva os cinco primeiros termos das sequências abaixo.

a) $a_1 = 2, \quad a_i = a_{i-1} + 4$
b) $a_1 = 50, \quad a_i = a_{i-1} - 3$
c) $a_1 = 5, \quad a_i = 2a_{i-1}$
d) $a_1 = 1, \quad a_i = -2a_{i-1}$

4. Escreva uma fórmula para o termo geral de cada sequência do Exercício 3.

5. Escreva os cinco primeiros termos das sequências abaixo.

a) $a_1 = 0, \quad a_i = 10 - 5a_{i-1}$
b) $a_1 = 1024, \quad a_i = \frac{a_{i-1}}{4}$
c) $a_1 = 3, \quad a_i = \frac{1}{a_{i-1}}$
d) $a_1 = 2, \quad a_i = a_{i-1}^2$

6. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência (supondo que n comece em 1).

a) $a_n = \frac{1}{n!}$
b) $a_n = \frac{n!}{n^2}$
c) $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

7. Simplifique as expressões abaixo.

a) $\frac{6!}{4!}$
b) $\frac{5!}{8!}$
c) $\frac{7!}{4!\cdot 3!}$
d) $\frac{8!\cdot 3!}{4!\cdot 6!}$
e) $\frac{n!}{(n+1)!}$
f) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

8. Determine os décimo quinto termo da sequência de Fibonacci.

9. Escreva uma fórmula para o termo geral das sequências abaixo.

a) $2, 7, 12, 17, \ldots$
b) $1000, 975, 950, 900, \ldots$
c) $5, 15, 45, 135, 405, \ldots$
d) $1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \ldots$

10. Conforme visto no Exercício 17 da Seção 1.9, dado um número real positivo b, os termos da sequência definida recursivamente por

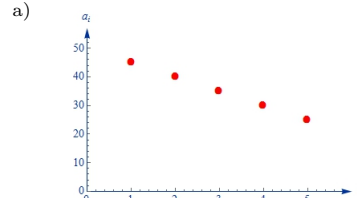
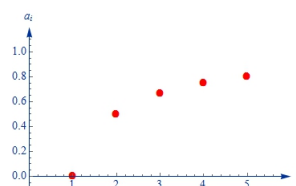
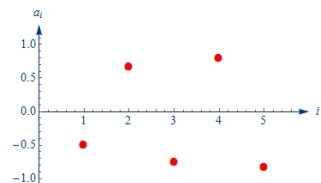
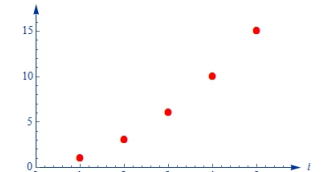
$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + b}{2a_k}$$

fornecem estimativas cada vez melhores de $\sqrt{b}$. Assim, é possível obter um valor aproximado para $\sqrt{b}$ partindo de um termo inicial qualquer (por exemplo, $a_1 = 1$) e calculando os termos seguintes da sequência até que a diferença entre a_{k+1} e a_k seja pequena.

Determine os oito primeiros termos da sequência obtida aplicando-se esse método para calcular $\sqrt{100}$, partindo de $a_1 = 1$.

Respostas dos Exercícios 6.1

1.
a) 45, 40, 35, 30, 25
b) 3, 6, 9, 12, 15
c) 1, 8, 27, 64, 125
d) 3, 9, 27, 81, 243
e) 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243
f) 0, 3, 8, 15, 24
g) 1, 3, 7, 15, 21
h) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32
i) 0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5
j) −1/2, 2/3, −3/4, 4/5, −5/6
k) 1, −3, 9, −27, 81
l) $\pi/2$, $5\pi/2$, $9\pi/2$, $13\pi/2, 17\pi/2$
m) 1, 3, 6, 10, 15
n) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$
o) 0, 4, 0, 4, 0
p) 2^{2-b}, 2^{2-2b}, 2^{2-3b}, 2^{2-4b}, 2^{2-5b}

2. a)

b)

c) d)

3.
a) 2, 6, 10, 14, 18
b) 50, 47, 44, 41, 38

c) 5, 10, 20, 40, 80
d) 1, −2, 4, −8, 16

4. a) $a_n = 2 + 4(n-1)$
b) $a_n = 50 - 3(n-1)$
c) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
d) $a_n = (-2)^{n-1}$

5. a) 0, 10, −40, 210, −1040
b) 1024, 256, 64, 16, 4
c) 3, 1/3, 3, 1/3, 3
d) 2, 4, 16, 256, 65536

6. a) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{220}$
b) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{24}{5}$
c) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{24},\ -\frac{1}{720},\ \frac{1}{40320},\ -\frac{1}{3628800}$

7. a) 30
b) $\frac{1}{336}$
c) 35
d) 14
e) $\frac{1}{n}$
f) $n(n+1)$

8. 610

9. a) $a_n = 2 + 5(n-1)$
b) $a_n = 1000 - 25(n-1)$
c) $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
d) $a_n = 1000 \cdot (\frac{1}{10})^{n-1}$

10. 1; 50,5; 26,24009901; 15,02553012; 10,84043467; 10,03257851; 10,00005290; 10,00000000.

6.2 Somatórios

A definição formal da semicircunferência será dada no segundo volume desse livro, em um capítulo dedicado à geometria plana. Por hora, é suficiente saber que ela corresponde à metade da circunferência.

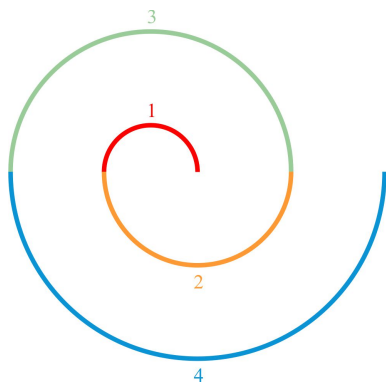



Figura 6.3: Espiral do Exemplo 1.

Para introduzir a notação de somatório, vamos usar como exemplo uma curva espiral composta por semicircunferências.

Exemplo 1. Comprimento de uma curva espiral

Uma curva em formato espiral é formada unindo-se semicircunferências cujos raios, em centímetros, são dados pela sequência $1, 2, 3, 4, \ldots$. A Figura 6.3 mostra os quatro primeiros arcos que compõem a espiral, identificando-os com cores diferentes. O número que acompanha cada arco indica o raio da semicircunferência correspondente.

Usando nossos conhecimentos de geometria, definimos o comprimento de uma semicircunferência cujo raio é r através da fórmula πr. Assim, o comprimento da enésima semicircunferência que forma a curva é dado por

$$a_n = \pi n,$$

e a sequência dos comprimentos de arcos é composta pelos termos

$$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots, n\pi, \ldots$$

Suponha que, nesse exemplo, estejamos interessados em conhecer o comprimento total, C, da espiral formada pelos primeiros 20 arcos. Naturalmente, o valor de C pode ser obtido somando-se os termos da sequência acima, ou seja,

$$\begin{aligned} C &= \pi + 2\pi + 3\pi + 4\pi + 5\pi + 6\pi + 7\pi + 8\pi + 9\pi + 10\pi + 11\pi \\ &\quad + 12\pi + 13\pi + 14\pi + 15\pi + 16\pi + 17\pi + 18\pi + 19\pi + 20\pi. \end{aligned}$$

Efetuando essa soma, descobrimos que $C = 210\pi$ centímetros.

O Exemplo acima evidencia os problemas que encontramos ao calcular a soma dos termos de uma sequência. Além de não ser prático escrever a soma por extenso, o cálculo dessa soma pode ser muito trabalhoso se o número de termos for grande.

Vejamos como minimizar essas dificuldades, começando por definir uma notação especial para as somas, que envolve o uso da legra grega Σ (sigma maiúsculo).

Você sabia?
A letra grega *sigma*, que originou o nosso "S", tem uma forma maiúscula, Σ, e duas formas minúsculas, σ e ς, das quais a última só aparece ao final das palavras.

Somatório

A soma dos n primeiros termos de uma sequência cujo i-ésimo termo é a_i é representada por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

e é lida como "o somatório de a_i, para i (variando) de 1 a n".

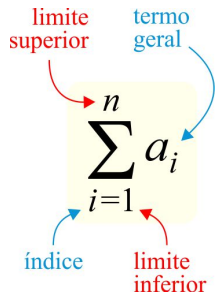



Figura 6.4: Notação de somatório.

Na notação de somatório,

- o Σ representa a soma;
- a expressão que segue o Σ é o termo geral da sequência;
- o índice do primeiro termo da soma aparece abaixo do Σ (quando escrevemos $i = 1$, por exemplo, a soma começa por a_1);
- o índice do último termo da soma é apresentado acima do Σ (no somatório da Figura 6.4, por exemplo, o último termo é a_n).

Empregando a nova notação, a soma das vinte semicircunferências do Exemplo 1 pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{20} \pi i.$$

Outros exemplos de somatório são dados no problema abaixo.

Problema 2. Somatórios

Calcule os somatórios

a) $\sum_{i=1}^{6} i^2$

b) $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2k}$

Solução.

a) O termo geral desse somatório é $a_i = i^2$. Calculando, então,

$$a_1 = 1^2, \quad a_2 = 2^2, \quad a_3 = 3^2, \quad a_4 = 4^2, \quad a_5 = 5^2, \quad a_6 = 6^2,$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91.$$

b) Nesse caso, devemos somar os cinco primeiros termos da sequência com termo geral $a_k = 1/(2k)$. Portanto, temos

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{137}{120}.$$

Agora, tente o Exercício 1.

A razão de indicarmos o índice do termo inicial do somatório logo abaixo da letra sigma é que isso nos permite definir somas que começam por a_m, com $m \neq 1$, como mostram os exemplos a seguir.

Você sabia?

No Exemplo 3(b), notamos que $\sum_{i=0}^{5} 2^i = 2^6 - 1$. De uma forma mais geral, podemos dizer que, para qualquer inteiro positivo n

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Exemplo 3. Somatórios que não começam por a_1

a) $\sum_{i=4}^{8} 5 - 2i = (5 - 2\cdot 4) + (5 - 2\cdot 5) + (5 - 2\cdot 6) + (5 - 2\cdot 7) + (5 - 2\cdot 8) = -35.$

b) $\sum_{i=0}^{5} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$

A notação sigma é a forma mais prática de representar um somatório, de modo que é comum converter a essa notação as somas dadas por extenso. Podemos fazer essa conversão usando os conhecimentos que já adquirimos sobre sequências, bastando para isso que

- encontremos uma fórmula para o termo geral a_i;
- determinemos o valor inicial e o valor final de i.

Problema 4. Conversão à notação sigma

Converta à notação de somatório as seguintes somas:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 200$.

b) $1{,}05 + 1{,}05^2 + 1{,}05^3 + \cdots + 1{,}05^{12}$.

Solução.

a) Notamos que os termos da soma $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 200$ são os números pares entre 2 e 200, ou seja,

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = 8, \quad \cdots$$

O termo geral dessa sequência é

$$a_i = 2i.$$

Naturalmente, o primeiro termo da soma é a_1. Para descobrir o índice i correspondente ao último termo, resolvemos a equação $a_i = 200$:

$$2i = 200 \qquad \Rightarrow \qquad i = 200/2 = 100.$$

Logo, o último índice é 100, de modo que a soma pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{100} 2i.$$

b) Os termos da soma $1{,}05 + 1{,}05^2 + 1{,}05^3 + \cdots + 1{,}05^{12}$ são

$$a_1 = 1{,}05^1, \quad a_2 = 1{,}05^2, \quad a_3 = 1{,}05^3, \quad a_4 = 1{,}05^4, \quad \cdots \quad a_{12} = 1{,}05^{12}$$

Nesse caso, claramente, devemos somar os doze primeiros termos da sequência cujo termo geral é

$$a_i = 1{,}05^i.$$

Assim, temos

$$\sum_{i=1}^{12} 1{,}05^i.$$

Agora, tente o Exercício 2.

■ Propriedades do somatório

As propriedades da soma e da multiplicação, vistas no Capítulo 1, podem ser empregadas para reescrever um somatório de forma a facilitar seu cálculo. Tomando como exemplo o comprimento da curva espiral do Exemplo 1, que é dada por

$$C = \pi + 2\pi + 3\pi + 4\pi + 5\pi + \cdots + 16\pi + 17\pi + 18\pi + 19\pi + 20\pi,$$

observamos que todos os vinte termos incluem a constante π, de modo que podemos pô-la em evidência, obtendo

$$C = \pi(1+2+3+4+5+\cdots+16+17+18+19+20).$$

Assim, temos

$$C = \sum_{i=1}^{20} \pi \cdot i = \pi \left(\sum_{i=1}^{20} i \right).$$

Generalizando essa propriedade para uma soma na forma $\sum_{i=1}^{n} ca_i$, obtemos uma das três propriedades principais dos somatórios, as quais apresentamos no quadro abaixo.

Propriedades dos somatórios

Sejam a_i e b_i os termos gerais de duas sequências, c uma constante real e n um número inteiro positivo. Então,

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)$

Todas essas propriedades são fáceis de demonstrar expandindo os somatórios. Para provar que a Propriedade 1 é válida, por exemplo, basta escrever

Nessa demonstração, usamos duas propriedades da soma: a comutatividade, que diz que $a + b = b + a$, e a associatividade, segundo a qual $(a + b) + c = a + (b + c)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

Embora o mesmo expediente possa ser usado para provar a Propriedade 2, vamos empregar as Propriedade 1 e 3 para obter a demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} [a_i + (-1) \cdot b_i]}_{a-b=a+(-1)\cdot b} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} (-1) \cdot b_i}_{\text{Propriedade 1}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i}_{\text{Propriedade 3}}.$$

Voltemos, agora, à curva espiral do Exemplo 1, cuja soma, como vimos, foi alterada conforme descrito abaixo.

$$C = \sum_{i=1}^{20} \pi i \qquad \Rightarrow \qquad C = \pi \left(\sum_{i=1}^{20} i \right).$$

Ainda que essa mudança pareça sutil, a fórmula da esquerda exige 20 multiplicações e 19 somas, enquanto a da direita requer apenas 19 somas e uma multiplicação, permitindo uma economia de 19 multiplicações.

Entretanto, seria ainda melhor se conhecêssemos o valor da soma $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 19 + 20$, pois isso nos permitiria calcular C quase sem esforço. Felizmente, os valores de $\sum_{i=1}^{n} i$ e de somas semelhantes são conhecidos. Alguns desses somatórios são apresentados a seguir.

Principais somatórios de potências (cont.)

1. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$

Embora algumas dessas fórmulas sejam difíceis de obter, a demonstração dos dois primeiros somatórios é simples. Para provar que $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$, por exemplo, basta expandir o somatório, como mostrado abaixo.

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ termos}} = n.$$

Já para demonstrar que $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ adotamos uma estratégia mais engenhosa. Nesse caso, supondo que queiramos calcular $2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)$, definimos

$$2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i.$$

Escrevendo, agora, os termos da primeira soma em ordem crescente e os termos da segunda em ordem decrescente, e somando termo a termo, obtemos

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
\sum_{i=1}^{n} i & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
+\sum_{i=1}^{n} i & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\sum_{i=1}^{n} i & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Logo, $2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$, de modo que $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo 5. Comprimento de uma curva espiral

Agora que sabemos que o comprimento da curva espiral da Figura 6.3 é dado por $C = \pi\left(\sum_{i=1}^{20} i\right)$, podemos usar a Fórmula 2 do quadro acima para calcular o somatório:

$$C = \pi\left(\sum_{i=1}^{20} i\right) = \pi\left[\frac{20(20+1)}{2}\right] = \pi\left[\frac{20\cdot 21}{2}\right] = 210\pi \text{ cm.}$$

Problema 6. Cálculo de somas

Calcule

a) $\sum_{k=1}^{100} 8$

b) $\sum_{i=1}^{50} (3i-2)$

c) $\sum_{k=1}^{30} \frac{2}{5}\left(k-\frac{10}{3}\right)$

d) $\sum_{k=1}^{40} \frac{k^2}{2}$

e) $\sum_{i=6}^{15} i$

Solução.

a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} 8 &= \sum_{k=1}^{100} 8\cdot 1 && \text{1 é o elemento neutro da multiplicação.}\\ &= 8\left(\sum_{k=1}^{100} 1\right) && \text{Propriedade 3.}\\ &= 8\cdot 100 && \text{Aplicação da fórmula } \textstyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n.\\ &= 800 && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{50} (3i-2) &= \sum_{i=1}^{50} 3i - \sum_{i=1}^{50} 2 && \text{Propriedade 2.}\\ &= 3\left(\sum_{i=1}^{50} i\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{50} 1\right) && \text{Propriedade 3.}\\ &= 3\left[\frac{50(50+1)}{2}\right] - 2(50) && \text{Aplicação de fórmulas.}\\ &= 3825-100 && \text{Cálculo dos produtos.}\\ &= 3725 && \text{Cálculo da diferença.}\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30} \frac{2}{5}\left(k-\frac{10}{3}\right) &= \frac{2}{5}\left[\sum_{k=1}^{30}\left(k-\frac{10}{3}\right)\right] && \text{Propriedade 3.}\\ &= \frac{2}{5}\left[\sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30}\frac{10}{3}\right] && \text{Propriedade 2.}\\ &= \frac{2}{5}\left[\sum_{k=1}^{30} k - \frac{10}{3}\left(\sum_{k=1}^{30} 1\right)\right] && \text{Propriedade 3.}\\ &= \frac{2}{5}\left[\frac{30(30+1)}{2} - \frac{10}{3}(30)\right] && \text{Aplicação de fórmulas.}\\ &= \frac{2}{5}[465-100] && \text{Cálculo dos produtos.}\\ &= 146 && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

d)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{40} \frac{k^2}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{40} k^2\right) && \text{Propriedade 3.}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{40(40+1)(2\cdot 40+1)}{6}\right) && \text{Aplicação de fórmula.}\\ &= 11070 && \text{Simplificação do resultado.}\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e) Observe que o somatório $\sum_{i=6}^{15} i$ não começa pelo índice $i = 1$, de modo que não podemos calculá-lo aplicando diretamente a fórmula apresentada no quadro acima. Entretanto, felizmente, é possível obter o somatório no intervalo correto somando todos os termos de 1 a 15 e subtraindo do resultado os termos indesejados, ou seja, aqueles com índice de 1 a 5:

$$\begin{array}{rl} \sum_{i=1}^{15} i = & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 \\ -\sum_{i=1}^{5} i = & -1-2-3-4-5 \\ \hline \sum_{i=6}^{15} i = & 6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 \end{array}$$

Usando, então, a fórmula do somatório de i, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=6}^{15} i = \sum_{i=1}^{15} i - \sum_{i=1}^{5} i = \frac{15(15+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2} = 120 - 15 = 105.$$

Agora, tente o Exercício 3.

O artifício introduzido no último item do Problema 6 pode ser usado para calcular qualquer soma que comece em um termo a_m, com $m \neq 1$, ou seja,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i. \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Nesse quadro, a fórmula da esquerda mostra como calcular um somatório através da diferença de outros dois, enquanto a fórmula da direita mostra como obter um somatório a partir da soma de outros dois.

Problema 7. Somatório que não começa no termo de índice 1

Calcule $\sum_{k=31}^{60} \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right)$.

Solução.

Usando a fórmula do quadro acima, escrevemos

$$\sum_{k=31}^{60} \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right) = \sum_{k=1}^{60} \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right) - \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right).$$

O cálculo do primeiro somatório é dado abaixo.

$$\sum_{k=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{60} \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right) &= \sum_{k=1}^{60} \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{4} && \text{Propriedade 1.} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{60} k + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{60} 1 && \text{Propriedade 3.} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{60(60+1)}{2}\right) + \frac{1}{4}(60) && \text{Aplicação de fórmulas.} \\ &= 625 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Aplicando a mesma sequência de passos, obtemos facilmente o segundo somatório:

$$\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{4}\right)=\sum_{k=1}^{30}\frac{k}{3}+\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}k+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{30}1=\frac{1}{3}\left(\frac{30(30+1)}{2}\right)+\frac{1}{4}(30)=162{,}5.$$

Logo,

$$\sum_{k=31}^{60}\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{4}\right)=625-162{,}5=462{,}5.$$

Agora, tente o Exercício 4.

Exercícios 6.2

1. Calcule os somatórios abaixo escrevendo os termos e somando-os.

a) $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{3}$

b) $\sum_{i=1}^{4}i^3$

c) $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4i}$

d) $\sum_{i=1}^{4}\frac{2}{i+2}$

e) $\sum_{i=1}^{5}\frac{i-1}{i+1}$

f) $\sum_{j=1}^{20}(-1)^j$

g) $\sum_{j=1}^{5}(-2)^j$

h) $\sum_{j=1}^{4}(-1)^j\left(\frac{j-1}{j^2+1}\right)$

i) $\sum_{k=1}^{5}(2^k-k^2)$

j) $\sum_{i=1}^{5}\frac{i}{2}[1+(-1)^i]$

2. Escreva as somas abaixo usando a notação de somatório.

a) $1+2+3+4+5+6+\cdots+200$

b) $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\cdots+\frac{199}{2}+100$

c) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\cdots+10$

d) $-1+2-3+4-5+6-\cdots-199+200$

e) $1+4+9+16+25+36+49+64+81+100$

f) $3+9+27+81+243$

g) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}$

h) $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\frac{5^2}{5!}+\cdots+\frac{10^2}{10!}$

i) $(3+5)+(3+10)+(3+15)+(3+20)+\cdots+(3+50)$

j) $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9$

3. Usando as propriedades dos somatórios e os valores conhecidos de $\sum_{k=1}^{n}1$, $\sum_{k=1}^{n}k$ e $\sum_{k=1}^{n}k^2$, calcule as somas.

a) $\sum_{i=1}^{100}(2i-1)$

b) $\sum_{i=1}^{100}2(i-1)$

c) $\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{i}{2}+\frac{2}{5}\right)$

d) $\sum_{i=1}^{100}3\left(i-\frac{5}{2}\right)$

e) $\sum_{i=1}^{80}\frac{3}{2}(i-20)$

f) $\sum_{i=1}^{45}3\left(i-\frac{5}{9}\right)$

g) $\sum_{i=1}^{15}(i^2-16)$

h) $\sum_{i=1}^{10}(i-1)(i+2)$

4. Usando as propriedades dos somatórios e os valores conhecidos de $\sum_{k=1}^{n}1$ e $\sum_{k=1}^{n}k$, calcule as somas.

a) $\sum_{i=21}^{80}i$

b) $\sum_{i=50}^{100}(3i+1)$

c) $\sum_{i=21}^{50}4(i-2)$

d) $\sum_{i=11}^{40}6\left(i-\frac{1}{4}\right)$

5. Calcule a soma dos múltiplos de 5 no intervalo [5,1000].

6. Resolva as equações

a) $\sum_{i=1}^{n}i=325$

b) $\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n+4}{2}$

c) $\sum_{i=1}^{n}(2i-5)=10-n$

d) $\sum_{i=1}^{n}(4i+9)=1000+n$

7. Escreva todos os termos do somatório "telescópico" abaixo e determine o valor da soma.

$$\sum_{i=1}^{6}a_i-a_{i+1}.$$

8. Com base no resultado que você obteve no Exercício 7, calcule

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}.$$

(Dica: suponha que $a_i=\frac{1}{i}$).

9. O coeficiente de rendimento (CR) dos alunos da UNICAMP é calculado pela fórmula

$$CR=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}N_iC_i\right)}{\left(10\sum_{i=1}^{n}C_i\right)},$$

em que N_i e C_i são, respectivamente, a nota e o número de créditos relativos à i-ésima disciplina, e n é o número de disciplinas cursadas. Usando as notas que você acredita que terá ao final do semestre, calcule o seu CR.

Respostas dos Exercícios 6.2

1. a) 2 b) 100 c) 25/48 d) 19/10 e) 21/10 f) 0 g) −22 h) 3/17 i) 7 j) 6

2. a) $\sum_{i=1}^{200}i$ b) $\sum_{i=1}^{200}\frac{i}{2}$ c) $\sum_{i=1}^{100}\sqrt{i}$ d) $\sum_{i=1}^{200}(-1)^i\,i$ e) $\sum_{i=1}^{10}i^2$ f) $\sum_{i=1}^{5}3^i$ g) $\sum_{i=1}^{50}\frac{1}{i(i+1)}$ h) $\sum_{i=1}^{10}\frac{i^2}{i!}$ i) $\sum_{i=1}^{10}(3+5i)$ j) $\sum_{i=1}^{10}(-x)^{i-1}$

3. a) 10000 b) 9900 c) 2565 d) 14400 e) 2460 f) 3030 g) 1000 h) 420

4. a) 3030 b) 11375 c) 4020 d) 4545

5. 100.500

6. a) 25 b) 2 c) 5 d) 20

7. $a_1 - a_7$.

8. A soma é igual a $\frac{6}{7}$.

9. ...

6.3 Progressões aritméticas

Há dois tipos principais de sequências, cada qual associado a uma função real. O primeiro deles, chamado *progressão aritmética* é a versão discreta da função afim (ou linear), como mostra o exemplo abaixo.

Problema 1. Poltronas de um teatro

Em um pequeno teatro, a primeira fileira tem 10 poltronas, a segunda fileira tem 2 poltronas a mais que a primeira, a terceira tem 2 poltronas a mais que a segunda, e assim por diante. Quantas poltronas tem a sexta fileira? E quantas poltronas tem uma fileira n qualquer?

Solução.

Figura 6.5: Planta do teatro do Exemplo 1.

O enunciado desse problema descreve uma sequência definida recursivamente, da qual conhecemos o primeiro termo – $a_1 = 10$ – e a fórmula do termo geral, que é

$$a_i = a_{i-1} + 2, \qquad \text{para } i \geq 2.$$

Aplicando essa fórmula, obtemos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 = 10 + 2 = 12 \\ a_3 &= a_2 + 2 = 12 + 2 = 14 \\ a_4 &= a_3 + 2 = 14 + 2 = 16 \\ a_5 &= a_4 + 2 = 16 + 2 = 18 \\ a_6 &= a_5 + 2 = 18 + 2 = 20 \end{aligned}$$

Logo, a sexta fileira tem 20 poltronas.

Usando a mesma fórmula recursiva do termo geral, podemos encontrar o número de poltronas de qualquer fileira n. Entretanto, essa estratégia é inconveniente, pois seu uso para a determinação de a_n exige o cálculo de todos os termos anteriores, ou seja, de $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$.

Tentemos, então, definir uma fórmula para o termo geral que dependa apenas de a_1 e de n, e não de a_{n-1}, seguindo a mesma ideia apresentada no Problema 7 da Seção 6.1. Comecemos escrevendo os termos da sequência em relação a a_1. Para o segundo termo não há mistério, já que a fórmula recursiva nos diz diretamente que

$$a_2 = a_1 + 2.$$

Para escrever o terceiro termo em função de a_1, combinamos a fórmula recursiva com a expressão de a_2 dada acima, obtendo

$$a_3 = \underbrace{a_2 + 2}_{\text{fórmula recursiva}} = \underbrace{a_1 + 2}_{a_2} + 2 = a_1 + 2 \cdot 2.$$

Repetindo esse procedimento para os termos a_4, a_5 e a_6, encontramos

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + 2 = a_1 + 2 \cdot 2 + 2 = a_1 + 3 \cdot 2 = 16 \\ a_5 &= a_4 + 2 = a_1 + 3 \cdot 2 + 2 = a_1 + 4 \cdot 2 = 18 \\ a_6 &= a_5 + 2 = a_1 + 4 \cdot 2 + 2 = a_1 + 5 \cdot 2 = 20 \end{aligned}$$

Observando atentamente os números destacados em vermelho nas expressões acima, notamos que cada um deles é exatamente uma unidade menor que o índice do termo correspondente, de modo que,

$$a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot 2$$
$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot 2$$
$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot 2$$
$$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 2$$
$$a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot 2$$

Generalizando essa ideia para a_n, o enésimo termo da sequência – que corresponde ao número de poltronas na enésima fileira – obtemos

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 2.$$

Logo, a fórmula do termo geral é $a_n = 10 + (n - 1) \cdot 2$.

Sequências nas quais a diferença entre dois termos sucessivos é constante, como ocorre no exemplo acima, são chamadas *progressões aritméticas*.

Progressão aritmética

Uma **progressão aritmética** é uma sequência na forma

$$a_1, \quad a_1 + r, \quad a_1 + 2r, \quad a_1 + 3r, \quad a_1 + 4r, \quad a_1 + 5r, \quad \cdots$$

em que a_1 é o **primeiro termo** e r é a **razão** da sequência. O termo geral de uma progressão aritmética é

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

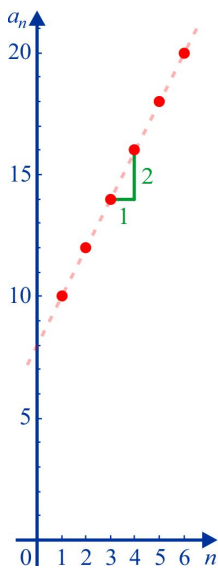



Figura 6.6: Número de poltronas em função da fileira do teatro.

A Figura 6.6 mostra o gráfico da progressão aritmética do Problema 1. Note que o gráfico é formado apenas pelos pontos vermelhos. Além disso, a coordenada vertical de cada ponto fornece o número de cadeiras da fileira do teatro cujo número é dado pela coordenada horizontal:

$$(1, 10), \ (2, 12), \ (3, 14), \ (4, 16), \ (5, 18), \ (6, 20), \ \ldots$$

A linha tracejada que aparece no gráfico serve apenas para indicar que a progressão aritmética é a versão discreta da função linear (ou afim), na qual a variável – que aqui denominamos n – só pode assumir os valores inteiros positivos 1, 2, 3, ...

A razão r da sequência é a forma discreta da inclinação da reta associada à função afim. Conforme indicado em verde na Figura 6.6, o valor de r corresponde à razão entre a variação do número de cadeiras e a variação do número da fileira do teatro. Uma vez que a variação de uma unidade na horizontal provoca uma variação de duas unidades na vertical, temos

$$r = \frac{\Delta a}{\Delta n} = \frac{2}{1} = 2.$$

Vejamos, agora, alguns exercícios relacionados a progressões aritméticas.

Problema 2. Progressão com razão e termo inicial dados

Ache o termo geral da progressão que começa em 1 e tem razão 3. Calcule a_{100}.

Solução.

Segundo o enunciado, $a_1 = 1$ e $r = 3$. Logo,

Você pode simplificar essa expressão e escrever $a_n = -2 + 3n$.

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + 3(n-1).$$

A partir da expressão acima, encontramos

$$a_{100} = 1 + 3(100-1) = 1 + 3 \cdot 99 = 1 + 297 = 298.$$

Agora, tente o Exercício 1.

Problema 3. Progressão dada pelos dois primeiros termos

Ache o termo geral da progressão aritmética

$$1024, 1012, \ldots$$

e calcule o vigésimo termos da sequência.

Solução.

O enunciado do problema nos fornece $a_1 = 1024$. Para determinar a razão, basta lembrar que $a_2 = a_1 + r$, de modo que

$$r = a_2 - a_1 = 1012 - 1024 = -12$$

Assim,

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 1024 - 12(n-1).$$

Finalmente, o vigésimo termo da progresão é

$$a_{20} = 1024 - 12(20-1) = 1024 - 12 \cdot 19 = 796.$$

Agora, tente o Exercício 2.

Problema 4. Gráfico de uma progressão aritmética

Um grupo de atletas decidiu criar um clube e espera obter a adesão de 420 sócios já no mês de inauguração. Além disso, o grupo pretende atrair sócios a uma taxa constante até atingir a marca de 2400 pessoas no décimo segundo mês de funcionamento do clube. Escreva o termo geral da progressão que fornece o número de sócios do clube a cada mês (desde sua fundação) e trace o gráfico dessa progressão.

Solução.

Como a taxa de crescimento do número de sócios é constante, podemos modelar o problema usando uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $a_1 = 420$. Para encontrar a razão r, basta dividir a variação do número de sócios pela variação do número de meses. Como o número de sócios deverá crescer o equivalente a $2400 - 420$ pessoas em $12 - 1$ meses, temos

$$r = \frac{\Delta a}{\Delta n} = \frac{2400 - 420}{12 - 1} = \frac{1980}{11} = 180.$$

Logo, espera-se que o clube tenha 180 adesões por mês, o que significa que, no mês n, o número de sócios será dado por

$$a_n = 420 + (n-1)180.$$

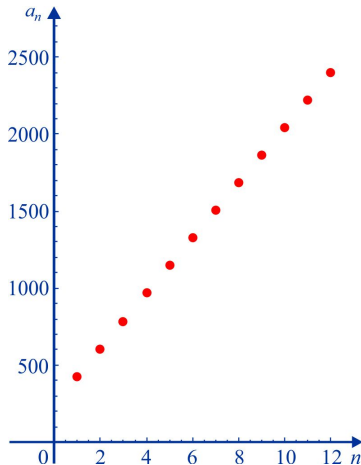



Figura 6.7: Número de sócios de um clube.

O gráfico que mostra o número de sócios a cada mês do primeiro ano de funcionamento do clube é dado na Figura 6.7. Observe que inserimos dez termos entre o primeiro e

o décimo segundo termos da progressão, que são conhecidos. A esse tipo de problema no qual se introduz termos em um intervalo dá-se o nome de *interpolação aritmética*.

Agora, tente o Exercício 7.

Problema 5. Progressão dada por dois termos quaisquer

Ache o termo geral da progressão aritmética cujo quinto termo é 16 e cujo 13^o termo é 102.

Solução.

Para escrever o termo geral de uma progressão aritmética, é preciso determinar seu termo inicial, a_1, e sua razão, r. Para tanto, podemos usar o fato de que os termos $a_5 = 16$ e $a_{13} = 102$ são conhecidos e montar o sistema linear

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + (5-1)r \\ a_{13} = a_1 + (13-1)r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 4r = 16 \\ a_1 + 12r = 102 \end{cases}$$

Isolando a_1 na primeira equação, obtemos

$$a_1 = 16 - 4r.$$

Substituindo, então, essa expressão na segunda equação do sistema, chegamos a

$$(16-4r) + 12r = 102 \quad \Rightarrow \quad 8r = 86 \quad \Rightarrow \quad r = 86/8 = 10{,}75.$$

Finalmente, lembrando que $a_5 = 16$, temos

$$a_1 + 4 \cdot 10{,}75 = 16 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 16 - 43 = -27,$$

de modo que

$$a_n = -27 + 10{,}75(n-1).$$

Agora, tente os Exercícios 3 e 4.

Problema 6. Progressão que envolve uma variável

Sabe-se que os três primeiros termos de uma progressão aritmética são

$$x-1, \; 3x+4 \; \text{ e } \; 6x+2.$$

Determine x e o termo geral da progressão.

Solução.

Como os três termos acima estão em progressão aritmética, é correto supor que a diferença entre dois valores sucessivos seja constante e igual à razão r. Logo,

$$r = (3x+4) - (x-1) = (6x+2) - (3x+4).$$

Resolvendo a equação em x obtemos:

$$(3x+4) - (x-1) = (6x+2) - (3x+4) \quad \Rightarrow \quad 2x+5 = 3x-2 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

Uma vez descoberto o valor de x, determinamos a_1 e r fazendo

$$a_1 = x - 1 = 7 - 1 = 6,$$

$$r = (3x+4) - (x-1) = 2x + 5 = 2 \cdot 7 + 5 = 19.$$

Assim,

$$a_n = 6 + 19(n - 1).$$

Agora, tente o Exercício 11.

Problema 7. Progressão a partir de uma soma e um produto

A soma dos três primeiros termos de uma progressão aritmética crescente é igual a 18 e o produto desses termos é 120. Determine esses três números e o termo geral da sequência.

Solução.

Suponhamos que os três primeiros termos da progressão sejam a_1, a_2 e a_3. Segundo o enunciado, temos

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 18 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 120 \end{cases}$$

Como não conhecemos a razão, r, que define a progressão, reescrevemos os três primeiros termos na forma

$$a_1, \quad a_2 = a_1 + r, \quad a_3 = a_1 + 2r.$$

Substituindo, então, as expressões de a_2 e a_3 no sistema acima, chegamos a

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 18 \\ a_1 \cdot (a_1 + r) \cdot (a_1 + 2r) = 120 \end{cases}$$

Isolando a_1 na primeira equação desse sistema, temos

$$3a_1 + 3r = 18 \quad \Rightarrow \quad 3a_1 = 18 - 3r \quad \Rightarrow \quad a_1 = 6 - r.$$

Finalmente, substituindo a expressão de a_1 na segunda equação do sistema, obtemos

$$\begin{aligned} (6 - r) \cdot (6 - r + r) \cdot (6 - r + 2r) &= 120 \\ (6 - r) \cdot 6 \cdot (6 + r) &= 120 \\ 6 \cdot (36 - r^2) &= 120 \\ 216 - 6r^2 &= 120 \\ 6r^2 &= 96 \\ r^2 &= 16 \\ r &= \pm\sqrt{16} = \pm 4. \end{aligned}$$

Como o anunciado afirma que a progressão é crescente, abandonamos a razão negativa $r = -4$ e adotamos $r = 4$. Assim,

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 - r = 6 - 4 = 2 \\ a_2 &= a_1 + r = 2 + 4 = 6 \\ a_3 &= a_2 + r = 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

e o termo geral é

$$a_n = a_1 + r(n - 1) = 2 + 4(n - 1).$$

Agora, tente o Exercício 12.

Problema 8. Estações de rádio FM

A ANATEL determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com frequências vizinhas.

a) Escreva o termo que fornece a frequência da i-ésima rádio.

b) A 86^a frequência é reservada a uma rádio comunitária. Determine a frequência dessa rádio.

c) Determine quantas emissoras FM podem funcionar em uma mesma região.

Solução.

a) As frequências das emissoras FM formam uma progressão aritmética com razão igual a 0,2 MHz e frequência inicial de 87,9 MHz. Assim,

$$a_i = 87{,}9 + 0{,}2(i-1).$$

b) $a_{86} = 87{,}9 + 0{,}2(86-1) = 87{,}9 + 17{,}0 = 104{,}9$ MHz.

c) A enésima e última emissora tem frequência $a_n = 107{,}9$ MHz, de modo que

Observe que há 20/0,2 = 100 intervalos de 0,2 MHz entre as frequências de 87,9 MHz e 107,9 MHz. Dessa forma, o número de emissoras é igual a 101.

$$\begin{aligned} 87{,}9 + 0{,}2(n-1) &= 107{,}9 \\ 0{,}2(n-1) &= 20 \\ n-1 &= 100 \\ n &= 101. \end{aligned}$$

Logo, podem existir 101 emissoras em cada região.

Agora, tente os Exercícios 17 e 31.

■ Soma dos termos de uma progressão aritmética

No Problema 1, o número de poltronas da i-ésima fileira de um teatro era dado pelo termo geral

$$a_i = 10 + 2(i-1).$$

Nesse caso, se quiséssemos descobrir a capacidade do teatro, supondo que ele tivesse 12 fileiras de assentos, teríamos que calcular

$$\sum_{i=1}^{12} [10 + 2(i-1)].$$

Não seria difícil determinar o valor desse somatório usando as propriedades apresentadas na Seção 6.2. Entretanto, como somas desse tipo são muito frequentes, é mais prático estabelecer uma fórmula geral para a soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer e aplicá-la sempre que necessário.

Consideremos, então, a progressão com termo geral

$$a_i = a_1 + r(i-1),$$

cuja soma dos n primeiros termos é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 + r(i-1).$$

Aplicando as propriedades do somatório, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_1 + r(i-1) &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + \sum_{i=1}^{n} r(i-1) && \text{Propriedade 1.}\\
&= a_1\left[\sum_{i=1}^{n} 1\right] + r\left[\sum_{i=1}^{n} (i-1)\right] && \text{Propriedade 3.}\\
&= a_1\left[\sum_{i=1}^{n} 1\right] + r\left[\sum_{i=1}^{n} i\right] - r\left[\sum_{i=1}^{n} 1\right] && \text{Propriedade 2.}\\
&= a_1 \cdot n + r \cdot \frac{n(n+1)}{2} - r \cdot n && \text{Aplicando as fórmulas de somatório.}\\
&= \frac{2a_1 n + rn(n+1) - 2rn}{2} && \text{Adotando um denominador comum.}\\
&= \frac{n}{2}\left[2a_1 + r(n+1) - 2r\right] && \text{Pondo } \tfrac{n}{2} \text{ em evidência.}\\
&= \frac{n}{2}\left[2a_1 + r(n-1)\right] && \text{Simplificando o resultado.}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

O quadro abaixo resume o resultado que acabamos de obter.

Soma dos termos de uma progressão aritmética

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de termo geral $a_i = a_1 + (i-1)r$ é

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right] \qquad \text{ou} \qquad S_n = n\left[\frac{a_1 + a_n}{2}\right].$$

Observe que, usando a expressão de a_n, é fácil obter a segunda fórmula a partir da primeira.

Pronto! Agora que dispomos de uma fórmula geral, podemos aplicá-la ao problema do teatro, bastando para isso que definamos $n = 12$, $a_1 = 10$, e $r = 2$:

$$\sum_{i=1}^{12} a_i = \frac{12}{2}\left[2 \cdot 10 + 2 \cdot (12-1)\right] = 6\left[20 + 2 \cdot 11\right] = 252.$$

Logo, o teatro tem capacidade para 252 espectadores.

Exemplo 9. Soma dos termos de uma progressão aritmética

Para determinar a soma dos 20 primeiros termos da progressão cujo termo geral é

$$a_i = 3 + (i-1)5,$$

basta substituir $a_1 = 3$, $r = 5$ e $n = 20$ na fórmula acima, o que fornece

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2 \cdot 3 + (20-1) \cdot 5\right] = 10\left[6 + 19 \cdot 5\right] = 1010.$$

Problema 10. Figuras com palitos

Considere a sucessão de figuras apresentada na Figura 6.8. Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.

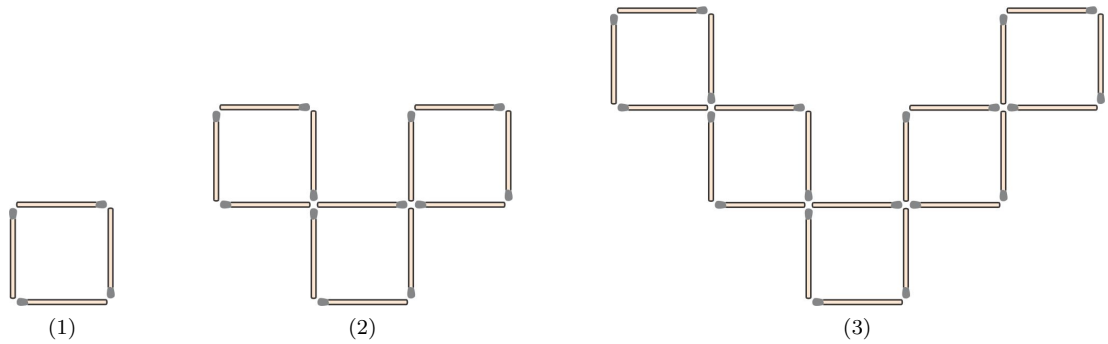



Figura 6.8: Figuras formadas por palitos.

a) Suponha que essas figuras representem os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Suponha também que F_1, F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as Figuras 6.8(1), 6.8(2) e 6.8(3). Escreva a expressão geral de F_n, que fornece o número de fósforos utilizados para formar a enésima figura dessa sucessão.

b) Calcule o número de fósforos da décima figura da sequência.

c) Determine o número de fósforos necessários para que seja possível exibir concomitantemente todas as primeiras 50 figuras.

Solução.

a) Contando os palitos mostrados na Figura 6.8, observamos que

$$F_1 = 4, \qquad F_2 = 3 \cdot 4 = 12 \qquad \text{e} \qquad F_3 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Concluímos, então, que, entre duas figuras sucessivas, há um aumento de dois quadrados formados por 4 palitos, o que fornece um total de 8 palitos. Sendo assim, o número de palitos da enésima figura será dado pelo termo geral de uma progressão aritmética de razão 8 e termo inicial 4, ou seja,

$$F_n = 4 + (n-1) \cdot 8.$$

b) Aplicando a fórmula obtida no item acima, obtemos

$$F_{10} = 4 + (10-1) \cdot 8 = 76.$$

Logo, a décima figura tem 76 palitos de fósforo.

c) A soma do número de palitos empregados para exibir cada uma das primeiras 50 figuras é dada por

$$\sum_{n=1}^{50} F_n = \frac{50}{2}[2 \cdot 4 + (50-1)8] = 25[8 + 49 \cdot 8] = 10000.$$

Portanto, são necessários 10.000 palitos de fósforo para exibir concomitantemente as 50 figuras.

Agora, tente os Exercícios 22 e 24.

Problema 11. Soma dos números ímpares

Calcule $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 99$.

Solução.

Notamos que os valores somados correspondem aos números ímpares de 1 a 99, os quais podem ser descritos pela progressão aritmética que tem termo inicial $a_1 = 1$ e razão 2. Nesse caso, o termo geral é

$$a_i = 1 + (i - 1)2.$$

Embora saibamos que os termos inicial e final da sequência são, respectivamente, $a_1 = 1$ e $a_n = 99$, ainda não conhecemos o valor de n, ou seja não sabemos quantos termos devem ser somados. Felizmente, esse valor pode ser facilmente encontrado igualando a expressão de a_n a 99:

$$a_n = 1+(n-1)2 = 99 \quad \Rightarrow \quad 1+2n-2 = 99 \quad \Rightarrow \quad 2n = 100 \quad \Rightarrow \quad n = 50.$$

Logo, a soma desejada corresponde a $\sum_{i=1}^{50} 1-(n-1)2$. Usando, então, segunda fórmula apresentada no quadro acima, obtemos

$$S_n = n\left[\frac{a_1 + a_n}{2}\right] = 50\left[\frac{1 + 99}{2}\right] = 50 \cdot 50 = 2500.$$

Agora, tente o Exercício 16.

Problema 12. Número de fileiras de um teatro

Pretende-se construir um teatro de modo que sua sala tenha 10 poltronas na primeira fila, 12 na segunda, 14 na terceira, e assim por diante. Quantas fileiras o teatro deve ter para que comporte, ao menos, 500 pessoas sentadas?

Solução.

Temos, aqui, um teatro similar àquele apresentado no Problema 1, já que a primeira fileira tem 10 poltronas e há um acréscimo de 2 assentos entre fileiras sucessivas. Nesse caso, o número de poltronas da i-ésima fila é dado pelo termo geral da progressão aritmética com termo inicial $a_1 = 10$ e razão 2, ou seja,

$$a_i = 10 + (i - 1)2.$$

Entretanto, o objetivo do problema não é apenas o cálculo do número total de poltronas do teatro, mas a determinação de um número de fileiras, n, que faça com que o teatro comporte no mínimo 500 espectadores. Assim, notando que o total de poltronas das n fileiras corresponde a

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 10 + (n - 1) \cdot 2] = \frac{n}{2}[20 + 2n - 2] = 9n + n^2,$$

determinamos o valor de n exigindo que a expressão acima seja maior ou igual ao número desejado de poltronas, ou seja,

$$S_n \geq 500 \quad \Rightarrow \quad n^2 + 9n \geq 500 \quad \Rightarrow \quad n^2 + 9n - 500 \geq 0.$$

Para resolver essa inequação, determinamos o discriminante da equação $n^2+9n-500 = 0$,

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-500) = 2081$$

e usamos a fórmula de Bháskara para obter as suas raízes:

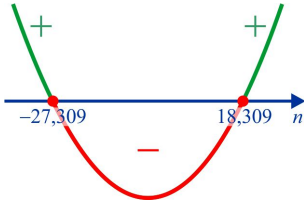
$$n = \frac{-9 \pm \sqrt{2081}}{2 \cdot 1} \approx \frac{-9 \pm 45{,}618}{2}.$$

Portanto, as raízes da equação associada são $n = 18{,}309$ e $n = -27{,}309$.

Voltando, então, à inequação original, podemos encontrar sua solução usando a estratégia apresentada na Seção 4.1, que consiste em esboçar o gráfico da função $f(n) = n^2 + 9n - 500$ e, a partir dele, determinar os valores de n para os quais $f(n) \geq 0$.

Observando que o termo que multiplica n^2 é positivo (ou seja, $a > 0$), concluímos que o gráfico de $f(n)$ tem concavidade para cima, como mostra a Figura 6.9, de modo que a solução da inequação é dada por

$$n \leq -27{,}309 \qquad \text{ou} \qquad n \geq 18{,}309.$$

Figura 6.9: Esboço do gráfico de $f(n) = n^2 + 9n - 500$.

Finalmente, como n deve ser um número inteiro e positivo, concluímos que $n \geq 19$, ou seja, a sala precisa ter ao menos 19 fileiras de poltronas.

Agora, tente os Exercícios 29 e 32.

Exercícios 6.3

1. O termo inicial e a razão de algumas progressões aritméticas são dados abaixo. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.
   a) $a_1 = 500$, $r = -25$. a_{21}?
   b) $a_1 = 1/3$, $r = 1/6$. a_{35}?
   c) $a_1 = -100$, $r = 4$. a_{51}?
   d) $a_1 = \sqrt{2}$, $r = 3\sqrt{2}$. a_{18}?

2. Os dois primeiros termos de algumas progressões aritméticas são dados abaixo. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.
   a) $4, 1, \ldots$ a_{12}?
   b) $-12{,}5;\ -7;\ \ldots$ a_{10}?
   c) $-\frac{3}{2}, 1, \ldots$ a_{20}?
   d) $2\pi, 6\pi, \ldots$ a_{25}?

3. Determine o termo geral de uma progressão aritmética sabendo que seu quarto termo é 25 e seu décimo termo é 33.

4. Determine o termo geral de uma progressão aritmética sabendo que seu sexto termo é 200 e seu décimo quarto termo é 168.

5. Determine o termo geral de uma progressão aritmética sabendo que seu 100° termo é 500 e seu 110° termo é 1045.

6. Determine o termo geral de uma progressão aritmética sabendo que seu 10° termo é 3 e seu 22° termo é 1.

7. Trace o gráfico da progressão definida por $a_n = 10 - \frac{5}{2}(n-1)$.

8. Trace o gráfico da progressão definida por $a_n = -4 + 2(n-1)$.

9. Trace um gráfico de barras que represente a progressão definida por $a_n = -4 + 2(n-1)$.

10. Sabendo que os três primeiros termos de uma progressão aritmética valem

$$x,\ 2x+3 \ \text{ e } \ 7x-4,$$

determine o termo geral da progressão.

11. Supondo que os três primeiros termos de uma progressão aritmética sejam

$$5+2x,\ 11+4x \ \text{ e } \ 13+8x,$$

determine x e o termo geral da progressão.

12. A soma dos três primeiros termos de uma progressão aritmética decrescente é 22,5 e o produto do primeiro pelo terceiro termo é igual a 14. Determine os três primeiros termos e o termo geral da sequência.

13. A soma dos três primeiros termos de uma progressão aritmética crescente é 36 e a soma dos quadrados desses termos é 530. Determine os três termos e o termo geral da sequência.

14. A soma dos três primeiros termos de uma progressão aritmética decrescente é 27 e o produto desses termos é 405. Determine os três termos e o termo geral da sequência.

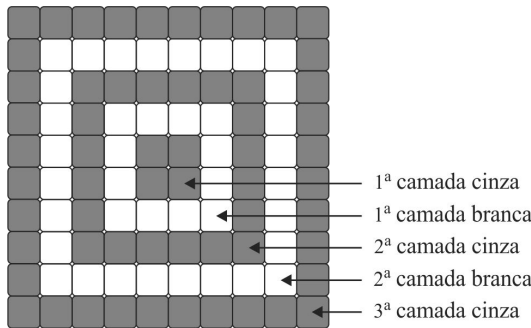
15. Em uma progressão aritmética crescente, a soma dos dois primeiros termos é igual ao terceiro termo, e o produto dos dois primeiros termos é 128. Determine o termo geral da sequência.

16. Calcule as somas abaixo.
    a) Todos os inteiros pares menores ou iguais a 100.
    b) Os 100 primeiros inteiros positivos pares.
    c) Os primeiros 20 termos da progressão aritmética $3, 8, \ldots$

17. No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R$ 600 mil e uma despesa de R$ 800 mil. Para voltar a ter lucro, a empresa pretende manter constante a receita, e reduzir suas despesas, mensalmente, em exatos R$ 45 mil.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão aritmética que fornece o valor da despesa em função de n, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente.

b) Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.

18. No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura abaixo, que mostra apenas a parte central do mosaico.

a) Determine o número de ladrilhos da 10ª camada cinza.

b) Supondo que o mosaico tenha exatamente 10 camadas de cada cor, calcule o número de ladrilhos brancos e o número de ladrilhos cinza empregados na sua construção.

19. Um site de relacionamento tem 2200 membros e planeja aumentar o número de integrantes usando uma estratégia agressiva de propaganda. O site espera que 100 novos membros entrem na primeira semana após a propaganda, 200 entrem na segunda semana, 300 entrem na terceira semana, etc. Caso essa estratégia dê certo, determine em quantas semanas o site terá 10000 membros.

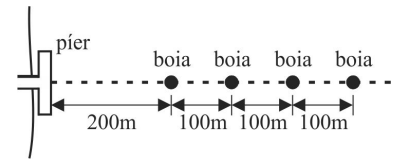
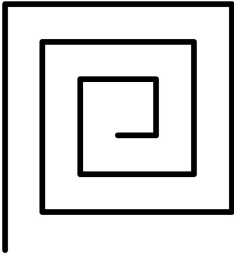
20. Um auditório tem poltronas organizadas em fileiras. A terceira fileira tem 28 poltronas e a quarta tem 32 poltronas. Sabendo que o número de poltronas aumenta de forma constante entre fileiras sucessivas, e que o auditório tem 30 fileiras de poltronas,

a) Determine o número de poltronas da 1^a fileira.

b) Determine o número de poltronas da n-ésima fileira, em que n é um número natural entre 1 e 30.

c) Determine o número de poltronas do auditório.

21. A segunda fileira de um teatro tem 20 poltronas e a quinta tem 26 poltronas. Sabendo que o número de poltronas aumenta de forma constante entre fileiras sucessivas e que o auditório possui 740 poltronas, determine o número total de fileiras do auditório.

22. Um barco será usado para recolher 20 boias que foram colocadas em linha reta, como mostra a figura abaixo. A primeira boia está a 200 m do píer de onde partirá o barco, e cada uma das demais boias está a uma distância de 100 m da anterior. Como o barco é muito pequeno, só é possível transportar uma boia por vez. Desse modo, o barqueiro pegará a primeira boia e retornará ao píer. Em seguida, ele buscará a segunda boia, retornando novamente ao píer. Esse processo será repetido até que todas as boias tenham sido recolhidas.

a) Determine a distância percorrida pelo barco (ida e volta) para buscar cada uma das quatro primeiras boias.

b) Escreva a fórmula do termo geral, a_n, da progressão que fornece a distância percorrida pelo barco (ida e volta) para resgatar apenas a n-ésima boia.

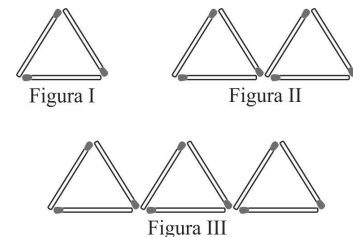
c) Determine a distância total percorrida pelo barco para recolher todas as boias.

23. Um atleta que está se preparando para a maratona pretende correr 15 km diariamente na primeira semana de treino, e aumentar a distância em 1,5 km a cada semana, até atingir a marca de 42 km.

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece a distância diária percorrida pelo atleta na i-ésima semana.

b) Determine qual será a última semana de preparação do atleta, que é aquela em que ele estará correndo os 42 km.

c) Lembrando que cada semana é composta por 7 dias, determine quantos quilômetros o atleta correrá, ao todo, em sua preparação.

24. Considere as figuras apresentadas a seguir, que representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras formadas por palitos de fósforo.

a) Suponha que F_1, F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as Figuras 1, 2 e 3. Escreva a expressão geral de F_i (o número de fósforos usados para formar a Figura i) e calcule F_{10}.

b) Suponha que você deseje exibir concomitantemente as figuras dessa sucessão, começando pela primeira. Quantas figuras é possível exibir com 360 fósforos?

25. Uma pessoa emite um som de 60 decibéis em um local em que há eco.

a) Se que cada eco tem 3,98 decibéis a menos que o som anterior, escreva a progressão que descreve a "altura" (em decibéis) do i-ésimo som, começando pelo som original e incluindo os ecos.

b) Se o som mais baixo que o ouvido humano consegue perceber tem 0 decibel, quantos ecos o som de 60 decibéis produz?

26. Uma pilha de toras de madeira tem 30 troncos na camada inferior, 29 troncos na segunda camada, 28 na terceira, e assim sucessivamente, até a última camada, que tem 12 toras. Calcule o número total de toras da pilha.

27. Os participantes da maratona de Ipatinga têm uma razão a mais para correr: os vultosos prêmios da prova. O primeiro colocado fatura R$ 1.500, o segundo recebe R$ 1.425, o terceiro embolsa R$ 1.350, e assim por diante, até o 20^o colocado.

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece o prêmio recebido em relação à posição de chegada do participante.

b) Determine o valor a ser recebido pelo 12^o colocado.

c) Calcule o valor gasto pela organização da prova para pagar os 20 prêmios.

28. Para cobrir o piso de uma sala que tinha formato trapezoidal, João cortou várias tábuas de madeira. A primeira tábua tinha 1,2 m de comprimento, a segunda tinha 1,4 m, a terceira tinha 1,6 m, e assim por diante.

a) Escreva a fórmula de a_i, o termo geral da progressão, que fornece o comprimento da i-ésima tábua.

b) Se João gastou um total de 39 m em tábuas, calcule o número de tábuas usadas para cobrir o piso.

29. Um órgão de proteção do meio ambiente vem acompanhando o ritmo de desmatamento em uma determinada região do país. A tabela abaixo fornece a área desmatada anualmente desde o início do monitoramento.

Ano	Área (km^2)
1	36
2	48
3	60

a) Escreva uma progressão que forneça a área desmatada no ano i, em km^2.

b) Sem enumerar o que acontece ano a ano, determine a área desmatada no ano 11.

c) Determine em que ano a área total desmatada (somando o desflorestamento ano a ano) atingirá 1800 km^2.

30. A tabela abaixo fornece a expectativa de sobrevida dos brasileiros, segundo os dados de 2013 do IBGE.

Idade (anos)	Sobrevida (anos)
1	75,0
2	74,1
3	73,2

a) Escreva a fórmula de a_n, o termo geral da progressão que fornece a sobrevida de um brasileiro com n anos.

b) Calcule a sobrevida aproximada de uma pessoa com 50 anos.

c) Essa progressão só fornece uma boa aproximação da sobrevida para quem tem até 60 anos. Supondo que ela valesse para $n > 60$, calcule em que idade a sobrevida seria aproximadamente igual a zero.

31. Cada canal de TV UHF tem uma frequência fixa. A frequência do canal 14, por exemplo, é 471,25 MHz, enquanto a do canal 15 é 477,25 MHz, e a do canal 16 é 483,25 MHz. Com base nesses dados,

a) Escreva a fórmula de a_n, o termo geral da progressão que fornece a frequência (em MHz) do canal n.

b) Determine a frequência do canal 25.

c) Em breve, a faixa que vai de 700 a 800 MHz será destinada à telefonia com tecnologia 4G. Sem enumerar as frequências, determine o primeiro canal de TV UHF que será suprimido quando isso ocorrer.

32. Uma curva é composta por segmentos de reta. A figura abaixo ilustra a parte da curva composta pelos 12 primeiros segmentos. Sabe-se que o primeiro segmento mede 1 cm, o segundo mede 1,5 cm, o terceiro mede 2 cm, e assim por diante.

a) Quanto mede o i-ésimo trecho da curva?

b) Se a curva é formada por 30 segmentos, qual é o seu comprimento total?

c) Quantos trechos tem uma curva com comprimento total de 540 cm?

33. Joaquim faz uma revisão de seu carro a cada 10.000 km. O custo das revisões do carro de Joaquim varia de acordo com a tabela abaixo.

Revisão	Preço (R$)
1	240
2	280
3	320

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece o custo aproximado da n-ésima revisão.
b) Sem enumerar os preços das revisões, determine o custo da revisão dos 120.000 km.
c) Sem enumerar os preços das revisões, determine com que quilometragem o carro estará quando o gasto acumulado com as revisões atingir R$ 7.800,00.

34. Em seu primeiro ano de funcionamento, uma empresa de ônibus transportou 80 mil passageiros. A partir de então, a empresa tem conseguido 10 mil novos passageiros a cada ano.

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece o número de passageiros transportados anualmente pela empresa, desde o seu ano de inauguração.
b) Determine em quanto tempo a empresa atingirá a marca de 5 milhões de passageiros transportados, isto é, em quantos anos a soma dos passageiros transportados desde a estreia da empresa atingirá 5 milhões.

Respostas dos Exercícios 6.3

1. a) $a_n = 500 - 25(n-1)$, $a_{21} = 0$
b) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{n-1}{6}$, $a_{35} = 6$
c) $a_n = -100 + 4(n-1)$, $a_{51} = 100$
d) $a_n = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}(n-1)$, $a_{18} = 55\sqrt{2}$

2. a) $a_n = 4 - 3(n-1)$. $a_{12} = -29$
b) $a_n = -12{,}5 + 5{,}5(n-1)$. $a_{10} = 37$
c) $a_n = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}(n-1)$. $a_{20} = 46$
d) $a_n = 2\pi + 4\pi(n-1)$. $a_{25} = 102\pi$

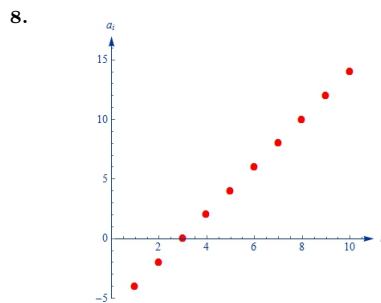
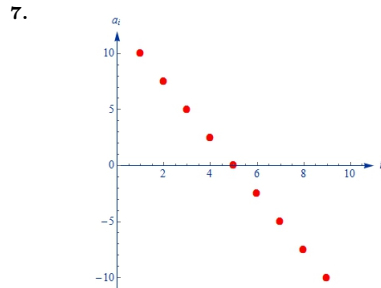
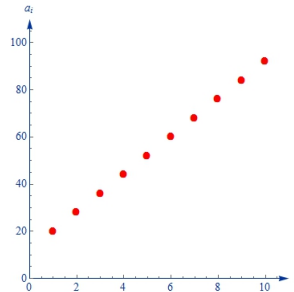
3. $a_n = 21 + \frac{4}{3}(n-1)$

4. $a_n = 220 - 4(n-1)$

5. $a_n = 500 + 5(n-1)$

6. $a_n = \frac{9}{2} - \frac{n-1}{6}$

7.

8.

9.

10. $a_n = \frac{5}{2} + \frac{11}{2}(n-1)$

11. $x = 2$, $a_n = 9 + 10(n-1)$

12. 14; 7,5; 1 $a_n = 14 - \frac{13}{2}(n-1)$

13. 5, 12, 19 $a_n = 5 + 7(n-1)$

14. 15, 9, 3 $a_n = 15 - 6(n-1)$

15. $a_n = 8 + 8(n-1)$

16. a) 2550 b) 10100 c) 1010

17. a) $a_n = 800 - 45(n-1)$
b) No sexto mês, ou seja, daqui a cinco meses.

18. a) 148
b) 760 ladrilhos cinza e 840 ladrilhos brancos.

19. O site terá 10000 membros em 12 semanas.

20. a) 20 poltronas
b) $a_n = 16 + 4n$
c) 2340 poltronas

21. 20 fileiras

22. a) 400 m, 600 m, 800 m e 1000 m
b) $a_n = 200n + 200$
c) $S_{20} = 46$ km

23. a) $a_i = 15 + 1{,}5(i-1)$
b) 19 semanas
c) 3790,5 km

24. a) $F_i = 3i$. $F_{10} = 30$
b) 15 figuras

25. a) $a_i = 60 - 3{,}98(i-1)$
b) 15 ecos, ou seja, o 16° som.

26. 399 toras

27. a) $a_n = 1500 - 75(n-1)$
b) R$ 675,00
c) R$ 15.750,00

28. a) $a_n = 1{,}2 + 0{,}2(n-1)$
b) 15 tábuas

29. a) $a_i = 36 + 12(i-1)$
b) 156 km^2
c) 15 anos

30. a) $a_n = 75 - 0{,}9(n-1)$
b) 30,9 anos
c) Aos 84 anos

31. a) $a_n = 393{,}25 + 6(n-1)$
b) 537,25 MHz
c) O canal 54

32. a) $1 + 0{,}5(i-1)$ cm
b) 247,5 cm
c) 45 segmentos

33. a) $a_i = 240 + 40(n-1)$
b) R$ 680,00
c) 150.000 km

34. a) $a_i = 80 + 10(i-1)$
b) Em 25 anos

6.4 Progressões geométricas

Além das progressões aritméticas, que são a versão discreta da função afim, há um segundo tipo importante de sequência, denominado *progressão geométrica*, que está associado à função exponencial. Essa nova classe de sequências não só possui muitas aplicações científicas, como também forma a base dos modelos usados em finanças, como se verá na Seção 6.5. Para introduzi-la, vamos usar como exemplo um problema associado à progressão salarial dos funcionários de uma empresa.

Problema 1. Salário anual

Uma empresa que está contratando funcionários oferece um salário inicial de quarenta mil reais por ano (incluindo os pagamentos mensais, o décimo terceiro salário e o adicional de férias). Além disso, a empresa informa que, a cada ano de trabalho, seus funcionários têm um aumento de salário correspondente a 3% do valor recebido no ano anterior (desprezando-se a correção da inflação, que também é considerada no reajuste salarial). Determine o salário anual de um funcionário em cada um dos três primeiros anos na empresa e calcule o salário que ele receberá no enésimo ano de emprego.

Solução.

Digamos que o salário no ano i seja representado por a_i. Como, a cada ano, o salário aumenta 3% em relação ao valor recebido no ano anterior, o salário no segundo ano é igual a

$$a_2 = a_1 + \frac{3}{100}a_1 = a_1 \cdot (1 + 0{,}03) = 1{,}03a_1 = 1{,}03 \cdot 40000 = \text{R\$ } 41.200{,}00.$$

Da mesma forma, como o salário do terceiro ano é 3% maior que o salário do segundo ano, o montante recebilo pelo funcionário no terceiro ano de emprego corresponde a

$$a_3 = a_2 + \frac{3}{100}a_2 = a_2 \cdot (1 + 0{,}03) = 1{,}03a_2 = 1{,}03 \cdot 41200 = \text{R\$ } 42.436{,}00.$$

Observando que $a_2 = 1{,}03a_1$ e $a_3 = 1{,}03a_2$, percebemos que, ao dividir o salário de um ano pelo valor recebido no ano anterior, obtemos um valor constante, ou seja,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 1{,}03.$$

Sequências nas quais a razão entre dois termos sucessivos é constante são chamadas **progressões geométricas**. Por sua vez, a constante adimensional obtida na divisão é chamada **razão**. Nesse exemplo, a razão é igual a 1,03.

Usando a letra r para representar a razão, podemos dizer que, em qualquer ano i, temos

$$a_i = a_{i-1} \cdot r,$$

que é a forma recursiva do termo geral da progressão geométrica. Para obter uma fórmula equivalente, mas que dependa apenas de r e a_1, vamos tentar calcular alguns termos iniciais da sequência, começando por a_3:

$$a_3 = \underbrace{a_2 \cdot r}_{\text{fórmula recursiva}} = \underbrace{a_1 \cdot r}_{a_2} \cdot r = a_1 \cdot r^{2}$$

Repetindo o procedimento para os três termos seguintes, obtemos

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^{3}, \\ a_5 &= a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^{4}, \\ a_6 &= a_5 \cdot r = a_1 \cdot r^4 \cdot r = a_1 \cdot r^{5}. \end{aligned}$$

Observando atentamente as fórmulas acima, notamos que, em todas, o expoente de r (mostrado em vermelho) é uma unidade menor que o índice do termo. Assim, concluímos que

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Portanto, o salário de um funcionário em seu enésimo ano na empresa é dado por

$$a_n = 40000 \cdot 1{,}03^{n-1}.$$

Um resumo do que foi visto nesse problema é apresentado no quadro a seguir.

Progressão geométrica

Uma **progressão geométrica** é uma sequência na forma

$$a_1, \quad a_1 \cdot r, \quad a_1 \cdot r^2, \quad a_1 \cdot r^3, \quad a_1 \cdot r^4, \quad a_1 \cdot r^5, \quad \cdots$$

em que a_1 é o **primeiro termo** e r é a **razão** da sequência. O termo geral de uma progressão geométrica é

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Quando $r > 0$ e $r \neq 1$, a progressão geométrica é a versão discreta da função exponencial. Além disso, a progressão é crescente se $r > 1$ e decrescente se $0 < r < 1$.

Problema 2. Progressão com razão e termo inicial conhecidos

Ache o termo geral da progressão que tem razão 3 e começa em 7. Calcule a_9.

Solução.

Como $a_1 = 7$ e $r = 3$, temos

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 7 \cdot 3^{n-1}.$$

Além disso, $a_9 = 7 \cdot 3^{9-1} = 7 \cdot 3^8 = 45927$.

Agora, tente o Exercício 1.

Problema 3. Progressão com os primeiros termos conhecidos

Ache o termo geral da progressão geométrica abaixo e calcule a_{10}.

$$5, -10, 20, \ldots$$

Solução.

Para determinar a razão de uma progressão geométrica, basta dividir um termo pelo seu antecessor, de modo que, por exemplo,

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2.$$

Como, além disso, $a_1 = 5$, temos

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 5 \cdot (-2)^{n-1}.$$

Finalmente, $a_{10} = 5 \cdot (-2)^{10-1} = 5 \cdot (-2)^9 = -2560$.

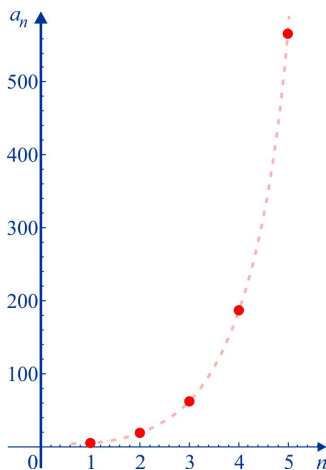
Agora, tente o Exercício 3.

Quando $r > 0$, o gráfico da progressão geométrica é composto pelos pontos da curva definida pela função exponencial $a(n) = a_1 r^{n-1}$, nos quais n é um número inteiro positivo. A Figura 6.10 mostra o gráfico da progressão do Problema 2, que é crescente pois $r > 1$. Note que o gráfico é formado apenas pelos pontos vermelhos. A linha tracejada foi incluída apenas para salientar a relação entre a progressão e a função exponencial.

Figura 6.10: $a_n = 7 \cdot 3^{n-1}$.

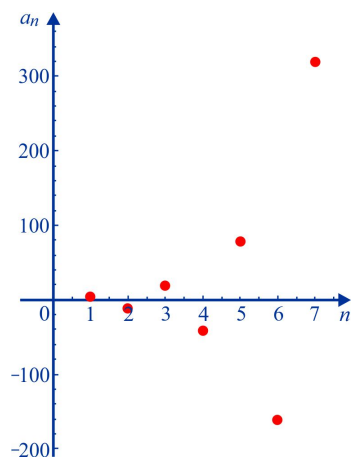



Figura 6.11: $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$.

Por outro lado, se $r < 0$, a sequência é oscilante, a exemplo do que vimos no Problema 3. Nesse caso, a coordenada vertical dos pontos do gráfico ora é positiva, ora é negativa, como mostrado na Figura 6.11.

Problema 4. Progressão da qual se conhece dois termos

Ache o termo geral da progressão geométrica cujo 3^o termo é 48 e que tem 6^o termo igual a 3072.

Solução.

Sabemos que

$$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1} = a_1 \cdot r^2 = 48$$
$$a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} = a_1 \cdot r^5 = 3072$$

Dividindo o sexto termo pelo terceiro, obtemos

$$\frac{a_1 \cdot r^5}{a_1 \cdot r^2} = \frac{3072}{48} \qquad \text{Cálculo de } \tfrac{a_6}{a_3}.$$
$$r^3 = 64 \qquad \text{Simplificação da equação.}$$
$$r = \sqrt[3]{64} \qquad \text{Extração da raiz cúbica.}$$
$$r = 4 \qquad \text{Simplificação do resultado.}$$

Lembrando que $a_3 = 48$, temos

$$a_1 \cdot 4^2 = 48 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = \frac{48}{16} = 3.$$

Logo, $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$.

Agora, tente o Exercício 4.

Problema 5. Gráfico de um progressão geométrica

Uma entidade ambientalista vem registrando o declínio acentuado da população de jacarés-de-papo-amarelo em uma região sujeita a desmatamento intensivo. Segundo a entidade, a espécie contava com 1200 jacarés no primeiro ano de acompanhamento e, desde então, tem sofrido uma redução de 20% dos animais a cada ano.

Trace um gráfico que mostre o tamanho da população em função do ano de monitoramento da espécie, supondo que não haja qualquer ação para conter diminuição do número de jacarés.

Solução.

Se o número de jacarés cai 20% a cada ano, então a população no ano i, denominada a_i, pode ser definida por

$$a_i = a_{i-1} - 0{,}2a_{i-1} \qquad \Rightarrow \qquad a_i = 0{,}8a_{i-1}.$$

Logo, temos uma progressão geométrica de razão $r = 0{,}8$ e termo inicial $a_1 = 1200$. O termo geral dessa progressão é

$$a_i = 1200 \cdot 0{,}8^{i-1}.$$

Os valores aproximados dos dez primeiros termos da sequência são dados na Tabela 6.1. Com base nesses pontos, traçamos o gráfico mostrado na Figura 6.12.

Agora, tente o Exercício 12.

Tabela 6.1

i	a_i
1	1200
2	960
3	768
4	614
5	492
6	393
7	315
8	252
9	201
10	161

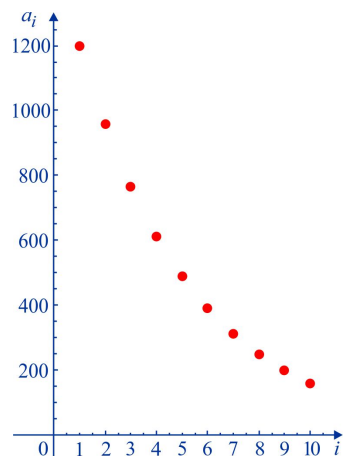



Figura 6.12: $a_i = 1200 \cdot 0{,}8^{i-1}$.

Problema 6. Interpolação geométrica

Insira 5 números reais entre 7 e 28.672 de modo a obter uma progressão geométrica.

Solução.

Nesse problema, temos uma progressão com sete termos, dos quais o primeiro e o último são dados, e os cinco intermediários são desconhecidos. Logo, a progressão geométrica é

$$\underbrace{7}_{a_1},\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad a_5,\quad a_6,\quad \underbrace{28672}_{a_7}.$$

À semelhança do que foi feito no Problema 4, encontramos a razão da sequência dividindo a_7 por a_1:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$\frac{a_1 \cdot r^6}{a_1} = \frac{28672}{7} \qquad \Rightarrow \qquad r^6 = 4096 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[6]{4096} = 4.$$

Assim, os temos desejados são

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r = 7 \cdot 4 = 28,\\ a_3 &= a_2 \cdot r = 28 \cdot 4 = 112,\\ a_4 &= a_3 \cdot r = 112 \cdot 4 = 448,\\ a_5 &= a_4 \cdot r = 448 \cdot 4 = 1792,\\ a_6 &= a_5 \cdot r = 1792 \cdot 4 = 7168. \end{aligned}$$

Agora, tente o Exercício 6.

Problema 7. Floco de neve

Para construir uma curva “floco de neve”, divide-se um segmento de reta em três partes iguais (Figura 6.13a). Em seguida, o segmento central sofre uma rotação e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 6.13b. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 6.13c e 6.13d.

Sabendo que o segmento inicial mede 1 cm, determine o comprimento da curva obtida na décima figura.

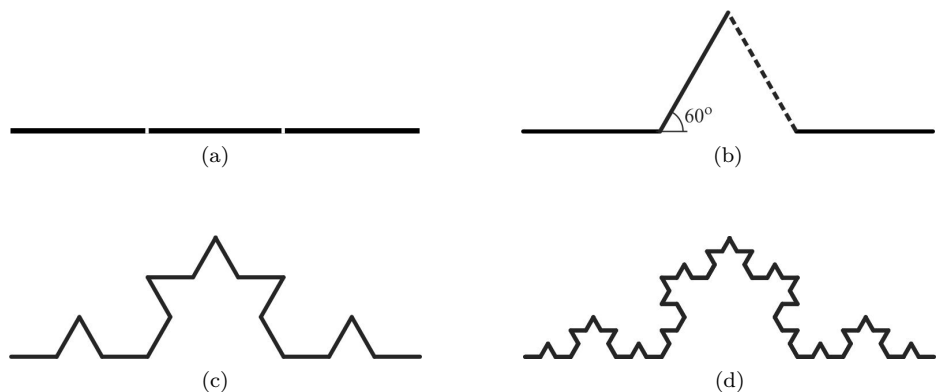



Figura 6.13: Etapas da criação de uma curva “floco de neve”.

Solução.

A Figura 6.13 mostra uma sequência de curvas formadas por segmentos de reta. Para facilitar a nossa análise, denominaremos a_i o comprimento da i-ésima curva, de modo que $a_1 = 1$ cm é o comprimento da primeira curva da sequência.

Entre a primeira curva e a segunda, o número de segmentos cresce, passando de 1 a 4. Por outro lado, o comprimento de cada segmento é reduzido a $\frac{1}{3}$ do comprimento original. Dessa forma,

$$a_2 = \underbrace{4}_{\text{Número de segmentos}} \cdot \underbrace{\left(\frac{a_1}{3}\right)}_{\text{Comprimento do segmento}} = a_1 \cdot \frac{4}{3}.$$

Para a construção da terceira curva, o número de segmentos é novamente multiplicado por quatro, dividindo-se, em contrapartida, cada trecho por três. Logo,

$$a_3 = \underbrace{4 \cdot 4}_{\text{Número de segmentos}} \cdot \underbrace{\left(\frac{a_1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)}_{\text{Comprimento do segmento}} = a_1 \cdot \frac{4^2}{3^2}.$$

Seguindo o mesmo procedimento de multiplicação do número de segmentos por quatro e de divisão de cada segmento em três, obtemos o comprimento da quarta figura, que é dado por

$$a_4 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{Número de segmentos}} \cdot \underbrace{\left(\frac{a_1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)}_{\text{Comprimento do segmento}} = a_1 \cdot \frac{4^3}{3^3}.$$

Note que cada termo é obtido multiplicando-se o anterior por $\frac{4}{3}$, de modo que a_1, a_2, a_3 e a_4 formam uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$ e termo inicial $a_1 = 1$ cm. Portanto, o comprimento da curva da enésima figura é igual a

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \text{ cm},$$

e a curva da décima figura mede

$$a_{10} = \left(\frac{4}{3}\right)^9 \approx 13{,}3 \text{ cm}.$$

Agora, tente o Exercício 11.

Problema 8. Progressão envolvendo uma variável

Seja dada a progressão geométrica

$$x + 3, \quad x + 8, \quad x + 14, \quad \ldots$$

Determine o termo geral da sequência.

Solução.

Para determinar o valor do termo inicial, a_1, e a razão, r, da sequência, devemos lembrar que

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{x+8}{x+3} &= \frac{x+14}{x+8} && \text{Equação } \tfrac{a_2}{a_1} = \tfrac{a_3}{a_2}. \\ (x+3)(x+14) &= (x+8)^2 && \text{Produto cruzado.} \\ x^2+17x+42 &= x^2+16x+64 && (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2. \\ x &= 22 && \text{Simplificação do resultado.} \end{aligned}$$

Agora que dispomos do valor de x, podemos calcular

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x+8}{x+3} = \frac{22+8}{22+3} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

e

$$a_1 = x+3 = 22+3 = 25.$$

Portanto, $a_n = 25 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$.

Agora, tente o Exercício 9.

■ Soma dos termos de uma progressão geométrica

Assim como ocorre com as progressões aritméticas, é útil conhecer uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, pois isso evita que tenhamos que efetuar a soma termo a termo.

Vamos tentar encontrar essa fórmula escrevendo, primeiramente, a soma – que denominamos S_n – na notação usual das progressões geométricas:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Agora, vamos usar um artifício que consiste em definir o produto

$$S_n \cdot r = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n$$

e, em seguida, calcular $S_n \cdot r - S_n$:

$$\begin{array}{rcllllllll} S_n \cdot r & = & & a_1 \cdot r & + \; a_1 \cdot r^2 & + \; \ldots & + \; a_1 \cdot r^{n-2} & + \; a_1 \cdot r^{n-1} & + \; a_1 \cdot r^n \\ -\,S_n & = & -\; a_1 & -\; a_1 \cdot r & -\; a_1 \cdot r^2 & -\; \ldots & -\; a_1 \cdot r^{n-2} & -\; a_1 \cdot r^{n-1} & \\ \hline S_n \cdot r - S_n & = & -\; a_1 & & & & & & + \; a_1 \cdot r^n \end{array}$$

Com esse truque, eliminamos todos os termos do lado direito, exceto dois, de modo que

$$S_n \cdot r - S_n = a_1 \cdot r^n - a_1 \quad \Rightarrow \quad S_n(r-1) = a_1(r^n-1) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}.$$

O quadro abaixo resume esse resultado, além de apresentar uma fórmula equivalente para S_n, levando em conta que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Soma dos termos de uma progressão geométrica

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de termo geral $a_i = a_1 \cdot r^{i-1}$ é

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \qquad \text{ou} \qquad S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}.$$

Exemplo 9. Soma dos salários anuais

No Problema 1, o salário que um funcionário recebia no enésimo ano de trabalho na empresa era dado por

$$a_n = 40000 \cdot 1{,}03^{n-1}.$$

Observando que, nessa fórmula, $a_1 = 40000$ e $r = 1{,}03$, concluímos que, em seus 20 primeiros anos de empresa, um funcionário recebe um total de

$$S_{20} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{40000(1{,}03^{20} - 1)}{1{,}03 - 1} \approx \text{R\$ } 1.074.814{,}98.$$

Agora, tente os Exercícios 13 e 14.

Problema 10. "Corrente" de mensagens

Bernardo deu início a uma "corrente" de *e-mail*, enviando uma mensagem a 5 colegas, e pedindo que cada um a enviasse a 5 pessoas diferentes, e que esse procedimento fosse repetido *ad aeternum*. Supondo que nenhum destinatário tenha recebido a mensagem mais de uma vez,

a) determine quantas pessoas receberam a mensagem na enésima geração da corrente;

b) determine o número total de pessoas que receberam a mensagem até a sexta geração da corrente;

c) determine quantas gerações seriam necessárias para que a mensagem atingisse ao menos um milhão de pessoas.

Solução.

a) Como cinco pessoas receberam a mensagem original de Bernardo, temos $a_1 = 5$. Além disso, a cada geração, o número de destinatários da mensagem foi multiplicado por 5, de modo que $r = 5$. Usando essas informações, concluímos que, na enésima geração da corrente, a mensagem atingiu

$$a_n = 5 \cdot 5^{n-1} \text{ destinatários.}$$

Também podemos escrever $a_n = 5^n$.

b) Somando todos aqueles que receberam a mensagem da primeira à sexta geração da corrente, obtemos

$$S_6 = \frac{5(5^6 - 1)}{5 - 1} = \frac{5 \cdot 15624}{4} = 19530 \text{ pessoas.}$$

c) Para descobrir em que geração a corrente atinge ao menos um milhão de internautas, vamos resolver a equação $S_n = 1.000.000$. Usando, então, nossos conhecimentos sobre equações exponenciais, escrevemos

$$\frac{5(5^n - 1)}{5 - 1} = 1000000 \quad \text{Equação original}$$

$$5^n - 1 = 800000 \quad \text{Multiplicando por } 4/5$$

$$5^n = 800001 \quad \text{Isolando a potência}$$

$$\log(5^n) = \log(800001) \quad \text{Aplicando o logaritmo}$$

$$n\log(5) = \log(800001) \quad \text{Propriedade 7 do logaritmo}$$

$$n = \log(800001)/\log(5) \quad \text{Isolando } n$$

$$n = 8{,}445 \quad \text{Fazendo as contas}$$

Como n deve ser um número inteiro maior ou igual a 8,445, concluímos que, se a corrente chegar à 9^a geração, mais de 1.000.000 pessoas terão recebido o *e-mail*.

Agora, tente os Exercícios 27 e 28.

■ Séries

Como boa parte das sequências e progressões com as quais se lida em matemática são infinitas, imagino que o leitor já tenha se perguntado se é possível calcular a soma não dos n primeiros termos, mas de todos os infinitos termos de uma sequência.

Naturalmente, não seríamos capazes de somar os termos um a um, já isso consumiria um tempo infinito. Entretanto, curiosamente, há sequências infinitas cujo somatório é um número real finito. Por conta desses casos interessantes, os matemáticos decidiram batizar a soma de sequências infinitas com o nome de *série*.

Série

Dada a sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots$, denominamos **série infinita** – ou simplesmente **série** – a soma de todo os seus termos, ou seja,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Além disso, à soma dos n primeiros termos de uma sequência, isto é,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

damos o nome de **enésima soma parcial**.

Exemplo 11. Séries

a) Considere a sequência

$$0{,}1; \quad 0{,}01; \quad 0{,}001; \quad 0{,}0001; \quad 0{,}00001; \quad 0{,}000001; \quad 0{,}0000001; \quad \cdots$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \quad \frac{1}{100000}, \quad \frac{1}{1000000}, \quad \cdots$$

Notando que essa lista pode ser reescrita como

$$\left(\frac{1}{10}\right)^1, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^3, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^4, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^5, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^6, \quad \cdots$$

concluímos que o termo geral da sequência é

$$a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Somando, então, os infinitos termos da sequência, obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Vejamos se essa série fornece um número real finito, ou seja, se a soma não cresce ou decresce ilimitadamente. Para tanto, calculemos as somas parciais passo a passo, observando o que acontece à medida que incluímos um novo termo:

$$\sum_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11$$
$$\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}111$$
$$\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 = 0{,}1111$$
$$\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 = 0{,}11111$$
$$\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + 0{,}00001 = 0{,}111111$$

Como se vê, a adição de um novo termo à soma provoca a inclusão do algarismo 1 à direita do número na forma decimal. Desse modo, somando todos os termos obtemos o número real finito 0,1111111111..., no qual as reticências indicam a existência de infinitos algarismos à direita da vírgula.

Lembrando, então, que 0,11111... é a forma decimal do número 1/9, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{9}.$$

b) Como um segundo exemplo, tentaremos somar os termos da sequência

$$\frac{1}{0!},\quad \frac{1}{1!},\quad \frac{1}{2!},\quad \frac{1}{3!},\quad \frac{1}{4!},\quad \frac{1}{5!},\quad \frac{1}{6!},\quad \frac{1}{7!},\quad \frac{1}{8!},\quad \frac{1}{9!},\quad \cdots$$

cujo termo geral é

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Nesse caso, escrevendo explicitamente os dez primeiros termos do somatório, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} + \cdots$$
$$= 2{,}718281\ldots$$

Se continuássemos a somar os termos dessa sequência infinita, notaríamos que o valor obtido se aproxima do número irracional

$$e \approx 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369996\ldots$$

conhecido como *número de Euler*. Como vimos nas Seções 5.2 e 5.3, essa constante real é usada para definir funções exponenciais, além de ser empregada na definição do logaritmo natural. Agora, você já sabe que é possível definir o número de Euler como

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Você sabia?

Apesar de Leonhard Euler ter sido o primeiro matemático a empregar a letra e para representar esse número, no século 18, ele já havia sido usado, embora de forma indireta, por John Neper no século anterior. Por esse motivo, o número e também é chamado de *constante de Neper*.

■ Séries geométricas

Considere a progressão geométrica definida por

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

na qual temos $a_1 = 1$ e $r = 1/2$. Calculando a soma dos 5, 10 e 20 primeiros termos dessa progressão, obtemos

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_5 = \frac{1(1 - 0{,}5^5)}{1 - 0{,}5} = \frac{1 - 0{,}03125}{0{,}5} = 1{,}9375$$

$$S_{10} = \frac{1(1 - 0{,}5^{10})}{1 - 0{,}5} = \frac{1 - 0{,}0009765625}{0{,}5} = 1{,}998046875$$

$$S_{20} = \frac{1(1 - 0{,}5^{20})}{1 - 0{,}5} = \frac{1 - 0{,}00000095367431640625}{0{,}5} = 1{,}9999980926513671875$$

Note que o resultado se aproxima de 2 à medida que incluímos termos no somatório. De fato, somando os infinitos termos, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

Dizemos, então, que a soma **converge** para 2. Se, por outro lado, a soma não se aproximasse de um número finito, diríamos que ela **diverge**.

A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita é chamada **série geométrica**. A convergência de uma série geométrica ocorre sempre que $|r| < 1$, já que, nesse caso, o valor de r^n se torna arbitrariamente próximo de zero quando $n \to \infty$.

Série geométrica

Seja dada a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots$$

Se $|r| < 1$, a série converge para

$$S = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Por outro lado, se $|r| \geq 1$, a série diverge.

Problema 12. Cálculo de séries geométricas

Calcule as séries geométricas abaixo, caso sejam convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$

Solução.

a) Essa é a série associada à progressão geométrica de termo geral

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

na qual $a_1 = 1$ e $r = \frac{1}{3}$. Uma vez que $|\frac{1}{3}| < 1$, a série é convergente, e seu valor é dado por

$$S = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}.$$

b) Nesse caso, temos $a_1 = 6$ e $r = -\frac{1}{5}$. Como $|-\frac{1}{5}| < 1$, a série é convergente. Além disso,

$$S = \frac{6}{1 - (-1/5)} = \frac{6}{6/5} = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5.$$

c) Essa série geométrica tem $a_1 = \frac{1}{4}$ e $r = \frac{4}{3}$. Como $|\frac{4}{3}| > 1$, a série diverge, ou seja, não possui um valor real finito.

Agora, tente o Exercício 32.

Muitos números racionais, quando expressos na forma decimal, apresentam depois da vírgula um grupo de algarismos que se repete indefinidamente, como mostrado no problema abaixo. Nesse caso, dizemos que o número é uma **dízima periódica**, e podemos usar séries para convertê-lo à forma fracionária.

Problema 13. Dízima periódica

Converta em fração as dízimas periódicas abaixo.

a) 0,777777...   b) 0,0454545...   c) 1,5181818...

Solução.

a) Notamos que

$$\begin{aligned} 0{,}777777\ldots &= 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + 0{,}00007 + \ldots \\ &= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000} + \ldots \\ &= \frac{7}{10} + \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^1 + \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^4 + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Temos, portanto, uma série com termo inicial e razão dados por

$$a_1 = \frac{7}{10} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{1}{10}.$$

Como $|r| < 1$, a série é convergente e vale

$$S = \frac{7/10}{1 - 1/10} = \frac{7/10}{9/10} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{7}{9}.$$

Logo, $0{,}777777\ldots = \frac{7}{9}$.

b) Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} 0{,}0454545\ldots &= 0{,}045 + 0{,}00045 + 0{,}0000045 + \ldots \\ &= \frac{45}{1000} + \frac{45}{100000} + \frac{45}{10000000} + \ldots \\ &= \frac{45}{1000} + \frac{45}{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^1 + \frac{45}{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Essa série tem $a_1 = 45/1000$ e $r = 1/100$, sendo também convergente. Assim, a forma fracionária da dízima é

$$S = \frac{45/1000}{1 - 1/100} = \frac{45/1000}{99/100} = \frac{45}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{45}{990} = \frac{1}{22}.$$

c) Nesse exemplo, é preciso separar a parte do número que é periódica daquela que não se repete. Assim, escrevemos

$$1{,}5181818\ldots = 1{,}5 + 0{,}0181818\ldots.$$

Deixando de lado temporariamente a parte que não se repete, convertemos a parte periódica na notação de somatório aplicando a mesma estratégia apresentada no item anterior:

$$\begin{aligned} 0{,}0181818\ldots &= 0{,}018 + 0{,}00018 + 0{,}0000018 + \ldots \\ &= \frac{18}{1000} + \frac{18}{100000} + \frac{18}{10000000} + \ldots \\ &= \frac{18}{1000} + \frac{18}{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^1 + \frac{18}{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Observando que essa série tem $a_1 = 18/1000$ e $r = 1/100$, obtemos

$$S = \frac{18/1000}{1 - 1/100} = \frac{18/1000}{99/100} = \frac{18}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{18}{990} = \frac{1}{55}.$$

Finalmente, somando essa fração à parte não periódica do número, concluímos que

$$0{,}0181818\ldots = 1{,}5 + \frac{1}{55} = \frac{15}{10} + \frac{1}{55} = \frac{165+2}{110} = \frac{167}{110}.$$

Agora, tente o Exercício 34.

Exercícios 6.4

1. Para cada item abaixo, escreva os quatro primeiros termos e o termo geral da progressão geométrica cujo primeiro termo e cuja razão são dados.

a) $a_1 = 3, \quad r = 4$
b) $a_1 = 2, \quad r = -3$
c) $a_1 = -1, \quad r = 1/2$
d) $a_1 = 3, \quad r = \sqrt{2}$

2. Indique quais sequências abaixo são progressões geométricas. Para as que forem progressões geométricas, encontre a razão.

a) $3, 9, 27, 81, \ldots$
b) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$
c) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$
d) $a^2, a^4, a^8, a^{16}, \ldots$
e) $-2a, 2a^3, -2a^5, 2a^7, \ldots$
f) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \ldots$

3. Em cada item abaixo, são dados os primeiros termos de uma progressão geométrica. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.

a) $\frac{3}{2}, \frac{15}{2}, \ldots \quad a_7?$
b) $-4, -12, \ldots \quad a_5?$
c) $2, -2, \ldots \quad a_{100}?$
d) $10, 5, \ldots \quad a_{10}?$
e) $\frac{3}{2}, -1, \ldots \quad a_8?$
f) $\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots \quad a_6?$

4. Em cada item abaixo são dados dois termos de uma progressão geométrica. Escreva o termo geral e determine o termo indicado.

a) $a_2 = 12, a_3 = 36, \ldots \quad a_{10}?$
b) $a_2 = 1, a_4 = 25, \ldots \quad a_7?$
c) $a_1 = 2, a_4 = -\frac{1}{4}, \ldots \quad a_{10}?$
d) $a_3 = \frac{5}{9}, a_5 = \frac{5}{81}, \ldots \quad a_8?$

5. Insira 5 termos reais entre 5 e 625 de modo a obter uma progressão geométrica crescente.

6. Insira 4 termos reais entre 6 e 1458 de modo a obter uma progressão geométrica.

7. Sabendo que

$$x,\ x+4,\ x+12,\ \ldots$$

é uma progressão geométrica, determine x e o termo geral da sequência.

8. Seja dada a progressão geométrica

$$x,\ 3x,\ 2x-14,\ \ldots$$

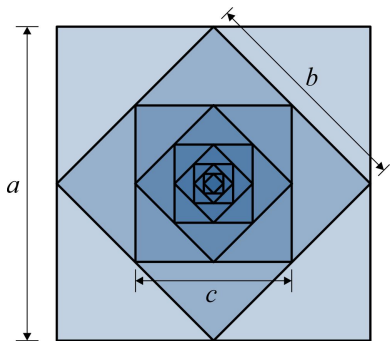
Determine x e o termo geral da sequência.

9. Sabendo que

$$x+5,\ x+1,\ x-2,\ \ldots$$

é uma progressão geométrica, determine x e o termo geral da sequência.

10. Determine o termo geral de uma progressão geométrica decrescente sabendo que a soma de seus dois primeiros termos é 24 e o produto desses dois termos é 128.

11. Na figura abaixo, o maior quadrado tem lado a, o segundo tem lado $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e o terceiro tem lado $c = \frac{a}{2}$. Determine a medida do lado do décimo quadrado.

12. Encontre os seis primeiros termos e esboce o gráfico das progressões geométricas cujos termos gerais são dados abaixo.

a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$

c) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

d) $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

13. Calcule a soma dos 10 primeiros termos das progressões do Exercício 1

14. Calcule a soma dos primeiros 6 termos das progressões geométricas do Exercício 3.

15. Calcule a soma dos primeiros 10 e dos primeiros 20 termos da sequência $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$ O que você acha que acontecerá se somarmos um número cada vez maior de termos dessa progressão?

16. Determine o valor de n tal que a soma dos termos da progressão geométrica

$$5, 15, 45, \ldots$$

seja igual a 16400.

17. Sabendo que a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 é igual a 7161, determine o termo inicial.

18. Neste ano, uma empresa espera registrar um lucro de R$ 1,6 milhões. A empresa também espera que, a cada ano, o lucro aumente 10% com relação ao ano anterior.

a) Encontre o termo geral da progressão que representa o lucro a cada ano, começando pelo ano atual.

b) Sem contar o número de casos ano a ano, determine o lucro **acumulado** em 10 anos, começando pelo ano atual.

c) Sem contar o número de casos ano a ano, determine em que ano o lucro anual superará R$ 6 milhões.

19. Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210 mm × 297 mm. Considere que uma folha A4 com 0,1 mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à sua maior dimensão.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número, k, de dobras feitas.

b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

20. Um capital de R$ 5.000,00 é investido em uma aplicação financeira que rende 8,1% ao ano. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, determine o número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital aplicado seja maior que o dobro do capital inicial.

21. Peri pegou um empréstimo de R$ 1.200,00 há um ano, e ainda não teve condições de saldá-lo sequer parcialmente. Responda às questões abaixo, sabendo que o banco de Peri cobra 3,9% de juros mensais.

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece a dívida de Peri desde o momento do empréstimo.

b) Sem calcular os valores mês a mês, determine a dívida atual de Peri.

c) Sem enumerar os valores mês a mês, determine em que mês (contado desde o início do empréstimo) a dívida superará R$ 4.000,00, caso Peri continue sem condições de saldá-la.

22. Uma indústria usa uma máquina nova por 1024 dias. Após esse período, a máquina é reformada e reutilizada. Entretanto, após cada reforma, a máquina só é usada por metade do tempo de uso anterior. Ou seja, antes da primeira reforma, ele é usada por 1024 dias. Antes da segunda reforma, ela é usada por 512 dias. Antes da terceira reforma seu tempo de uso cai para 256 dias, e assim por diante.

a) Escreva o termo geral, a_n, da progressão que fornece o tempo de uso da máquina antes de cada reforma.

b) A máquina é descartada sempre que o tempo de uso após uma reforma é menor ou igual a 32 dias. Usando a resposta do item (a), determine quantas reformas ela sofrerá até deixar de ser usada.

23. A progressista cidade de Chopotó da Serra conta hoje com 15000 habitantes. Previsões estatísticas indicam

que a população da cidade crescerá a uma taxa de 3% ao ano nos próximos anos.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão que fornece o número de habitantes da cidade em relação a n, o número de anos decorridos a partir de hoje.
b) Sem calcular a população ano a ano, determine a população daqui a 10 anos.
c) Sem calcular a população ano a ano, determine em quantos anos a população da cidade será 50% maior que a atual.

24. Uma empresa pretende contratar técnicos, pagando um salário inicial de R$ 5.000,00 por mês. Dentre os benefícios oferecidos pela empresa, há uma promessa de aumento real de 2% ao ano. Com base nesses dados, e descontando a inflação,

a) Escreva a fórmula de a_n, o termo geral da progressão que fornece o salário mensal do técnico após n anos.
b) Determine com quantos anos de serviço o técnico passará a receber cerca de o dobro de seu salário inicial.

25. Recém contratado, João recebe um salário mensal de R$ 3000,00. Na empresa de João, todo empregado ganha um aumento de 5% a cada 5 anos de trabalho. Se João permanecer no mesmo posto nessa empresa, qual deverá ser seu salário daqui a 30 anos, desprezando a inflação?

26. Uma bola pula-pula foi largada de uma altura de 1,75 m. Depois de bater no chão, a bola voltou a subir, atingindo 1,4 m. Esse processo se repetiu várias vezes e, em todas elas, a bola subiu apenas 80% da altura alcançada após a "quicada" anterior.

a) Escreva a fórmula de a_k, o termo geral da progressão que representa a altura alcançada pela bola depois de bater k vezes no chão.
b) Determine a altura alcançada pela bola após 20 batidas no chão, sem calcular a altura após cada "quicada".

27. A cidade de Quiproquó vive uma epidemia de dengue, tendo sido registrados 1.000 casos da doença na presente semana. Em decorrência das medidas de combate à doença, o prefeito da cidade espera que, a cada semana, o número de novos infectados seja reduzido a 2/3 do número de casos novos registrados na semana anterior.

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece o número aproximado de novas infecções por semana, a partir da semana atual.
b) Determine em que semana, contada a partir da atual, o número de casos novos da doença será reduzido a menos de 10.
c) Determine o número total (aproximado) de infectados entre a semana atual e a primeira na qual teremos menos de 10 casos novos da doença, determinada no item (b).

28. Uma reserva florestal possui 100 micos. Em virtude das políticas de conservação do local, estima-se que, a cada ano, essa população irá crescer 5%.

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece o tamanho da população de micos no ano i, supondo que, no ano corrente, tenhamos i=1.
b) Determine a população de micos daqui a 10 anos.
c) Determine em que ano a população de micos atingirá 1000 animais.

29. Em seu primeiro ano de funcionamento, uma empresa aérea transportou 200 mil passageiros. Desde então, a cada ano, o número de passageiros transportados tem sido 12% maior que a quantidade do ano anterior.

a) Escreva o termo geral da progressão que fornece o número de passageiros transportados pela empresa no ano i, supondo que $i = 1$ no primeiro ano.
b) Sem calcular o número de passageiros transportados ano a ano, determine quantos passageiros viajarão pela empresa em seu vigésimo ano de funcionamento.
c) Determine quantos passageiros a empresa transportará nos seus primeiros 20 anos de funcionamento.

30. A prefeitura de uma cidade quer reduzir, a cada ano, 8% das mortes violentas no município, em relação ao número observado no ano anterior.

a) Sabendo que o município registrou 1200 mortes violentas nesse ano, calcule o número previsto de mortes violentas nos próximos 2 anos.
b) Escreva o termo geral da progressão que fornece o número de mortes violentas no ano n, começando pelo ano corrente.
c) Sem calcular os valores ano a ano, determine a partir de que ano a prefeitura espera que haja menos de 400 mortes violentas no município.

31. O valor presente, V_p, de uma parcela de um financiamento, a ser paga daqui a n meses é dado pela fórmula abaixo, em que r é o percentual mensal de juros ($0 \leq r \leq 100$) e p é o valor da parcela.

$$V_p = \frac{p}{\left[1 + \frac{r}{100}\right]^n}$$

a) Suponha que uma mercadoria seja vendida em duas parcelas iguais de R$ 200,00, uma a ser paga à vista, e outra a ser paga em 30 dias (ou seja, 1 mês). Calcule o valor presente da mercadoria, V_p, supondo uma taxa de juros de 1% ao mês.
b) Imagine que outra mercadoria, de preço $2p$, seja vendida em duas parcelas iguais a p, sem entrada, com o primeiro pagamento em 30 dias (ou seja, 1 mês) e o segundo em 60 dias (ou 2 meses). Supondo, novamente, que a taxa mensal de juros seja

igual a 1%, determine o valor presente da mercadoria, V_p, e o percentual mínimo de desconto que a loja deve dar para que seja vantajoso, para o cliente, comprar à vista.

32. Calcule as séries geométricas abaixo, caso sejam convergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 9\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 7\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} -2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

33. Calcule as séries geométricas abaixo.

a) $1 + \frac{8}{9} + \frac{64}{81} + \frac{512}{729} + \ldots$

b) $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots$

c) $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots$

34. Converta em fração as dízimas periódicas abaixo.

a) 0,022222222222...

b) 0,351351351351...

c) 0,022727272727...

d) 2,166666666666...

Respostas dos Exercícios 6.4

1. a) 3, 12, 48, 192
b) 2, ?6, 18, ?54
c) −1, −1/2, −1/4, −1/8
d) 3, $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$

2. a) É uma p.g. de razão 3
b) É uma p.g. de razão 2
c) É uma p.g. de razão a
d) Não é uma p.g
e) É uma p.g. de razão $-a^2$
f) Não é uma p.g

3. a) $a_n = \frac{3}{2} \cdot 5^{n-1}$, $a_7 = \frac{46875}{2}$
b) $a_n = -4 \cdot 3^{n-1}$, $a_5 = -324$
c) $a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$, $a_{100} = -2$
d) $a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{10} = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}$
e) $a_n = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $a_8 = -\frac{64}{729}$
f) $a_n = \sqrt{6}\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, $a_6 = 27\sqrt{2}$

4. a) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $a_{10} = 78732$
b) $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)5^{n-1}$, $a_7 = 3125$
c) $a_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{10} = -\frac{1}{256}$
d) $a_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $a_8 = \frac{5}{2187}$

5. $5, 5\sqrt{5}, 25, 25\sqrt{5}, 125, 125\sqrt{5}, 625$

6. 6, 18, 54, 162, 486, 1458

7. $x = 4$, $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$

8. $x = -2$, $a_n = -2 \cdot 3^{n-1}$

9. $x = 11$, $a_n = 16\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

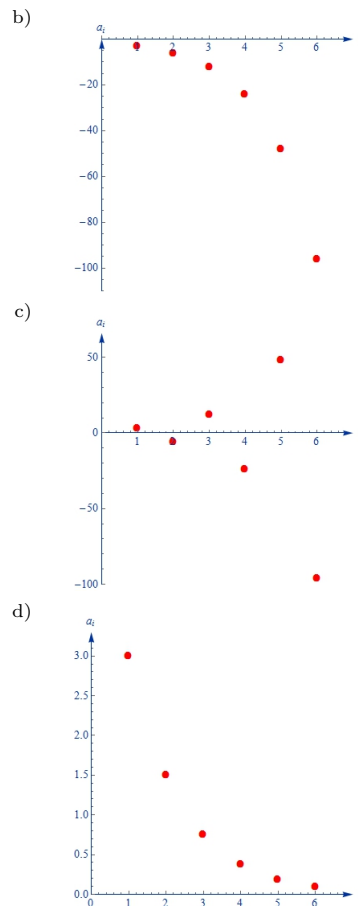
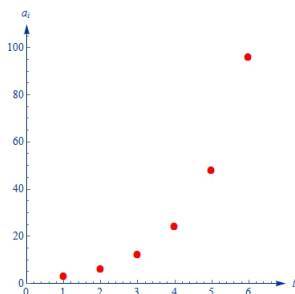
10. $a_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

11. $\sqrt{2}/16$

12. a)

b)

c)

d)

13. a) $S_{10} = 1048575$
b) $S_{10} = -29524$
c) $S_{10} = \frac{1023}{512}$
d) $S_{10} = 93 + 93\sqrt{2}$

14. a) $S_6 = 5859$
b) $S_6 = -1456$
c) $S_6 = 0$
d) $S_6 = \frac{315}{16} = 19{,}6875$
e) $S_6 = \frac{133}{162} = 0{,}820988$
f) $S_6 \approx 86{,}9977$

15. $S_{10} = 1{,}9980469$, $S_{10} = 1{,}9999981$. Se somarmos mais termos, obteremos um valor cada vez mais próximo de 2.

16. $n = 8$

17. $a_1 = 7$

18. a) $a_n = 1{,}6 \cdot 1{,}1^{n-1}$
b) Cerca de R$ 25,5 milhões
c) Daqui a 15 anos

19. a) $a_n = 0{,}1 \cdot 2^n$
b) 37,125 mm, 26,25 mm e 6,4 mm

20. 9 anos

21. a) $a_n = 1200 \cdot 1{,}039^{n-1}$
b) R$ 1.889,19
c) No 32º mês

22. a) $a_n = 1024\left(\frac{1}{2}\right)^n$
b) 5 reformas

23. a) $a_n = 15000 \cdot 1{,}03^n$
b) $a_{10} = 20159$ habitantes
c) Em pouco mais de 13 anos

24. a) $a_n = 5000 \cdot 1{,}02^{n-1}$
b) Em 36 anos

25. R$ 4020,29

26. a) $a_k = 1{,}4 \cdot 0{,}8^{k-1}$
b) 2 cm

27. a) $a_i = 1000\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$
b) 13ª semana
c) 2988 pessoas

28. a) $a_i = 100 \cdot 1{,}05^{i-1}$
b) 155 micos
c) Em 48 anos

29. a) $200000 \cdot 1{,}12^{i-1}$
b) 1.722.500 passageiros
c) 14.410.488 passageiros

30. a) $a_2 = 1104$ mortes, $a_3 = 1016$ mortes
b) $a_n = 1200 \cdot 0{,}92^{n-1}$
c) No 14º ano

31. a) R$ 398,02
b) O desconto não deve ser inferior a 1,5%

32. a) 2
b) 6
c) Diverge
d) 4
e) $-\frac{20}{3}$
f) Diverge

33. a) 9 b) 9 c) $4+2\sqrt{2}$

34. a) $\frac{1}{45}$ b) $\frac{13}{37}$ c) $\frac{1}{44}$ d) $\frac{13}{6}$

6.5 Aplicações financeiras

Há que se mencionar, também, que as taxas de juros que pagamos por nossas dívidas são muito maiores que as taxas de retorno que recebemos quando aplicamos dinheiro.

Quando investimos em uma aplicação financeira ou deixamos de pagar em dia uma conta, por exemplo, estamos sujeitos a uma *taxa de juros*. O que difere as aplicações das dívidas é o fato de o nosso patrimônio aumentar no primeiro caso e diminuir no segundo. O cálculo de dívidas e rendimentos financeiros sujeitos a juros é uma das aplicações mais interessantes das progressões geométricas.

Para introduzir o assunto, vamos supor que tenhamos esquecido de pagar uma conta de R$ 200,00, e que a taxa de juros mensal seja de 4%. Nesse caso, após um mês, nossa dívida aumenta em $0{,}04 \cdot 200 = 8$ reais, de modo que passamos a dever R$ 208,00.

E o que acontece se deixamos de pagar a conta por mais um mês, será que ela sobe os mesmos R$ 8,00? Definitivamente, não. Nesse caso, os juros não incidem apenas sobre o valor original da dívida (R$ 200,00), e sim sobre o valor corrigido, ou seja, sobre R$ 208,00.

Essa incidência de juros sobre juros dá origem ao que chamamos de *juros compostos*, que é a forma predominante de aplicação de juros no Brasil. Nessa seção, veremos várias situações práticas em que estamos sujeitos a juros compostos. Nosso objetivo será aplicar os conhecimentos sobre progressões geométricas adquiridos na Seção 6.4 à resolução de problemas financeiros, adaptando as fórmulas já vistas quando necessário.

Nos exemplos apresentados abaixo, vamos considerar que as dívidas e o rendimento das aplicações financeiras são atualizados mensalmente. Isso não quer dizer que os mesmos conceitos não possam ser aplicados a situações práticas nas quais a variação do crédito ou débito ocorra diariamente, por exemplo. Optamos pela correção mensal apenas porque ela é comumente encontrada nas propagandas e nas notícias de jornais e revistas.

Apesar de a taxa de juros ser geralmente fornecida em porcentagem, é mais fácil trabalhar com seu valor na forma decimal. Sendo assim, é bom lembrar que uma taxa de p porcento pode ser representada por

$$p\% \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{100} \qquad \text{ou} \qquad 0{,}01\,p.$$

Se quisermos, por exemplo, representar uma taxa de 6% na forma decimal, escrevemos

$$\frac{6}{100} = 0{,}01 \cdot 6 = 0{,}06.$$

■ Valor futuro

Quando depositamos dinheiro em um aplicação financeira – uma caderneta de poupança, por exemplo – e mantemos o dinheiro aplicado por vários meses, sem resgates ou novas aplicações, o valor total disponível ao final do período pode ser calculado usando juros compostos. O mesmo acontece quando deixamos de pagar uma conta dentro do prazo de vencimento, ou quando tomamos um empréstimo bancário (mesmo que seja através do sistema de cheque especial). Usemos, então, um pequeno exemplo para destacar a ideia por trás dos juros compostos.

Problema 1. Aplicando em um fundo de investimento

Vamos supor que Joaquim tenha acabado de aplicar R$ 500,00 em um fundo de investimento que rende 1% ao mês. Quanto dinheiro Joaquim terá daqui a seis meses, se não resgatar parte do investimento ou aplicar qualquer valor adicional?

Solução.

Os R$ 500,00 que Joaquim aplicou hoje são o que chamamos de *valor presente* do investimento, que doravante representaremos abreviadamente por V_p.

Se a aplicação financeira tem uma taxa de retorno de 1%, ou seja, de 0,01 ao mês, ao final de um mês, Joaquim terá

$$\underbrace{\text{R\$ 500,00}}_{V_p} + \underbrace{0{,}01 \cdot \text{R\$ 500,00}}_{\text{rendimento}} = \underbrace{\text{R\$ 505,00}}_{V_1}$$

Passado mais um mês, o rendimento de Joaquim não será calculado sobre os R$ 500,00 iniciais (V_p), mas sobre o valor atualizado, V_1. Assim, ao final do segundo mês, ele terá

$$\underbrace{\text{R\$ 505,00}}_{V_1} + \underbrace{0{,}01 \cdot \text{R\$ 505,00}}_{\text{rendimento}} = \underbrace{\text{R\$ 510,05}}_{V_2}$$

Pondo em evidência o valor disponível no início de cada mês, obtemos

$$V_1 = V_p + 0{,}01V_p = V_p \cdot (1 + 0{,}01) = 500{,}00 \cdot 1{,}01;$$

$$V_2 = V_1 + 0{,}01V_1 = V_1 \cdot (1 + 0{,}01) = 505{,}00 \cdot 1{,}01.$$

Substituindo, agora, o valor de V_1 obtido na primeira equação, podemos reescrever a última equação como

$$V_2 = V_1 \cdot (1 + 0{,}01) = V_p \cdot (1 + 0{,}01)^2 = 500 \cdot 1{,}01^2.$$

Estendendo esse raciocínio para os meses seguintes, obtemos

$$V_3 = V_p \cdot (1 + 0{,}01)^3 = 500{,}00 \cdot 1{,}01^3 \approx 515{,}15.$$

$$V_4 = V_p \cdot (1 + 0{,}01)^4 = 500{,}00 \cdot 1{,}01^4 \approx 520{,}30.$$

$$V_5 = V_p \cdot (1 + 0{,}01)^5 = 500{,}00 \cdot 1{,}01^5 \approx 525{,}51.$$

$$V_6 = V_p \cdot (1 + 0{,}01)^6 = 500{,}00 \cdot 1{,}01^6 \approx 530{,}76.$$

Assim, após 6 meses, Joaquim terá R$ 530,76.

Podemos generalizar a ideia apresentada nesse exercício para qualquer investimento feito por um período n, a uma taxa de juros r, como mostra o quadro abaixo.

Lembrando que a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica é $a_n = a_1 q^{n-1}$, observamos que V_f pode ser obtido a partir de a_n, definindo-se $q = (1 + r)$ e $a_1 = V_p(1 + r)$.

Valor futuro

Se V_p é o valor inicial de um investimento (ou de uma dívida) que cresce mensalmente a uma taxa r, então, ao final de n meses, o valor investido (ou a dívida) será igual a

$$V_f = V_p(1 + r)^n.$$

No Problema 1, há uma diferença de apenas R$ 0,76 entre o valor encontrado e aquele que seria obtido somando simplesmente R$ 5,00 (ou seja, 1% de R$ 500,00) a cada mês. Essa diferença é pequena porque o período de aplicação é curto e a taxa de rendimento da aplicação é baixa.

Como veremos no problema a seguir, é mais fácil perceber o efeito dos juros compostos trabalhando com dívidas, particularmente aquelas contraída através do sistema de cheque especial.

Problema 2. *Entrando* no cheque especial

Vamos supor que Fernando esteja passando por dificulades financeiras e sua conta bancária tenha acabado de ficar negativa em R$ 1.000,00. Para cobrir suas dívidas

pessoais, Fernando recorreu ao sistema de cheque especial de seu banco, pelo qual terá que pagar uma taxa de juros de 8% ao mês. Nesse caso, se não tiver como saldar sua dívida, nem mesmo parcialmente, quanto Fernando deverá ao final de 6 meses?

Solução.

Nessa caso, temos $r = 8/100 = 0{,}08$. Seguindo o raciocínio do exercício anterior, após seis meses, a dívida de Fernando será igual a

$$V_f = V_p(1 + 0{,}08)^6 = 1000{,}00 \cdot 1{,}08^6 \approx \text{R\$ } 1.586{,}87.$$

Se o banco não corrigisse a dívida usando juros compostos, Fernando teria que pagar, ao final de seis meses, apenas

$$1000{,}00 + 1000{,}00 \cdot 0{,}08 \cdot 6 = 1000{,}00 + 80 \cdot 6 = \text{R\$ } 1480{,}00.$$

Assim, a dívida real é R$ 106,87 superior ao valor que seria pago se os juros fossem aplicados apenas sobre valor original da dívida, ou seja, se Fernando pagasse R$ 80,00 a cada mês.

Agora, tente o Exercício 2.

Problema 3. Depreciação

Uma empresa acaba de adquirir uma máquina de R$ 150.000,00. Sabendo que a máquina perde 25% de seu valor a cada ano, determine o quanto a máquina valerá após 6 anos.

Solução.

Boa parte dos bens que adquirimos sofre uma *depreciação*, ou seja, uma perda de valor com o tempo. Isso ocorre porque há um desgaste do bem com o uso, além da obsolescência com o passar dos anos. Para calcular o valor de uma máquina levando em conta sua depreciação, usamos a mesma fórmula do valor futuro, mas adotamos uma taxa r negativa, indicando que há uma desvalorização do bem.

Nesse exemplo, como há uma perda de 25% ao ano, definimos $r = -0{,}25$, de modo que o valor da máquina após seis anos é

$$V_f = 150000(1 - 0{,}25)^6 = 150000 \cdot 0{,}75^6 = \text{R\$ } 26.696{,}78.$$

Agora, tente o Exercício 4.

Como vimos, há três fatores que determinam V_f, o valor futuro de um investimento: o valor aplicado, V_p, a taxa de juros, r, e o período da aplicação, n.

Em muitos problemas práticos, entretanto, a taxa de juros informada por um banco, financeira ou loja não é aquela efetivamente praticada. Essa diferença pode decorrer tanto da variação mensal dos juros (nos casos em que eles não são prefixados), como da existência de taxas de administração e encargos financeiros. No próximo problema, vamos usar a fórmula do valor futuro para descobrir qual foi o rendimento real de uma aplicação.

Problema 4. Descobrindo o rendimento mensal de uma aplicação

Há exatamente um ano, Lucinda investiu dinheiro em uma aplicação na qual os rendimentos eram atualizados mensalmente. Hoje, o montante disponível é 14% maior

que o valor por ela investido. Qual foi a taxa mensal de retorno da aplicação nesse período?

Solução.

Se o investimento cresceu 14%, então

$$V_f = V_p + \left(\frac{14}{100}\right) V_p = 1{,}14V_p.$$

Igualando essa expressão à fórmula de V_f dada acima, obtemos

Dica
Observe que não é preciso conhecer V_p e V_f, mas apenas a relação entre esses valores.

$$\begin{aligned} V_p(1+r)^{12} &= 1{,}14V_p \\ (1+r)^{12} &= 1{,}14 \\ \sqrt[12]{(1+r)^{12}} &= \sqrt[12]{1{,}14} \\ 1+r &= 1{,}011 \\ r &= 1{,}011 - 1 = 0{,}011 \end{aligned}$$

Se $r = 0{,}01p$, então $p = r/0{,}01 = 100r$.

Para encontrar o rendimento percentual, basta multiplicar r por 100. Logo, a aplicação rendeu $0{,}011 \cdot 100 = 1{,}1\%$ ao mês.

Agora, tente o Exercício 6.

■ Valor presente

Outra aplicação interessante da fórmula de juros compostos consiste em encontrar o valor presente, uma vez conhecido o valor futuro.

Podemos obter trivialmente a formula correta do valor presente, bastando para isso isolar o termo V_p na fórmula do valor futuro, dada acima.

Valor presente

Se V_f é o valor futuro de um investimento que cresce a uma taxa mensal r, então, para alcançá-lo em n meses, é preciso investir, hoje, o correspondente a

$$V_p = V_f(1+r)^{-n}.$$

Problema 5. Investindo para obter um valor no futuro

Quanto devemos investir, hoje, para que o valor aplicado atinja R$5.000,00 daqui a cinco anos? Suponha que não faremos novas aplicações ou resgates e que nosso fundo de investimento tenha um rendimento de 1,5% ao mês.

Solução.

Observamos, inicialmente, que cinco anos correspondem a 60 meses. Para obter R$ 5.000,00 em 60 meses, aplicando a uma taxa mensal de $1{,}5/100 = 0{,}015$, é preciso investir

$$V_p = 5000(1+0{,}015)^{-60} = \text{R\$ } 2.046{,}48.$$

Assim, se fizermos um depósito de R$ 2.046,48, hoje, teremos a quantia desejada daqui a exatos 5 anos.

Agora, tente o Exercício 8.

■ Valor futuro de um investimento constante mensal

No Problema 5, fizemos uma única aplicação de nosso dinheiro para obter um valor no futuro. Naturalmente, essa não é uma atitude corriqueira. Na maioria das vezes, quando queremos juntar dinheiro para efetuar uma compra futura, poupamos um pouquinho a cada mês. Vejamos, então, um exemplo mais realista.

Problema 6. Poupando a mesma quantia por alguns meses

João pretende guardar 100 reais por mês, durante 6 meses seguidos, a partir de hoje. Para aumentar seus rendimentos, o valor poupado nos 5 primeiros meses será depositado em uma aplicação financeira com taxa de retorno de 1 % ao mês. Quanto João terá ao final do período, se não fizer nenhum resgate?

Solução.

João reservará o dinheiro correspondente à primeira das 6 parcelas ainda hoje, e repetirá esse procedimento no mesmo dia do mês, durante os próximos 5 meses. Em lugar de calcular o valor que João terá a cada mês, o que seria muito trabalhoso, vamos determinar o rendimento que cada parcela terá ao final dos seis meses.

A primeira parcela ficará aplicada por 5 meses. Já a segunda renderá apenas por 4 meses. A terceira será aplicada por três meses, e assim por diante, até que a sexta parcela não terá rendimento algum, pois estamos considerando que o período de aplicação do dinheiro terminará na data em que ela for depositada por João.

Fórmula do valor futuro:

$$V_f = V_p(1+r)^n$$

Usando, então, a fórmula do valor futuro com $V_p = 100$ e $r = 0{,}01$, e fazendo n variar de 0 a 5, podemos calcular o valor de cada parcela ao final do período:

1^a parcela: $V_1 = 100 \cdot 1{,}01^5 =$ R\$ 105,10.

2^a parcela: $V_2 = 100 \cdot 1{,}01^4 =$ R\$ 104,06.

3^a parcela: $V_3 = 100 \cdot 1{,}01^3 =$ R\$ 103,03.

4^a parcela: $V_4 = 100 \cdot 1{,}01^2 =$ R\$ 102,01.

5^a parcela: $V_5 = 100 \cdot 1{,}01^1 =$ R\$ 101,00.

6^a parcela: $V_6 = 100 \cdot 1{,}01^0 =$ R\$ 100,00.

O valor futuro total será igual à soma dos valores futuros das seis parcelas, como mostrado na Figura 6.14. Somando os valores das parcelas na ordem inversa, ou seja, começando em V_6 e terminando em V_1, obtemos

$$100 + 100 \cdot 1{,}01^1 + 100 \cdot 1{,}01^2 + 100 \cdot 1{,}01^3 + 100 \cdot 1{,}01^4 + 100 \cdot 1{,}01^5,$$

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1},$$

em que $q = 1 + r$.

que corresponde à soma dos 6 primeiros termos de uma progressão geométrica cujo termo inicial é R\$ 100,00, e que tem razão $q = 1{,}01$. Logo, o valor futuro total é dado por

$$V_f = \sum_{i=1}^{6} V_i = \frac{100(1{,}01^6 - 1)}{1{,}01 - 1} \approx \text{R\$}615{,}20.$$

Assim, a poupança de João renderá R\$ 15,20 a mais do que ele obteria deixando o dinheiro debaixo do colchão.

Generalizando o procedimento adotado no Problema 6, de modo que ele possa ser aplicado a qualquer problema, vamos supor que n parcelas de P reais serão depositadas mensalmente, a partir de hoje, em uma aplicação financeira que rende r ao mês. Nesse caso, se não houver resgate do dinheiro ao longo do período, os valores futuros

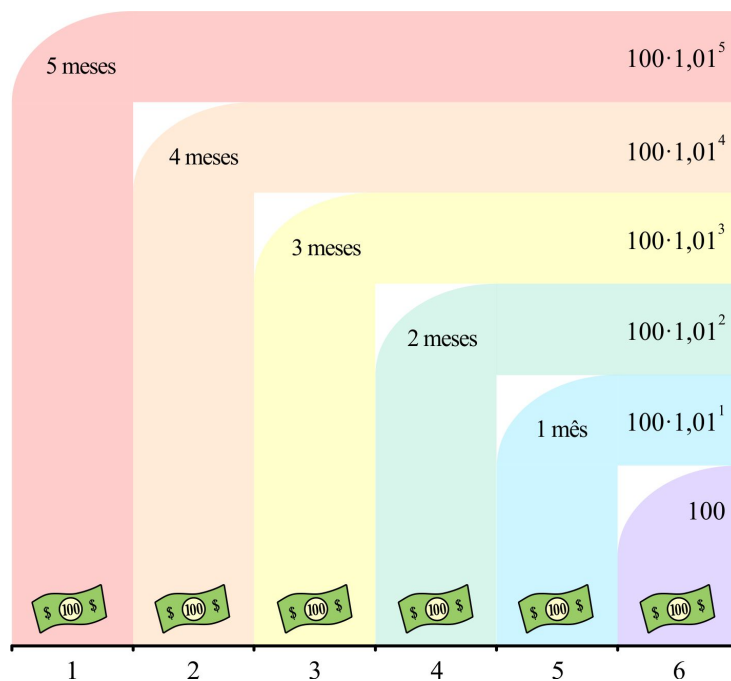



Figura 6.14: Valor futuro de cada parcela do Problema 6.

das parcelas serão dados por

$$V_1 = P(1+r)^{n-1}.$$
$$V_2 = P(1+r)^{n-2}.$$
$$V_3 = P(1+r)^{n-3}.$$
$$\vdots$$
$$V_{n-1} = P(1+r)^1.$$
$$V_n = P.$$

O valor futuro da soma de todos esses termos pode ser facilmente encontrado empregando-se a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica que começa por P e tem razão r.

A fórmula ao lado pode ser usada para depósitos com outra periodicidade (diária, anual etc), contanto que a taxa de juros se refira ao mesmo período.

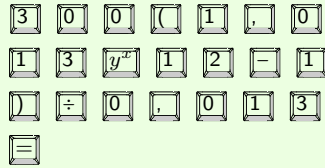
Valor futuro de depósitos iguais parcelados

Depositando mensalmente n parcelas iguais a P em uma aplicação financeira com taxa de juros mensal igual a r, o valor total disponível no momento do depósito da última parcela é igual a

$$V_f = P\,\frac{[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Problema 7. Poupando 300 reais por um ano.

Depositando R$ 300,00 no início de cada mês, por um ano – ou seja, fazendo 12 depósitos –, em uma aplicação financeira que rende 1,3% ao mês, quanto teremos ao final do período, se não fizermos resgates?

Solução.

Nesse problema, temos $P = 300$ reais, $r = 1{,}3/100 = 0{,}013$ e $n = 12$ meses. Logo,

$$V_f = 300\,\frac{\left[(1+0{,}013)^{12}-1\right]}{0{,}013} \approx 3868{,}89.$$

Assim, no momento em que depositarmos a 12^a parcela, o valor aplicado atingirá R$ 3868,89.

Agora, tente o Exercício 10.

Problema 8. Poupando para comprar um computador

Simone decidiu juntar dinheiro por dois anos para comprar um computador que ela estima que custará R$ 2.500,00. Quanto Simone deve depositar mensalmente, sabendo que sua aplicação financeira favorita rende 1,2% ao mês?

Solução.

Nesse problema, conhecemos o valor futuro – $V_f = 2500$ reais – e queremos determinar a parcela mensal P, sabendo que $r = 1{,}2/100 = 0{,}012$ (%) e que $n = 24$ meses. Vamos, então, usar a fórmula do valor futuro apresentada no quadro acima para montar uma equação em P:

$$2500 = P\,\frac{\left[(1+0{,}012)^{24}-1\right]}{0{,}012}$$

$$2500 = 27{,}6227P$$

$$P = \frac{2500}{27{,}9542} = 90{,}51.$$

Portanto, Simone deve poupar R$ 90,51 por mês, nos próximos 2 anos.

Agora, tente o Exercício 13.

Problema 9. Contando os meses

Carolina decidiu trocar sua máquina de lavar roupas, mas não quer pagar os juros elevados dos crediários de lojas. Tendo escolhido um modelo que custa R$ 2.240,00, ela pretende aplicar R$ 120,00 por mês até juntar o dinheiro necessário para a compra. Sabendo que a aplicação de Carolina rende 1,2% ao mês, determine quanto tempo ela terá que esperar para atingir seu objetivo.

Solução.

O enunciado do problema nos fornece as seguintes informações:

$$V_f = 2240 \text{ reais}, \qquad P = 120 \text{ reais}, \qquad \text{e} \qquad r = 1 + \frac{1{,}2}{100} = 1{,}012.$$

Substituindo esses valores na fórmula apresentada no quadro acima, obtemos

$$2240 = 120\,\frac{\left[(1+0{,}012)^{n}-1\right]}{0{,}012}$$

Observe que a única variável não definida nessa equação é justamente a nossa incógnita, ou seja, o número de meses que Carolina deverá esperar para conseguir adquirir a lavadora. Para encontrar o valor de n, isolamos essa variável na equação, conforme mostrado a seguir.

$$
\begin{aligned}
2240 &= 10000[1{,}012^n - 1] && \text{Dividindo 120 por 0,012.}\\
0{,}224 &= 1{,}012^n - 1 && \text{Dividindo ambos os lados por 10000.}\\
1{,}224 &= 1{,}012^n && \text{Somando 1 a ambos os lados}\\
\log(1{,}224) &= \log(1{,}012^n) && \text{Extraindo o logaritmo dos dois lados.}\\
\log(1{,}224) &= n\log(1{,}012) && \text{Aplicando uma propriedade dos logaritmos.}\\
\frac{\log(1{,}224)}{\log(1{,}012)} &= n && \text{Dividindo ambos os lados por log(1,012).}\\
n &= 16{,}9445 && \text{Invertendo os lados e simplificando o resultado.}
\end{aligned}
$$

Logo, Carolina deverá poupar por 17 meses para poder comprar a máquina de lavar nova.

Agora, tente o Exercício 15.

■ Valor presente de prestações

Para a aquisição de produtos caros, as lojas sempre oferecem duas opções de pagamento: à vista ou através do crediário. Para descobrir qual dessas essas alternativas é a mais vantajosa, ou mesmo para comparar os parcelamentos propostos por lojas distintas, precisamos determinar o valor presente do bem que queremos adquirir.

Vejamos como usar as progressões geométricas para determinar o valor presente de compras parceladas, tanto nos casos em que o primeiro pagamento é feito no ato da compra, como quando a loja tem um plano *sem entrada*.

Problema 10. Pagando 100 reais por seis meses, *com entrada*

Uma loja oferece um produto em seis parcelas mensais de R$ 100,00, exigindo que o primeiro pagamento seja feito no ato da compra. Sabendo que a loja trabalha com uma taxa de juros de 4% ao mês, determine o valor do bem, ou seja, quanto ele deveria custar se o pagamento fosse feito à vista.

Solução.

Apesar de a loja oferecer o produto em seis parcelas de R$ 100,00, seu valor à vista não é igual a $5 \times 100 =$ R$ 600,00, uma vez que, nas compras parceladas, há embutida uma taxa de juros. Nesse problema, essa taxa corresponde a 4%, de modo que $r = 4/100 = 0{,}04$.

Para descobrir o valor presente do bem, precisamos eliminar os juros das parcelas. Para tanto, adotamos uma estratégia similar àquela empregada no Problema 6, com a diferença de que, agora, estamos interessados no valor presente, em lugar do valor futuro.

Nessa compra parcelada, a loja não cobrará juros sobre a primeira parcela, cobrará um mês de juros sobre a segunda parcela, dois meses sobre a terceira, e assim sucessivamente, até atingir cinco meses de juros sobre a sexta e última parcela. Dessa forma, aplicando a fórmula do valor presente para eliminar os juros, temos

$V_p = V_f(1+r)^{-n}$

$$
\begin{aligned}
1^a \text{ parcela:} &\quad V_1 = 100 \cdot 1{,}04^0 = \text{R\$ } 100{,}00.\\
2^a \text{ parcela:} &\quad V_2 = 100 \cdot 1{,}04^{-1} = \text{R\$ } 96{,}15.\\
3^a \text{ parcela:} &\quad V_3 = 100 \cdot 1{,}04^{-2} = \text{R\$ } 92{,}46.\\
4^a \text{ parcela:} &\quad V_4 = 100 \cdot 1{,}04^{-3} = \text{R\$ } 88{,}90.\\
5^a \text{ parcela:} &\quad V_5 = 100 \cdot 1{,}04^{-4} = \text{R\$ } 85{,}48.\\
6^a \text{ parcela:} &\quad V_6 = 100 \cdot 1{,}04^{-5} = \text{R\$ } 82{,}19.
\end{aligned}
$$

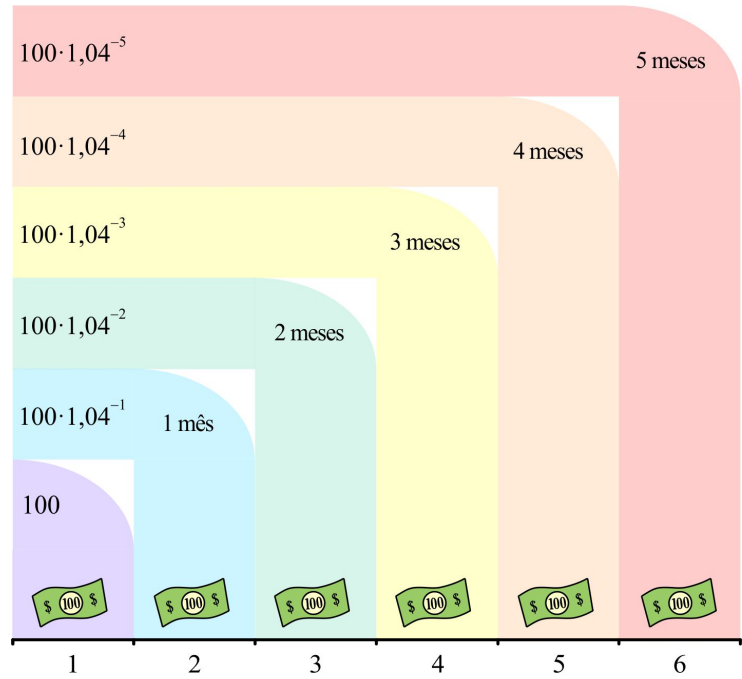



Figura 6.15: Valor presente de cada parcela do Problema 10.

O valor presente do produto é a soma das seis parcelas, depois de descontados os juros, ou seja,

$$V_p = 100{,}00 + 96{,}15 + 92{,}46 + 88{,}90 + 85{,}48 + 82{,}19 = \text{R\$ } 545{,}18,$$

Logo, quando comprado à vista, o produto deve custar R$ 54,82 a menos que o valor a prazo.

Como mostra a Figura 6.15, o valor presente do produto mencionado no Problema 10 é a soma dos 6 primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $V_1 = 100$ e que tem como razão

$$q = (1 + r)^{-1} = 1{,}04^{-1}.$$

O termo geral dessa progressão é

$$V_i = V_1 \cdot q^{i-1} = 100 \cdot (1{,}04^{-1})^{(i-1)} = 100 \cdot 1{,}04^{-(i-1)}.$$

Desse modo, temos

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{V_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{6} V_i = \frac{100\left[1 - (1{,}04^{-1})^6\right]}{1 - 1{,}04^{-1}} = \text{R\$ } 545{,}18.$$

Generalizando o raciocínio adotado acima para qualquer compra parcelada, podemos escrever

$$V_p = \frac{P\left[1 - (1 + r)^{-n}\right]}{1 - (1 + r)^{-1}},$$

em que P é o valor da parcela, n é o número de meses e r é a taxa de juros mensal. Manipulando essa fórmula para torná-la um pouco mais simples, chegamos ao resultado apresentado no quadro a seguir.

Também nesse caso, pode-se substituir o pagamento mensal por parcelas diárias, anuais etc,

Valor presente de pagamentos parcelados, com entrada

Suponha que um financiamento tenha sido dividido em n parcelas mensais iguais a P, com o primeiro pagamento na data da contratação. Se a taxa mensal de juros empregada é igual a r, então o valor presente do financiamento é dado por

$$V_p = P\,\frac{(1+r)}{r}[1-(1+r)^{-n}].$$

Problema 11. Comprar à vista ou no crediário?

Rogério pode comprar uma TV por R\$ 1.100,00 à vista ou em dez parcelas mensais de R\$120, pagando a primeira no ato da compra. Qual é a melhor opção, supondo que a aplicação financeira favorita de Rogério renda 1,2% ao mês?

Solução.

Para comparar o valor à vista com a compra a crédito, temos que calcular o valor presente das parcelas, usando a taxa de juros da aplicação favorita de Rogério, que corresponde a 1,2% ao mês. Nesse caso,

$$n = 10 \text{ meses}, \qquad r = \frac{1{,}2}{100} = 0{,}012 \qquad \text{e} \qquad P = 120 \text{ reais}.$$

Usando, então, a fórmula do valor presente de compras parceladas com entrada, obtemos

$$V_p = 120\frac{(1+0{,}012)}{0{,}012}\left[1-(1+0{,}012)^{-10}\right] = 10120(1-0{,}88755) = 1137{,}99.$$

Portanto, Rogério gastaria R\$ 1.137,99 para pagar as 10 parcelas do crediário. Como esse valor é superior a R\$ 1.100,00, é preferível comprar à vista.

Observe que, apesar de o valor a prazo corresponder a 10 × 120 = R\$ 1.200,00, Rogério só precisaria gastar R\$ 1.137,99, pois ele poderia pagar a primeira parcela e aplicar o resto, e o rendimento da aplicação seria suficiente para que fossem atingidos os R\$ 1.200,00.

Agora, tente o Exercício 18.

Problema 12. Desconto para pagamento à vista

Se sua aplicação favorita rende 1,2% ao mês e uma loja lhe oferece uma máquina fotográfica em 6 parcelas mensais de R\$110,00, com o primeiro pagamento no ato da compra, que desconto você deve pedir para pagar à vista?

Solução.

Segundo o enunciado, temos

$$n = 6 \text{ meses}, \qquad r = \frac{1{,}2}{100} = 0{,}012 \qquad \text{e} \qquad P = 110 \text{ reais}.$$

Assim, o valor presente da compra parcelada é

$$V_p = 110\frac{(1+0{,}012)}{0{,}012}[1-(1+0{,}012)^{-6}] = 9276{,}67(1-0{,}93093) = 640{,}74.$$

Como 6 × R\$ 110,00 = R\$ 660,00, você deve pedir um desconto de

$$660{,}00 - 640{,}74 = \text{R\$ } 19{,}26.$$

Esse desconto corresponde a 19,26/660 = 2,92% do valor cobrado pelo produto.

Agora, tente o Exercício 19.

Problema 13. Saindo do cheque especial

Sua conta bancária está negativa em R$ 1.000,00 e você quer quitar essa dívida em seis parcelas mensais, pagando a primeira hoje mesmo. Se a taxa de juros de seu cheque especial é de 9% ao mês, qual será o valor de cada parcela? Qual será o valor total pago?

Solução.

Nesse caso, conhecemos o valor presente, V_p, e queremos determinar a parcela, P. Substituindo

$$V_p = 1.000 \text{ reais}, \qquad n = 6 \text{ meses} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

na fórmula de V_p, obtemos

$$1000 = P\frac{(1+0{,}09)}{0{,}09}[1-(1+0{,}09)^{-6}].$$

Isolando a parcela P nessa equação, chegamos a

$$1000 = 4{,}88965P \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{1000}{4{,}88965} = 204{,}51.$$

Portanto, você desembolsará R$ 204,51 por mês, de modo que o total pago atingirá $6 \times 204{,}51 =$ R$ 1.227,06.

Agora, tente o Exercício 21.

Consideremos, agora, as formas de crédito *sem entrada*, ou seja, que não envolvem pagamento no ato da contratação.

Problema 14. Pagando 120 reais por cinco meses, *sem entrada*

Uma loja oferece um produto em cinco parcelas mensais de R$ 120,00, *sem entrada*. Sabendo que a loja trabalha com uma taxa de juros de 4% ao mês, determine o valor do bem para pagamento à vista.

Solução.

Assim como fizemos no problema 10, vamos determinar o valor presente do bem calculando isoladamente o valor presente de cada parcela, usando $r = \frac{4}{100} = 0{,}04$.

Por se tratar de uma compra *sem entrada*, a loja cobrará um mês de juros sobre a primeira parcela, dois meses de juros sobre a segunda, e assim sucessivamente, até atingir cinco meses de juros sobre a quinta parcela.

$V_p = V_f(1+r)^{-n}$

Aplicando a fórmula do valor presente a cada parcela, obtemos

$$\begin{aligned}
1^a \text{ parcela:} &\quad V_2 = 120 \cdot 1{,}04^{-1} = \text{R\$ } 115{,}38.\\
2^a \text{ parcela:} &\quad V_3 = 120 \cdot 1{,}04^{-2} = \text{R\$ } 110{,}95.\\
3^a \text{ parcela:} &\quad V_4 = 120 \cdot 1{,}04^{-3} = \text{R\$ } 106{,}68.\\
4^a \text{ parcela:} &\quad V_5 = 120 \cdot 1{,}04^{-4} = \text{R\$ } 102{,}58.\\
5^a \text{ parcela:} &\quad V_6 = 120 \cdot 1{,}04^{-5} = \text{R\$ } 98{,}63.
\end{aligned}$$

O valor presente do produto é a soma dos valores presentes das parcelas, ou seja,

$$V_p = 115{,}38 + 110{,}95 + 106{,}68 + 102{,}58 + 98{,}63 = 534{,}22.$$

Portanto, o valor do produto corresponde a R$ 534,22, ou R$ 65,78 a menos que o total parcelado.

No problema acima, obtivemos o valor presente somando os 5 primeiros termos de uma progressão geométrica que tem como primeiro termo

$$V_1 = P(1+r)^{-1},$$

em que P corresponde ao valor da parcela e r é a taxa de juros. Observando que a razão da sequência é $q = (1+r)^{-1}$, podemos escrever o termo geral como

$$V_i = V_1 \cdot q^{i-1} = P(1+r)^{-1} \cdot (1+r)^{-(i-1)} = P(1+r)^{-i}.$$

Somando, então, os n primeiros termos dessa progressão geométrica, chegamos a

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{V_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{P(1+r)^{-1}[1-(1+r)^{-n}]}{1-(1+r)^{-1}}.$$

Manipulando essa expressão de modo a simplificar o denominador, obtemos a fórmula apresentada abaixo.

Valor presente de pagamentos parcelados, sem entrada

Suponha que um financiamento tenha sido dividido em n parcelas mensais iguais a P, sem pagamento no ato da contratação. Se a taxa mensal de juros empregada é igual a r, então o valor presente do financiamento é dado por

$$V_p = P\,\frac{[1-(1+r)^{-n}]}{r}.$$

Problema 15. Comprar à vista ou no crediário?

Visitando uma loja de eletrodomésticos, Valter recebeu duas propostas para a aquisição de um fogão: pagar R$ 1.300,00 à vista, ou fazer um crediário de 10 parcelas mensais de R$145, sem entrada. Supondo que Valter consiga um rendimento de 1,1% ao mês investindo seu dinheiro em uma aplicação financeira, qual é a melhor opção de pagamento do fogão?

Solução.

Substituindo

$$n = 10 \text{ meses}, \qquad r = \frac{1{,}1}{100} = 0{,}011 \qquad \text{e} \qquad P = 145 \text{ reais},$$

na fórmula do valor presente de financiamentos sem entrada, obtemos

$$V_p = 145\frac{[1-(1+0{,}011)^{-10}]}{0{,}011} = 13181{,}82(1-0{,}89637) = \text{R\$ } 1366{,}00.$$

Como esse valor é superior a R$ 1.300,00, é preferível adquirir o fogão à vista.

Agora, tente o Exercício 24.

Problema 16. Parcela mensal de um empréstimo imobiliário

A taxa efetiva de juros inclui os custos de administração e seguro.

Lívia quer obter um empréstimo de R$50.000,00 para comprar uma casa. Suponha que o financiamento vá ser feito em 10 anos e que o banco de Lívia cobre uma taxa efetiva de juros de 1% ao mês. Quanto ela terá que pagar mensalmente se todas as parcelas tiverem o mesmo valor e o primeiro desembolso ocorrer um mês após o empréstimo?

Solução.

Nesse caso, precisamos determinar o valor da parcela mensal, P, conhecendo

$$V_p = 50.000 \text{ reais}, \qquad n = 120 \text{ meses} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Substituindo os dados acima na fórmula do valor presente de empréstimos sem entrada, obtemos

$$50000 = P\frac{[1-(1+0{,}01)^{-120}]}{0{,}01}.$$

Isolando P nessa equação, temos

$$50000 = 69{,}7P \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{50000}{69{,}7} = 717{,}36.$$

Portanto, o banco cobrará de Lívia uma parcela mensal de R$ 717,36, excluída a inflação (ou seja, a parcela ainda pode sofrer reajustes periódicos em função da inflação).

Agora, tente o Exercício 25.

Exercícios 6.5

1. José aplicou R$ 2.000,00 em um fundo de investimento que rende 0,9% ao mês. Supondo que José não faça qualquer nova aplicação ou retirada de dinheiro do fundo, determine o montante que José terá após n meses?
2. Aplicando R$ 1.200,00 em um fundo de investimento que rende 1,2% ao mês, quanto dinheiro você espera ter após dois anos, se não resgatar ou aplicar qualquer valor adicional? Quanto você "lucrará" neste período com a aplicação?
3. Marta possui uma dívida bancária de R$ 500,00. Sabendo que o banco de Marta adota uma taxa de juros de 4,6% ao mês, quanto ela deverá ao final de um ano, caso não consiga saldar sequer uma parte de sua dívida?
4. Paulo acaba de pagar R$ 59.000,00 por um carro novo. Se o modelo adquirido por Paulo sofre uma desvalorização de 20% ao ano, quando valerá o carro daqui a 4 anos?
5. Um determinado país troca de moeda sempre que a inflação acumulada ultrapassa 900%. Tendo acabado de trocar a moeda, esse país vem sofrendo com uma inflação de 16% ao ano. Nesse caso, em quantos anos haverá nova troca de moeda?
6. Há um ano e meio, você investiu dinheiro em uma aplicação que tem rendimento mensal. Passado este ano, você constatou que seus rendimentos aumentaram em 19%. Qual é a taxa mensal de rendimento da aplicação?
7. Rogério adquiriu uma máquina de lavar roupas por R$ 1.600,00 há quatro anos e a vendeu por R$ 400,00 após quatro anos de uso. Qual foi a taxa de depreciação anual média da máquina?
8. Em virtude das ações judiciais em que é ré, a prefeitura de um município estima que terá que pagar R$ 3.250.000,00 daqui a um ano. Para quitar essa dívida, a prefeitura pretende usar o dinheiro que tem em caixa, oriundo do recolhimento de IPTU, fazendo uma aplicação única em um fundo com rendimento de 1,4 ao mês. Que valor a prefeitura deve aplicar?
9. Janaína ganhou de sua mãe um anel de ouro que vale, atualmente, R$ 2.250,00. Se o anel foi adquirido há cinco anos e o ouro teve uma valorização média de 13,4% ao ano nesse período, qual foi o valor pago pelo anel?
10. Mariana vai passar dois anos poupando R$ 200,00 por mês para fazer a viagem de seus sonhos. Supondo que Mariana aplicará seu dinheiro em um fundo de investi-

mento que rende 1,1% ao mês, quanto dinheiro ela terá daqui a 2 anos?

11. A partir de hoje, você pretende passar um ano poupando R$ 90,00 por mês para comprar uma TV. Se sua aplicação financeira favorita rende 1,2% ao mês, quanto dinheiro você terá ao final dos doze meses?

12. Quanto é preciso aplicar mensalmente em um fundo de investimentos que rende 1,05% ao mês para obter R$ 5.000,00 ao final de 3 anos?

13. Quincas pretende pretende poupar um valor fixo mensal para comprar uma moto de R$ 9.500,00 daqui a quatro anos. Se a caderneta de poupança de Quincas rende 0,9% ao mês, quanto ele deve depositar mensalmente?

14. Depositando R$ 210,00 por mês em uma aplicação que rende 1,2% ao mês, quanto tempo você gastará para juntar R$ 7.500,00?

15. Mariano decidiu que pedirá Cristina em casamento no dia em que conseguir comprar as alianças, que custam R$ 1.250,00. Para sua infelicidade, Mariano só consegue poupar R$ 80,00 por mês, os quais pretende aplicar em uma caderneta de poupança tem rendimento mensal de 0,8%. Quanto tempo o noivo terá que aguardar para fazer o convite?

16. Uma TV custa R$ 1.400,00. Para poder comprá-la em um ano, quanto você deve depositar mensalmente na sua aplicação que rende 1,1% ao mês?

17. Uma loja oferece dois planos de pagamento de uma geladeira: ou o cliente paga R$ 1000,00 à vista ou paga 11 prestações de R$ 100,00, com o primeiro desembolso no ato da compra. Se sua aplicação financeira favorita rende 1,2% ao mês, qual é a opção mais vantajosa?

18. Lucas leu uma propaganda que dizia que um aparelho de som custava R$ 1.800,00 à vista, mas que o cliente poderia comprar o mesmo modelo pagando R$ 140,00 em 15 parcelas mensais. Sabendo que Lucas possui dinheiro aplicado em um fundo de investimento que rende 1,4% ao mês, determine se ele deve efetuar a compra à vista ou a prazo.

19. A escola da filha de Liliane cobra R$ 780,00 por mês (uma entrada e 11 pagamentos mensais). Se Liliane investe seu dinheiro em uma aplicação financeira de rende 1,5% ao mês, quanto deve pedir de desconto para pagar a anuidade da escola em uma única parcela?

20. Uma loja de computadores vende um notebook em 10 prestações de R$ 250,00, sem entrada. Supondo que nesse preço esteja embutida uma taxa de juros de 2%, determine o desconto que um cliente deve pedir se quiser comprar o computador à vista.

21. Uma loja vende um produto por R$ 2.000,00 se o cliente paga à vista. Quanto ela deve cobrar pelo pagamento em 12 parcelas mensais, com entrada, se sua taxa de juros corresponde a 3,3% ao mês?

22. Hélio tem uma dívida de R$ 3.600,00 com uma financeira e quer quitá-la em 2 anos, pagando já a primeira parcela. Se a financeira cobra uma taxa de juros de 6,7% ao mês, qual será o valor de cada parcela?

23. Uma loja vende um colar em 10 parcelas de R$ 530,00, sem entrada. Se a loja cobra 3,1% de juros ao mês, qual é o valor do colar.

24. Você recebeu uma propaganda indicando que é possível comprar uma moto pagando R$ 2000,00 no ato da compra e financiando o resto em 36 meses. A propaganda diz que as parcelas mensais são de R$ 150,00 e que a loja cobra mensalmente 2% de juros e outras despesas. Calcule o preço à vista da moto. Calcule o total cobrado pelos juros. Dica: some ao valor pago no ato da compra o valor presente do restante do pagamento.

25. Uma loja que cobra 2,9% de juros ao mês quer vender um produto que custa R$ 1.750,00 em 12 parcelas mensais, sem entrada. Qual valor ela deve atribuir às parcelas?

26. Um produto é vendido em 12 parcelas de R$ 300, com o primeiro pagamento à vista, ou em 11 parcelas de R$ 326, sem entrada. Se a taxa de juros mensal corresponde a 3,4% nos dois casos, qual é a opção mais vantajosa?

Respostas dos Exercícios 6.5

1. $V_f = 2000 \cdot 1.009^n$

2. R$ 1.597,77, com um lucro de R$ 397,77.

3. R$ 857,73

4. R$ 24.166,40

5. Em 14 anos e 10 meses

6. 0,971%

7. 29,3%

8. R$ 2.750.603

9. R$ 1.199,82

10. R$ 5.459,14

11. R$ 1.154,21

12. R$ 115,01

13. R$ 159,11

14. R$ 109,78

15. 30 meses

16. 15 meses

17. Comprar à vista é mais vantajoso, pois se você aplicasse seu dinheiro e pagasse as 11 parcelas, mês a mês, desembolsaria, em valores atuais, R$ 1037,05.

18. Comprar à vista é mais vantajoso, pois o valor presenta da compra parcelada corresponde a R$ 1908,70.

19. Liliane deve pagar, no máximo, R$ 8635,47, o que corresponde a um desconto (mínimo) de R$ 724,53.

20. O valor presente da compra parcelada corresponde a R$ 2290,56, de modo que o cliente deve obter um desconto de, no mínimo R$ 209,44.

21. R$ 2376,00 ou 12 parcelas de R$ 198,00.

22. R$ 286,47

23. R$ 4498,02

24. Preço à vista: R$ 5823,33
Juros: R$ 1576,67

25. R$ 203,07

26. O pagamento em 12 parcelas, com entrada.

Índice Remissivo